This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

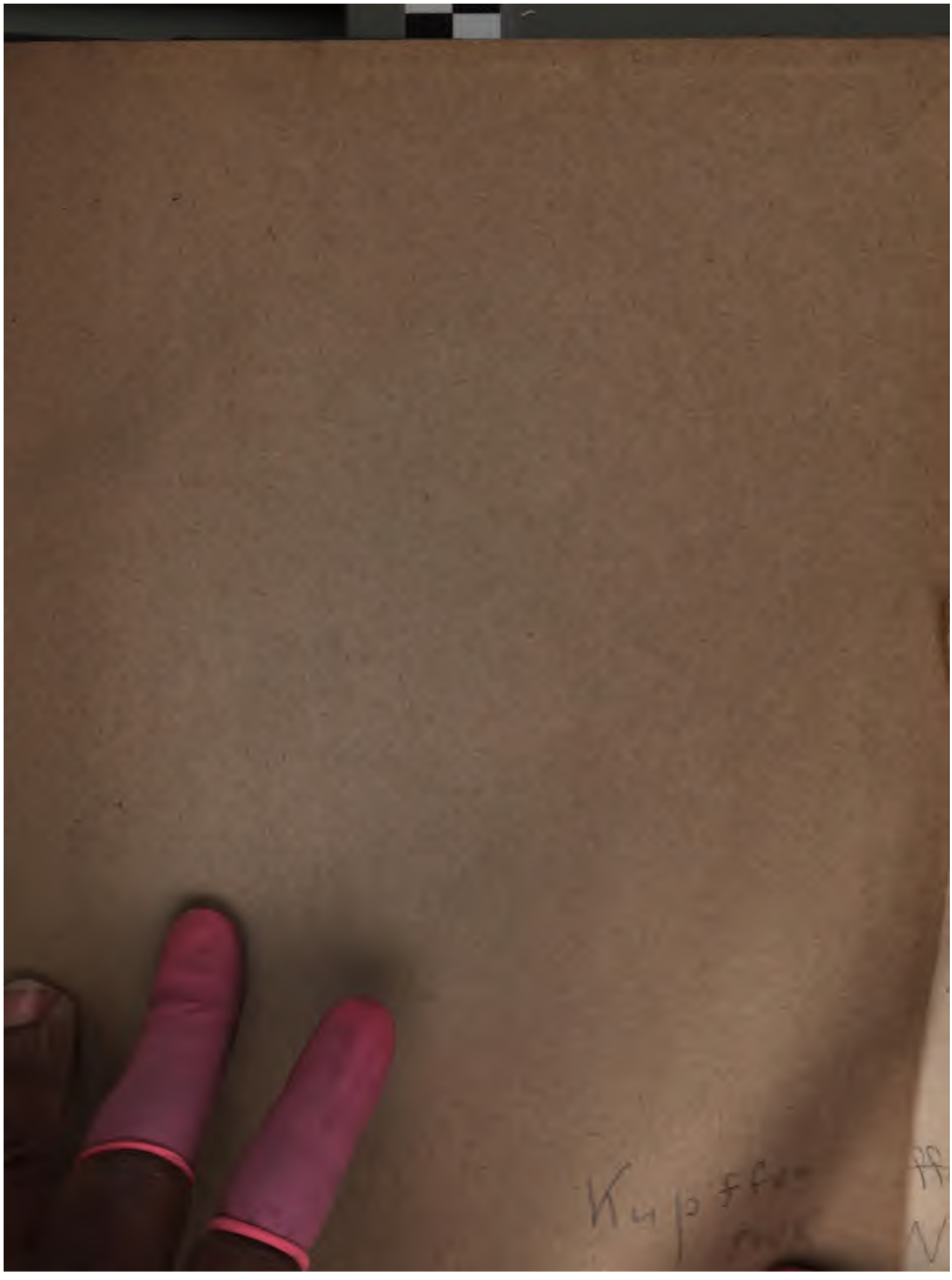
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

RESEARCH LIBRARIES
33 06908365 1



HANDBUCH

DER

RECHNENDEN KRYSTALLONOMIE.

VON

A. T. KUPFFER,

MITGLIED DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU ST. PETERSBURG.

St. PETERSBURG 1831.

GEDRUCKT IN DER BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAETEN.

II.

Kupff
PW

TO NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
167464A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1924 L

Auf Verfügung der Academie gedruckt.

Im April 1831.

P. H. Fuss, beständiger Secretär.

VORWORT.

Indem ich die erste Abtheilung eines Werkes dem Druck übergebe, das alles, was die Krystalle Merkwürdiges darbieten, umfassen soll, erlaube ich mir, die Nachsicht des Lesers in Anspruch nehmend, einige Bemerkungen, die ihn auf den Standpunct stellen sollen, von dem aus ich dieses Werk beurtheilt wünsche. Es ist in einer Zeit von vier Jahren, in Kasan, als ich noch dort Professor der Mineralogie war, ausgearbeitet worden; erst hatte ich es nur für meine Zuhörer bestimmt; es sollte nichts werden als eine mit den gehörigen Erläuterungen verbundene Sammlung der zur Berechnung der Krystallwinkel nöthigen Formeln: nachher kamen einige allgemeine Betrachtungen hinzu, zu welchen mich eine fortgesetzte Beschäftigung mit den merkwürdigsten Krystallsystemen geführt hatte; endlich fühlte ich wohl, dass eine vorausgeschickte Darstellung des Haüy'schen und ins-

besondere des Weissischen Systems, welches von seinem berühmten Urheber nur fragmentarisch bearbeitet worden ist, von Nutzen seyn könnte. So hat das vorliegende Werk nach und nach die Gestalt bekommen, die es jetzt hat; es ist mehr ein Hülfsbuch für rechnende Krystallographen; man findet keine neue Ansicht, nur neue und bequemere Formeln darin; es ersetzt keines der schon vorhandenen Lehrbücher, sondern stellt sich nur in ihre Reihe.

Alles was in der Lehre von den Krystallen nicht rein geometrisch ist, ist für ein zweites Werk aufgespart worden; dahin habe ich auch die Lehre von den Zwillingskrystallen gerechnet, die in die Lehre von der Gruppirung der Krystalle gehört, und mehr von physikalischem als geometrischem Interesse ist.

Wenn man manche treffliche neuere Arbeit in diesem Werke nicht benutzt findet, so bedenke man, in welcher Entfernung von den Mittelpuncten der Litteratur es entstanden ist; ich war fast ganz auf das, was ich gelernt und aus eigner Erfahrung und Betrachtung hinzu gefügt hatte, beschränkt. Man verdamme auch nicht zu schnell jede schwerfällige Wendung in der Beweisführung, die dem Leser wohl hie und da aufstossen wird: man findet nicht immer gleich den nächsten Weg zum vorgesteckten Ziele. Man nehme keinen Anstoss daran, dass ich in der kurzen Anleitung, den mittleren Fehler des Resultates mehrerer Beobachtungen zu bestimmen, die letzten trefflichen Arbeiten

von Gauss unbenutzt gelassen habe; als ich dieses Kapitel niederschrieb (es ist fast ganz aus meiner von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift: „Ueber Messung der Krystallwinkel“ genommen), war die Schrift von Gauss noch nicht zu mir gelangt, und es jetzt wieder umzuarbeiten, hielt ich für überflüssig, da es doch für den hier beabsichtigten Zweck so ziemlich einerlei ist, welcher Methode man folgt: denn die Natur selbst weicht im Bau der Krystalle so oft von der strengsten Regelmässigkeit ab, dass eine so grosse Gewissenhaftigkeit in der Discussion der Beobachtungsfehler doch zu nichts führt. Aus demselben Grunde habe ich auch nur die einfachsten Methoden der Krystallmessung beschrieben; denn diese, auf die rechte Art angewendet, geben immer noch eine grössere Genauigkeit als nöthig ist; die sehr zusammengesetzten Instrumente finden im Grunde nur da ihre Anwendung, wo es darauf ankommt, sehr kleine Aenderungen desselben Winkels zu beobachten, wie z. B. in der Arbeit von Mitscherlich über den Einfluss der Temperatur auf die Grösse der Krystallwinkel. Man wird mir vielleicht auch vorwerfen, dass ich zu viele Rechnungsbeispiele gegeben, und zu viele Winkel wirklich berechnet habe: ich habe diess für diejenigen gethan, die noch keine grosse Uebung haben, und deshalb gern nach einem gegebenen Typus rechnen, und ihre Resultate, um die neu erlangte Geschicklichkeit auf die Probe zu stellen, mit einem im Buche angegebenen Facit vergleichen mögen.

Endlich, hoffe ich mit Zuversicht, wird es mir niemand übel deuten, dass ich mehrere Figuren aus fremden Arbeiten habe copiren lassen, aus Haüy's Traité der Mineralogie, aus der Mineralogie von Mohs, und aus mehreren Abhandlungen von Weiss, Rose und Mitscherlich; in mathematischsn Werken legt man einen so geringen Werth auf die Figuren, dass man sich gern, wo es angeht, der Mühe überhebt, sie selbst zusammen zu setzen.

St. Petersburg, im Mai 1831.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNISS.

Einleitung. Seite.

I. Trigonometrie, A. Gradlinigte Trigonometrie 1
B. Sphärische Trigonometrie 13

II. Analytische Geometrie der Ebenen 28

III. Einige Erklärungen aus der Stereometrie 53

Erstes Kapitel.

Begriff und Abtheilungen der Wissenschaft, Erklärungen 59

Eintheilung der Krystallformen 62

Vom Gesetz der Symmetrie 67

Von den Formen im Allgemeinen, die bei den Krystallen vorkommen . 74

Von den primären und secundären Formen 101

Haüy's Theorie. Durchgang der Blätter 102

Wichtige Folgerung aus der Haüy'schen Theorie. Erstes Grundgesetz der Krystallbildung 146

Weiss Methode, die Krystallflächen zu bezeichnen. Verwandlung der Weissischen Zeichen in Haüy'sche 146

Eigne Bezeichnungsart der Krystallflächen, die zur Rechnung bequem ist. Verhältniss derselben zur Haüy'schen und Weiss'schen Bezeichnungsart 190

Zweites Kapitel.

Berechnung der Winkel, des Volumens, der Oberfläche der Krystalle 217

Vom Rhomboëder, Dihexaëder und Quadratoctaëder 218

Von den Formen, die durch grade Abstumpfung der Endkanten von dem Rhomboëder, Dihexaëder und Quadratoctaëder abgeleitet werden können 234

Vom Rhomboëder insbesondere 249

Vom Dihexaëder insbesondere 291

Seite.

Vom Quadratoctaëder insbesondere 300
Von den Formen des regulären Systems 309
Vom graden Rhomboïdoctaëder und vom Rectangulär-octaëder . . 350
Vom schiefen Rhombenoctaëder 378
Vom schiefen Rhombenoctaëder oder vom unsymmetrischen Octaëder . 425
Anhang. Vom doppeltschiefen Rhombenoctaëder 456

Drittes Kapitel.

Analytische Krystallonomie 482
Von den Axen 509

Viertes Kapitel.

Von der Messung der Krystallwinkel 534
Von den Beobachtungsfehlern 534
Von den Instrumenten, welche dazu dienen, die Neigungswinkel der Krystallflächen zu messen 561

EINLEITUNG.

Das Studium der Krystalle erfordert mehrere mathematische Kenntnisse, die besonders demjenigen unentbehrlich sind, der diese Wissenschaft gründlich erlernen will. Man braucht bei jedem Schritte, den man thut, die Formeln der gradlinigten und sphärischen Trigonometrie; die allgemeinste Behandlung der mathematischen Verhältnisse der Krystallformen beruht ganz auf der Geometrie der Ebenen, und kann selbst als ein Theil derselben angesehen werden. Es wird also von grossem Nutzen seyn, uns als Vorbereitung zum Studium der Krystallonomie mit diesen Theilen der Mathematik genau bekannt zu machen.

I. TRIGONOMETRIE.

A. *Gradlinigte Trigonometrie.*

1. Die gradlinigte Trigonometrie lehrt uns alle Stücke eines Dreiecks zu finden, von welchem uns entweder drei Seiten, oder zwei Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel bekannt sind. Diese drei Fälle bedürfen einer gleichen Anzahl Formeln, welche hinreichend sind, um alle möglichen Aufgaben der gradlinigten Trigonometrie aufzulösen.

Die Auflösung der Aufgaben, welche die gradlinigten Dreiecke betreffen, beruhen auf der Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke. Es gilt also in der gradlinigten Trigonometrie nur alle Fälle von schiefwinklichten Dreiecken auf die Auflösung rechtwinklichter Dreiecke zurückzuführen. Die Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke gehört ganz der Analysis, und die Grundsätze der Trigonometrie reichen nicht hin, die Verhältnisse zu finden, welche zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinklichten Dreiecks Statt finden.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn in irgend einem rechtwinklichten Dreieck, Fig. 1, das Verhältniss zweier Seiten gegeben ist, die Winkel α und β vollkommen bestimmt sind. Die Analysis giebt uns die nöthigen Formeln, um aus dem gegebenen Verhältniss zweier Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks seine Winkel zu finden, und man hat nach diesen Formeln Tafeln entworfen, welche unmittelbar den Werth des Winkels geben, wenn das Verhältniss zweier Seiten gegeben ist, oder das Verhältniss zweier Seiten, wenn der Winkel gegeben ist: das sind die trigonometrischen Tafeln, ohne welche man keine trigonometrische Rechnung vornehmen kann.

2. Bei diesen Operationen sind mehrere Ausdrücke im Gebrauch, welche zu erklären hier der Ort ist.

Man nennt Sinus des Winkels α (sin. α) das Verhältniss der Seite a zur Seite c (siehe Fig. 1); man nennt Cosinus desselben Winkels α (cos. α) das Verhältniss der Seite b zur Seite c. Das Verhältniss der Seite a zur Seite b heisst Tangente des Winkels α (tg. α), und das Verhältniss der Seite b zur Seite a Cotangente des Winkels α (cot. α).

Oder $\frac{a}{c} = \sin.\ \alpha,$

$\frac{b}{c} = \cos.\ \alpha,$

$\frac{a}{b} = \text{tg.}\ \alpha,$

$\frac{b}{a} = \cot.\ \alpha.$

Dasselbe ist beim Winkel β der Fall, für welchen man folgende Gleichungen hat:

$\frac{b}{a} = \sin.\ \beta,$

$\frac{a}{c} = \cos.\ \beta,$

$\frac{b}{a} = \text{tg.}\ \beta,$

$\frac{a}{b} = \cot.\ \beta.$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

1°: $\text{tang.}\ \alpha = \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha}$

$\cot.\ \alpha = \frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha}$

$\text{tg.}\ \alpha \cot.\ \alpha = 1$

$\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha = 1$

$1 + \text{tg.}^2\alpha = \frac{1}{\cos.^2\alpha}$

$1 + \cot.^2\alpha = \frac{1}{\sin.^2\alpha}$

$\sin.\ \alpha = \cos.\ \beta = \cos.\ (90^\circ - \alpha)$

$\cos.\ \alpha = \sin.\ \beta = \sin.\ (90^\circ - \alpha)$

$\text{tg.}\ \alpha = \cot.\ \beta = \cot.\ (90^\circ - \alpha)$

$\cot.\ \alpha = \text{tg.}\ \beta = \text{tg.}\ (90^\circ - \alpha).$

Es giebt Winkel, deren Cosinus und Sinus leicht zu finden sind. Es sey z. B. der Winkel $\alpha = 0^\circ$; alsdann fallen die Linien b und c zusammen, und wir haben $b = c$ und $a = 0$; also

$\sin. 0^\circ = 0$

$\cos. 0^\circ = 1$

$\text{tg}. 0^\circ = 0$

$\cot. 0^\circ = \infty$

Eben so finden wir

$\sin. 90^\circ = 1$

$\cos. 90^\circ = 0$

$\text{tg}. 90^\circ = \infty$

$\cot. 90^\circ = 0.$

In der That, der Sinus des Winkels α nimmt immer mehr zu, je mehr sich der Werth von α einem rechten Winkel nähert; wenn $\alpha = 90^\circ$ wird, so ist klar, dass $\sin. \alpha = 1$, weil $a = c$ wird. Wird $\alpha > 90^\circ$, so nimmt a, das heisst das Perpendikel auf die Verlängerung der Seite b, (siehe Fig. 2) ab; folglich ist der Sinus des Winkels α, wenn er $> 90^\circ$ wird, kleiner als die Einheit. Der Cosinus des Winkels α nimmt ab, je mehr der Werth von α sich 90° nähert, wird $\alpha = 90^\circ$, so ist offenbar $\cos. \alpha = 0$, da $b = 0$. Wird $\alpha > 90^\circ$, so fängt b wieder an grösser zu werden, aber in entgegensetzter Richtung, und wird folglich negativ; also der Cosinus des Winkels α, wenn sein Werth zwischen 90° und 180° fällt, ist > 0 und < 1 und negativ. Eben so klar ist es, dass $\frac{a}{c}$ eben so gut der Sinus des an α anliegenden Winkels oder der Sinus von $180^\circ - \alpha$ ist, als der Sinus von α selbst; und $\frac{b}{c}$ ist der Cosinus von $180^\circ - \alpha$, wie $-\frac{b}{c}$ der Cosinus von α ist (siehe Fig. 2).

Wir haben also:

$$\sin.\ \alpha = \sin.\ (180^\circ - \alpha)$$
$$\cos.\ \alpha = -\cos.\ (180^\circ - \alpha)$$
$$\text{tg.}\ \alpha = -\text{tg.}\ (180^\circ - \alpha)$$
$$\cot.\ \alpha = -\cot.\ (180^\circ - \alpha)$$

Was die Winkel betrifft, die kleiner als 0, oder negativ sind, so ist klar, dass das Perpendikel a negativ wird, indem die Seite b dasselbe Zeichen behält. Es folgt daraus, dass

$$\sin.\ -\alpha = -\sin.\ \alpha$$
$$\cos.\ -\alpha = \cos.\ \alpha$$
$$\text{tg.}\ -\alpha = -\text{tg.}\ \alpha$$
$$\cot.\ -\alpha = -\cot.\ \alpha.$$

3. Diese Vorbereitungen reichen hin, um die drei allgemeinen Formeln zu finden, welche die zwischen den verschiedenen Stücken eines Dreiecks stattfindenden Verhältnisse geben. Es sey Fig. 3 irgend ein rechtwinklichtes Dreieck; man will die Verhältnisse wissen, die zwischen seinen Winkeln A, B, C und seinen Seiten a, b, c stattfinden. Fällen wir aus dem Winkel C ein Perpendikel p auf die Seite c, so ist aus dem Vorigen klar, dass

$$\frac{p}{a} = \sin.\ B$$
$$\frac{p}{b} = \sin.\ A$$

also $p = a \sin.\ B = b \sin.\ A$ und

$$a \sin.\ B = b \sin.\ A.$$

Diese Gleichung giebt uns das Verhältniss zwischen zwei Winkeln und

den gegenüberliegenden Seiten, und kann uns als erste allgemeine Formel dienen.

Sind a, c und B gegeben, so findet man leicht b. Es ist klar, dass $p = a \sin. B$, und $y = a \cos. B$; da nun $b^2 = p^2 + (c - y)^2$ ist, so folgt daraus, dass $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos. B$.

Das ist die zweite allgemeine Formel.

Es bleibt uns noch übrig, den Winkel A zu finden, wenn die beiden Seiten a, c und der eingeschlossene Winkel B gegeben sind.

Offenbar ist $\text{tg. } A = \frac{p}{x} = \frac{p}{c-y}$. Setzt man in diese Gleichung für p und y ihre oben gefundenen Werthe, so hat man

$$\text{tg. } A = \frac{a \sin. B}{c - a \cos. B};$$

welches die dritte und letzte allgemeine Formel ist.

Hier sind also die drei allgemeinen Formeln, welche hinreichend sind, um alle Aufgaben der ebenen Trigonometrie aufzulösen:

I. $a \sin. B = b \sin. A$

II. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac. \cos. B$

III. $\text{tg. } A = \frac{a \sin. B}{c - a \cos. B}$.

Es ist von selbst klar, dass man in diesen Formeln a für b und c setzen kann, wenn man zugleich A für B und C setzt; das hiesse nur die Ordnung der Buchstaben, welche in der Figur die Seiten und Winkel bezeichnen, verändern, was erlaubt ist, da die Formeln ganz allgemein sind.

4. Ehe wir uns an den Gebrauch dieser Formeln wenden, wollen wir aus der ersten derselben einige Folgerungen ziehen.

Die Formel I. kann in zwei verschiedenen Formen ausgedrückt werden.

$$a \sin. B = b \sin. A \ldots . (1)$$

$$c \sin. B = b \sin. C \ldots . (2).$$

Nun ist aber

$$C = 180° - (A + B),$$

also

$$\sin. C = \sin. (A + B).$$

Setzt man diesen Werth von sin. C in die Gleichung (2), so findet man

$$\sin. (A + B) = \frac{c}{b} \cdot \sin. B.$$

Nun ist aber auch

$$c = a \cos. B + b \cos. A,$$

also

$$\sin. (A + B) = (\frac{a}{b} \cos. B + \cos. A) \sin. B,$$

und da wir aus der Formel (1) $\frac{a}{b} = \frac{\sin. A}{\sin. B}$ haben,

so ist

$$\sin. (A + B) = \sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B \ldots (I).$$

Da ferner

$$\cos.^2 (A + B) = 1 - \sin.^2 (A + B),$$

so folgt aus der so eben gefundenen Gleichung, dass

$$\cos.^2(A+B) = 1 - \sin.^2 A \cdot \cos.^2 B - \cos.^2 A \sin.^2 B - 2 \sin. A \cos. B \cos. A \sin. B,$$

oder da $1 = \sin.^2 A + \cos.^2 A$

$$\cos.^2(A+B) = \sin.^2 A \sin.^2 B + \cos.^2 A \cos.^2 B - 2 \sin. A \sin. B \cos. A \cos. B,$$

und

$$\cos. (A + B) = \cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B \ldots (II).$$

Ferner, da tg. $(A + B) = \frac{\text{sin. } (A + B)}{\text{cos. } (A + B)}$
und cot. $(A + B) \frac{\text{cos. } (A + B)}{\text{sin. } (A + B)}$,
so findet man leicht

$$\text{tg. } (A + B) = \frac{\text{tg. } A + \text{tg. } B}{1 - \text{tg. } A \,.\, \text{tg. } B} \quad \ldots, \text{(III)}$$

und

$$\text{cot. } (A + B) = \frac{1 - \text{tg. } A \,.\, \text{tg. } B}{\text{tg. } A + \text{tg. } B} = \frac{\text{cot. } A \,.\, \text{cot. } B - 1}{\text{cot. } A + \text{cot. } B} \quad \ldots \text{(IV)}$$

Um sin. $(A - B)$ und cos. $(A - B)$ zu finden, braucht man in den obigen Formeln nur B negativ zu nehmen; so haben wir, da sin. $- B = -$ sin. B und cos. $- B =$ cos. B; tg. $- B = -$ tg. B und cot. $- B = -$ cot. B:

$$\text{sin. } (A - B) = \text{sin. } A \text{ cos. } B - \text{cos. } A \text{ sin. } B \ldots \text{(V)}$$

$$\text{cos. } (A - B) = \text{cos. } A \text{ cos. } B + \text{sin. } A \text{ sin. } B \ldots \text{(VI)}$$

$$\text{tg. } (A - B) = \frac{\text{tg. } A - \text{tg. } B}{1 + \text{tg. } A \,.\, \text{tg. } B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

$$\text{cot. } (A - B) = \frac{1 - \text{cot. } A \,.\, \text{cot. } B}{\text{cot. } B - \text{cot. } A} \quad \ldots\ldots\ldots, \ldots \text{(VIII)}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $A = B$, so bekommen wir

$$\text{sin. } 2A = 2 \text{ sin. } A \text{ cos. } A$$

$$\text{cos. } 2A = \text{cos.}^2 A - \text{sin.}^2 A = 1 - 2 \text{ sin.}^2 A = 2 \text{ cos.}^2 A - 1$$

$$\text{tg. } 2A = \frac{2 \text{ tg. } A}{1 - \text{tg.}^2 A}$$

$$\text{cot. } 2A = \frac{\text{cot.}^2 A - 1}{2 \text{ cot. } A}.$$

Es giebt noch eine grosse Menge von trigonometrischen Gleichungen, die den eben entwickelten ähnlich sind, und die man häufig in der Rechnung braucht. Ein grosser Theil derselben ist in der Tafel I. zusammengestellt worden, ohne die Beweise zu geben, die man leicht selbst finden kann.

5. Es bleibt uns noch übrig, einiges über den Gebrauch der drei allgemeinen Formeln in Nr. 3 zu sagen. Bei trigonometrischen Rechnungen bedient man sich immer der Logarithmen; es ist also nothwendig, den obigen Formeln eine für die Rechnung mit Logarithmen bequeme Form zu geben.

Die erste Formel braucht nicht verändert zu werden. Die zweite kann auf zwei Arten umgewandelt werden, je nachdem man die Seite b oder den Winkel B sucht.

Ist es die Seite b, die unbekannt ist, und die man aus dem gegenüberliegenden Winkel B und den beiden Seiten a, c, die ihn einschliessen, berechnen will, so verfährt man auf folgende Weise.

Da

$$\cos. B = 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} B = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} B - 1,$$

so haben wir

$$b^2 = 4 ac \sin.^2 \tfrac{1}{2} B + (a - c)^2 \quad \ldots\ldots (1),$$

oder

$$b^2 = (a + c)^2 - 4 ac \cdot \cos.^2 \tfrac{1}{2} B \quad \ldots\ldots (2).$$

In dieser letzten Gleichung setze man:

$$4 ac \cdot \cos.^2 \tfrac{1}{2} B = (a + c)^2 \sin.^2 \varphi,$$

so hat man

$$b^2 = (a + c)^2 \cos.^2 \varphi,$$

oder

$$b = (a + c) \cos. \varphi$$

worin φ durch die Gleichung

$$\text{sin. } \varphi = \frac{2 \text{ cos. } \frac{1}{2}B \sqrt{ac}}{a+c}$$

bestimmt ist.

Wenn es der Winkel B ist, den man sucht, so haben wir

$$\text{cos. } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

oder

$$1 + \text{cos. } B = 2 \text{ cos. } {}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{2ac}$$

und

$$1 - \text{cos. } B = 2 \text{ sin. } {}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{(a+b-c)(-a+c+b)}{2ac}$$

Die dritte Formel kann auf eine solche Art umgeändert werden, dass man die beiden unbekannten Winkel A und C zugleich findet, wenn a, c und B gegeben sind. Wir haben nach der Grundformel

$$\text{tang. } A = \frac{a \text{ sin. } B}{c - a \text{ cos. } B}$$

und eben so

$$\text{tang. } C = \frac{c \text{ sin. } B}{a - c \text{ cos. } B}.$$

Da nun $\text{sin. } A = \sqrt{\frac{\text{tg. }^2 A}{1 + \text{tg. }^2 A}}$ und $\text{sin. } C = \sqrt{\frac{\text{tg. }^2 C}{1 + \text{tg. }^2 C}}$

so ist

$$\text{sin. } A = \frac{a \text{ sin. } B}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \text{ cos. } B)}}$$

$$\text{sin. } C = \frac{c \text{ sin. } B}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \text{ cos. } B)}},$$

also

$$\frac{\text{sin. } A + \text{sin. } C}{\text{sin. } A - \text{sin. } C} = \frac{a+c}{a-c}$$

und da nach der Tafel I., die sich am Ende dieses Buches befindet,

$$\frac{\text{sin. } A + \text{sin. } C}{\text{sin. } A - \text{sin. } C} = \frac{\text{tg. } \frac{1}{2}(A+C)}{\text{tg. } \frac{1}{2}(A+C)}$$

ist; so hat man

$$\frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(A+C)}{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(A-C)} = \frac{a+c}{a-c}$$

oder da offenbar

$$\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}(A+C) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B,$$

so ist

$$\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}(A-C) = \frac{(a-c)}{(a+c)} \cdot \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B.$$

Hat man erst den Werth von $\frac{1}{2}(A-C)$, so ist es leicht A und C zu finden. Man erhält den Werth von A, wenn man $\frac{1}{2}(A+C) = 90° - \frac{1}{2}B$ zu $\frac{1}{2}(A-C)$ addirt; man bekömmt C, wenn man $\frac{1}{2}(A-C)$ von $\frac{1}{2}(A+C) = 90° - \frac{1}{2}B$ abzieht.

Man kann diese Formel auch aus der ersten Grundformel ableiten. Nach dieser hat man

$$\text{sin.}\,A = \frac{a\,\text{sin.}\,B}{b}$$
$$\text{sin.}\,C = \frac{c\,\text{sin.}\,B}{b}$$

also

$$\frac{\text{sin.}\,A + \text{sin.}\,C}{\text{sin.}\,A - \text{sin.}\,C} = \frac{(a+c)}{(a-c)} = \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(A+C)}{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(A-C)}.$$

6. Hier ist eine Tafel, die alle möglichen Aufgaben, welche die Berechnung eines ebenen Dreiecks betreffen, nebst ihren Auflösungen enthält:

Es wird gegeben.	Es wird gesucht.	Formel, welche den Zusammenhang der gegebenen und gesuchten Stücke giebt.
a, b, c	B	$\text{cos.}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4ac}}$ oder $\text{sin.}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4ac}}$

Es sind gegeben.	Es wird gesucht.	Formel, welche den Zusammenhang der gegebenen und gesuchten Stücke giebt.
a, c, B	A, C	$\text{tg. } \frac{1}{2}(A - C) = \frac{(a-c)}{a+c} \cdot \text{cot. } \frac{1}{2}B$ $\frac{1}{2}(A + C) = 90^\circ - \frac{1}{2}B$ $A = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C)$ $C = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}(A - C)$
a, c, B	b	$b = (a + c) \cos. \varphi$ $\sin. \varphi = \frac{2 \cos. \frac{1}{2}B \sqrt{ac}}{(a+c)}$
a, b, A	B	$\sin. B = \frac{a}{b} \cdot \sin. A$ NB. B kann zwei Werthe haben, weil $\sin. B = \sin. (180^\circ - B)$.
A, C, b	a, c	$a = \frac{b \sin. A}{\sin. (A + C)}$ $c = \frac{b \sin. C}{\sin. (A + C)}$

7. Was den Flächeninhalt Q des Dreiecks Fig. 3. betrifft, so kann man ihn leicht finden, wenn die Seiten a, c und der eingeschlossene Winkel B gegeben sind; man findet

$$Q = \frac{1}{2} p \cdot c$$

und da $p = a \sin. B$:

$$Q = \frac{1}{2} ac \sin. B.$$

Man findet Q auf eine ganz ähnliche Art, wenn nicht diese, sondern andere Stücke des Dreiecks gegeben sind.

B. *Sphärische Trigonometrie.*

8. In der sphärischen Trigonometrie, wie in der gradlinigten, haben wir allgemeine Formeln, welche zur Auflösung aller Aufgaben dieser Art hinreichend sind; aber hier haben wir deren vier, weil der Fall hinzutritt, wo man aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks seine Seiten berechnet, und welcher bei dem gradlinigten Dreieck nicht vorkommen kann.

Es ist nicht schwer, die vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie zu entwickeln. Ich bediene mich dazu der Methode von Gauss, wie er sie in seinen Vorlesungen über die sphärische Astronomie zu geben pflegt und welche mir die einfachste scheint.

Es sey Fig. 4 irgend ein sphärisches Dreieck auf der Oberfläche einer Kugel gezeichnet. Wir wollen drei Ebenen durch die Seiten a, b, c des Dreiecks und durch den Mittelpunct der Kugel legen. Es sey Fig. 5 die Ebene, die durch die Seite a und durch den Mittelpunct M der Kugel geht. Es sey D der Durchschnittspunct einer Linie, die man sich senkrecht aus der Spitze des sphärischen Dreiecks (oder aus dem Puncte A Fig. 6) auf diese Ebene gefällt denkt; wir werden diese Linie mit AD bezeichnen, indem wir den Buchstaben A an die Spitze des sphärischen Dreiecks setzen, die sich über die Ebene FMG erhebt, wie man es Fig. 4 abgebildet sieht.

Es sey überdiess HD senkrecht auf MF; DK senkrecht auf MG; Dr parallel mit Hq, und Kq parallel mit HD.

Jetzt ist es klar, dass $FMG = a$, $FMA = b$, $GMA = c$; $AHD = C$, $AKD = B$.

Dieses festgesetzt, haben wir $AD = AH \sin. C$, oder da $\frac{AH}{AM} = \sin. b$;

$$AD = AM \sin. b \sin. C.$$

Nun ist aber auch $AD = AK \sin. B$, oder da $AK = AM \sin. c$;

$$AD = AM \sin. c \sin. B.$$

Diese beiden Werthe von AD combinirt, geben die erste allgemeine Gleichung

$$\sin. b \sin. C = \sin. c \sin. B.$$

Es ist ferner klar, dass

$$Mq = MK \cos. a = AM \cos. c \cos. a;$$

weil $MK = AM \cos. c$: überdiess ist $qH = DK \sin. a$, oder da $DK = AK \cos. B = AM \sin. c \cos. B$:

$$qH = AM \sin. c \sin. a \cos. B;$$

wir haben auch

$$HM = AM \cos. b.$$

Nun ist aber

$$AM = Mq + qH,$$

also

$$\cos. b = \cos. c \cos. a + \sin. c \sin. a \cos. B.$$

welches die zweite allgemeine Formel ist.

Die dritte ist in der Gleichung

$$HD = Kq - rK$$

enthalten. Es ist nämlich

$$Kq = MK \sin. a = AM \cos. c \sin. a$$

und

$$rK = DK \cos. a = AM \sin. c \cos. B \cos. a:$$

ferner

$$HD = AD \text{ cot. } C = AM \text{ sin. } c \text{ sin. } B \text{ cot. } C.$$

Die Gleichung $HD = Kq + rK$ nimmt also folgende Form an:

$$\text{cot. } C \text{ sin. } B = \text{cot. } c \text{ sin. } a - \text{cos. } B \text{ cos. } a.$$

Die vierte allgemeine Formel findet man durch die Combination der ersten Formel mit einer der obigen Gleichungen.

Wir haben nach der ersten allgemeinen Formel

$$\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. } a} = \frac{\text{sin. } B}{\text{sin. } b} = \frac{\text{sin. } C}{\text{sin. } c}$$

und nach dem Vorigen

$$HD = Kq - rK = AM \left(\text{cos. } c \text{ sin. } a - \text{sin. } c \text{ cos. } a \text{ cos. } B\right);$$

da nun $HD = AM$ sin. b cos. C, so ist

$$\text{sin. } b \text{ cos. } C = \text{cos. } c \text{ sin. } a - \text{sin. } c \text{ cos. } a \text{ cos. } B \ldots (D),$$

oder wenn man $\frac{\text{sin. } a \text{ sin. } B}{\text{sin. } A}$ für sin. b, und $\frac{\text{sin. } a \text{ sin. } C}{\text{sin. } A}$ für sin. c setzt:

$$\text{sin. } B \text{ cos. } C = \text{sin. } A \text{ cos. } c - \text{sin. } C \text{ cos. } B \text{ cos. } a \ldots (A).$$

Diese Gleichung kann in eine andere ganz ähnliche umgeändert werden, wenn man in derselben A für C und a für c, und umgekehrt setzt, wie es erlaubt ist. Wir haben alsdann

$$\text{sin. } B \text{ cos. } A = \text{sin. } C \text{ cos. } a - \text{sin. } A \text{ cos. } B \text{ cos. } c$$

oder

$$\text{sin. } C \text{ cos. } a = \text{sin. } B \text{ cos. } A + \text{sin. } A \text{ cos. } B \text{ cos. } c.$$

Substituirt man diesen Werth von sin. C cos. a in dem dritten Gliede der Gleichung (A), so hat man:

$$\text{sin. } B \text{ cos. } C = \text{sin. } A \text{ cos. } c - \text{sin. } B \text{ cos. } A \text{ cos. } B - \text{sin. } A \text{ cos. } c \text{ cos.}^2 B$$

oder

$$\text{sin. } B \text{ cos. } C = \text{sin. } A \text{ cos. } c \text{ sin.}^2 B - \text{sin. } B \text{ cos. } B \text{ cos. } A.$$

Diese Gleichung, durch sin. B dividirt, giebt

$$\cos. C = \sin. B \sin. A \cos. c - \cos. B \cos. A.$$

Hier sind beisammen die vier Grundformeln, welche hinreichen, alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie aufzulösen:

I. $\sin. A \sin. b = \sin. a \sin. B$;

II. $\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A$;

III. $\cos. A \cos. c = \cot. b \sin. c - \cot. B \sin. A$;

IV. $\cos. A = -\cos. B \cos. C + \sin. B \sin. C \cos. a$.

9. Es bleibt uns noch übrig, diesen Gleichungen eine für die Rechnung mit Logarithmen bequeme Form zu geben.

Die erste dieser Gleichungen braucht nicht verändert zu werden. Die drei andern sind so beschaffen, dass sie den Sinus und Cosinus desselben Winkels in zweien ihrer Glieder enthalten. Dieses giebt uns ein leichtes Mittel an die Hand, diese beiden Glieder in einen Ausdruck zu vereinigen, der nur aus Factoren besteht. Es sey im Allgemeinen

$$R = P \cos. h + Q \sin. h$$

die aufgegebene Gleichung, der man eine der Rechnung bequeme Form geben soll. Man mache

$$P = M \sin. \varphi,$$

$$Q = M \cos. \varphi,$$

so hat man

$$R = M (\sin. \varphi \cos. h + \cos. \varphi \sin. h) = M \sin. (\varphi + h),$$

und da $M = \frac{P}{\sin. \varphi}$

$$R = \frac{P \sin. (\varphi + h)}{\sin. \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$

Oder man mache

$$P = M \cos. \varphi$$
$$Q = M \sin. \varphi,$$

so bekommt man

$$R = M (\cos. h \cos. \varphi + \sin. h \sin. \varphi)$$
$$= M \cos. (\varphi - h)$$
$$= \frac{P \cos. (\varphi - h)}{\cos. \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Der Hülfswinkel φ, den wir eingeführt haben, ist uns bekannt, da wir aus den obigen Annahmen tg. $\varphi = \frac{P}{Q}$ für die Gleichung (B) und tg. $\varphi = \frac{Q}{P}$ für die Gleichung (C) finden.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Gleichungen II, III und IV giebt:

$$(\mathrm{II}_a) \quad \cos. a = \frac{\cos. b \sin. (\varphi + c)}{\sin. \varphi},$$

wobei cot. φ = tg. b cos. A.

$$(\mathrm{III}_a) \quad \cot. B = -\frac{\cot. A \cos. (\varphi + c)}{\cos. \varphi}$$

wobei ebenfalls cot. φ = tg. b cos. A.

$$(\mathrm{III}_b) \quad \cot. b = \frac{\cot. a \sin. (\varphi + C)}{\sin. \varphi} \quad . \quad . \quad *)$$

wobei tg. φ = cos. a tg. B.

$$(\mathrm{IV}_a) \quad \cos. A = \frac{\cos. B \sin. (C - \varphi)}{\sin. \varphi}$$

wobei cot. φ = tg. B cos. a.

Die Formeln II. und III. können noch auf eine andere Art umgeändert werden, wenn man aus der ersten den Winkel A, und aus der zweiten die Seite a finden will.

---

*) Diese Formel ist aus der Formel III. gefunden, nachdem man in derselben A für C, a für c, und umgekehrt, substituirt hat.

Aus der Formel II. haben wir:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

oder

$$1 + \cos. A = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. a - \cos. (b + c)}{\sin. b \sin. c}$$

oder auch

$$1 - \cos. A = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. (b - c) - \cos. a}{\sin. b \sin. c}$$

Man sieht aber aus der Tafel I., am Ende dieses Bandes, dass

$$\cos. A - \cos. B = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(A + B) \sin. \tfrac{1}{2}(B - A)$$

also

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a + b - c) \sin. \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin. b \sin. c}}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a + b + c) \sin. \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin. b \sin. c}}$$

$$\text{tg}. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a + b - c) \sin. \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin. \frac{1}{2}(a + b + c) \sin. \frac{1}{2}(b + c - a)}}$$

Die Umänderung der Formel IV. geschieht auf dieselbe Weise. Man findet

$$\cos. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2}(A + B - C) \cos. \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin. B \sin. C}}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos. \frac{1}{2}(A + B + C) \cos. \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin. B \sin. C}}$$

$$\text{tg}. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos. \frac{1}{2}(A + B + C) \cos. \frac{1}{2}(B + C - A)}{\cos. \frac{1}{2}(A + B - C) \cos. \frac{1}{2}(A - B + C)}}$$

Hier sind alle zur Auflösung der sphärischen Dreiecke nothwendige Formeln, in einer Tabelle zusammen gestellt:

Es wird gegeben	Man sucht	Formeln.
a, b, c	A	$\sin. \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a+b-c) \sin. \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. b \sin. c}}$ $\cos. \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a+b+c) \sin. \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b \sin. c}}$
A, b, c	a, B	$\cos. a = \frac{\cos. b \sin. (\varphi + c)}{\sin. \varphi}$ worin $\cot. \varphi = \tang. b \cos. A$ $\cot. B = -\frac{\cot. A \cdot \cos. (\varphi + c)}{\cos. \varphi}$ worin $\cot. \varphi = \tang. b \cos. A$
a, b, A	B, c, C	$\sin. B = \frac{\sin. A \sin. b}{\sin. a}$ $\sin. (\varphi + c) = \frac{\cos. a}{\cos. b} \sin. \varphi$ worin $\cot. \varphi = \tang. b \cos. A$ $\sin. (\varphi + C) = \cot. a \sin. \varphi \tang. b$ worin $\tang. \varphi = \cos. b \tang. A$
B, C, c	A, a, b	$\sin. b = \frac{\sin. B \sin. c}{\sin. C}$ $\cos. (\varphi + a) = -\cot. C \cos. \varphi \tang. B$ worin $\cot. \varphi = \tang. c \cos. B$ $\sin. (A - \varphi) = \frac{\cos. C \sin. \varphi}{\cos. B}$ worin $\cot. \varphi = \tang. B \cos. c$
B, C, a	A, b	$\cos. A = \frac{\cos. B \sin. (C - \varphi)}{\sin. \varphi}$ worin $\cot. \varphi = \tang. B \cos. a$ $\cot. b = \frac{\cot. a \sin. (\varphi + C)}{\sin. \varphi}$ worin $\tang. \varphi = \cos. a \tang. B$

Es wird gegeben	Man sucht	Formeln.
A, B, C	a	$\sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin. B \sin. C}}$
		$\cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. B \sin. C}}$

10. Aus den vier Grundformeln entwickelt man leicht die Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den Stücken eines rechtwinklichten sphärischen Dreiecks ausdrücken. Siehe Fig. 7.

1) $\cos. h = \cos. f \cos. g.$

2) $\cos. h \operatorname{tg}. F \operatorname{tg}. G = 1.$

3) $\sin. h \sin. F = \sin f.$

3$_a$) $\sin. h \sin. G = \sin. g.$

4) $\operatorname{tg}. h \cos. F = \operatorname{tg}. g.$

4$_a$) $\operatorname{tg}. h \cos. G = \operatorname{tg}. f.$

5) $\operatorname{tg}. F \sin. g = \operatorname{tg}. f.$

5$_a$) $\operatorname{tg}. G \sin. f = \operatorname{tg}. g.$

6) $\sin. F \cos. g = \cos. G.$

6$_a$) $\sin. G \cos. f = \cos. F.$

11. Für die sphärischen Dreiecke, bei denen eine Seite $= 90°$ ist, finden wir folgende Formeln. Siehe Fig. 8.

1) $\cos. g = \sin. f \cos. G.$

1$_a$) $\cos. f = \sin. g \cos. F.$

2) $\cot. f = \cot. F \sin. G.$

2$_a$) $\cot. g = \cot. G \sin. F.$

3) $\cos. H = -\cot. g \cot. f.$

4) $\sin. G = \sin. g \sin. H.$

$4_a)$ sin. F = sin. f sin. H.

5) cot. H = — cot. G cos. f.

$5_a)$ cot. H = — cot. F cos. g.

6) cos. H = — cos. G cos. F.

12. Gauss hat uns in seiner Theoria motus corporum coelestium vier Formeln zur sphärischen Trigonometrie gegeben, die in vielen Fällen ausserordentlich bequem sind. Diese Formeln finden sich in dem eben angeführten Werke ohne Beweis; ich gebe ihn hier, wie Gauss ihn in seinen Vorlesungen über sphärische Astronomie giebt.

Es sey der Einfachheit wegen:

p = cos. $\frac{1}{2}a$ sin. $\frac{1}{2}(B+C)$.

q = sin. $\frac{1}{2}a$ sin. $\frac{1}{2}(B-C)$.

r = cos. $\frac{1}{2}a$ cos. $\frac{1}{2}(B+C)$.

s = sin. $\frac{1}{2}a$ cos. $\frac{1}{2}(B-C)$.

P = cos. $\frac{1}{2}A$ cos. $\frac{1}{2}(b-c)$.

Q = cos. $\frac{1}{2}A$ sin. $\frac{1}{2}(b-c)$.

R = sin. $\frac{1}{2}A$ cos. $\frac{1}{2}(b+c)$.

S = sin. $\frac{1}{2}A$ sin. $\frac{1}{2}(b+c)$.

Wir haben jetzt nach der ersten Grundformel

$$\left.\begin{array}{l}\text{sin. } a \text{ sin. } B = \text{sin. } A \text{ sin. } b \\ \text{sin. } a \text{ sin. } C = \text{sin. } A \text{ sin. } c\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (A).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen zusammen, so hat man:

$$\text{sin. } a\,(\text{sin. } B + \text{sin. } C) = \text{sin. } A\,(\text{sin. } b + \text{sin. } c);$$

oder da

$$\text{sin. } B + \text{sin. } C = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2}(B + C) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(B - C)$$

und

$$\text{sin. } A = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2}A \text{ cos. } \tfrac{1}{2}A:$$

$$\text{sin. } {}_2a \text{ cos. } \tfrac{1}{2}a \text{ sin. } \tfrac{1}{2}(B+C) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{sin. } \tfrac{1}{2}A \text{ cos. } \tfrac{1}{2}A \text{ sin. } \tfrac{1}{2}(b+c) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(b-c)$$

oder

$$ps = PS \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(I)}.$$

Zieht man die Gleichungen (A) von einander ab, so findet man, wenn man zugleich $2 \text{ sin. } \frac{1}{2}(B - C) \text{ cos. } \frac{1}{2}(B + C)$ für $\text{sin. } B - \text{sin. } C$ und $2 \text{ sin. } \frac{1}{2}A \text{ cos. } \frac{1}{2}A$ für $\text{sin. } A$ setzt:

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}a \text{ cos. } \tfrac{1}{2}a \text{ sin. } \tfrac{1}{2}(B-C) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(B+C) = \text{sin. } \tfrac{1}{2}A \text{ cos. } \tfrac{1}{2}A \text{ sin. } \tfrac{1}{2}(b-c) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(b+c)$$

oder

$$rq = RQ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(II)}.$$

Wir haben im Vorhergehenden (s. die Nummer 8.) folgende Gleichung gefunden, die wir mit (D) bezeichnet haben:

$$\text{sin. } a \text{ cos. } B = \text{cos. } b \text{ sin. } c - \text{sin. } b \text{ cos. } c \text{ cos. } A \quad \cdot \quad \cdot \quad (D).$$

Wenn man in dieser Gleichung C für B und c für b, und umgekehrt, substituirt, so bekommt man:

$$\text{sin. } a \text{ cos. } C = \text{cos. } c \text{ sin. } b - \text{sin. } c \text{ cos. } b \text{ cos. } A \quad \cdot \quad \cdot \quad (E).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen zusammen, so findet man:

$$\text{sin. } a(\text{cos. } B + \text{cos. } C) = \text{cos. } b \text{ sin. } c + \text{cos. } c \text{ sin. } b - \text{cos. } A(\text{sin. } b \text{ cos. } c + \text{cos. } b \text{ sin. } c)$$
$$= (1 - \text{cos. } A) \text{ sin. } (b+c);$$

oder indem man $2 \text{ cos. } \frac{1}{2}(B + C) \text{ cos. } \frac{1}{2}(B - C)$ für $\text{cos. } B + \text{cos. } C$, und $2 \text{ sin. }^2 \frac{1}{2}A$ für $1 - \text{cos. } A$ setzt:

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}a \text{ cos. } \tfrac{1}{2}a \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(B+C) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{sin. } \tfrac{1}{2}(b+c) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(b+c) \text{ sin. }^2 \tfrac{1}{2}A$$

oder

$$rs = RS \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

Zieht man die Gleichungen (C) und (D) von einander ab, so findet man:

$$\sin. a\,(\cos. C - \cos. B) = \cos. c \sin. b - \cos. b \sin. c - (\cos. b \sin. c - \cos. c \sin. b)\cos. A$$
$$= (1 + \cos. A)\sin. (b - c)$$

oder, wenn man $2 \sin. \frac{1}{2}(B - C) \sin. \frac{1}{2}(B + C)$ für $\cos. C - \cos. B$, und $2 \cos.^2 \frac{1}{2} A$ für $1 + \cos. A$ setzt:

$$\sin. \tfrac{1}{2}a \cos. \tfrac{1}{2}a \sin. \tfrac{1}{2}(B - C) \sin. \tfrac{1}{2}(B + C) = \cos.^2 \tfrac{1}{2} A \sin. \tfrac{1}{2}(b - c) \cos. \tfrac{1}{2}(b - c)$$

oder

$$pq = PQ \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Die Gleichung (A) in der 8. Nummer giebt von sich selbst, wenn man c in b und C in B und umgekehrt verwandelt, folgende zwei Gleichungen:

$$\sin. A \cos. b = \cos. B \sin. C + \sin. B \cos. C \cos. a$$
$$\sin. A \cos. c = \cos. C \sin. B + \sin. C \cos. \mathrm{B} \cos. a$$

welche zusammenaddirt, folgende Gleichung geben:

$$\sin. A\,(\cos. b + \cos. c) = \cos. B \sin. C + \cos. C \sin. B + \cos. a\,(\sin. B \cos. C + \sin. C \cos. B)$$
$$= (1 + \cos. a)\sin. (B + C).$$

Substituirt man in dieser Gleichung $2 \cos. \frac{1}{2}(b + c) \cos. \frac{1}{2}(b - c)$ für $\cos. b + \cos. c$, so findet man:

$$\sin. \tfrac{1}{2} A \cos. \tfrac{3}{2} A \cos. \tfrac{1}{2}(b + c) \cos. \tfrac{1}{2}(b - c) = \cos.^2 \tfrac{1}{2} a \sin. \tfrac{1}{2}(B + C) \cos. \tfrac{1}{2}(B + C)$$

oder

$$pr = PR \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}.$$

Zieht man die obigen Gleichungen von einander ab, so hat man:

$$\sin. A\,(\cos. c - \cos. b) = \cos. C \sin. B - \cos. B \sin. C + (\sin. C \cos. B - \sin. B \cos. C)\cos. a$$
$$= (1 + \cos. a)\sin. (B - C).$$

Setzt man in diese Gleichung $2 \sin. \frac{1}{2}(b-c) \sin. \frac{1}{2}(b+c)$ für $\cos. c - \cos. b$ so bekommt man:

$$\sin. \tfrac{1}{2}A \cos. \tfrac{1}{2}A \sin. \tfrac{1}{2}(b-c) \sin. \tfrac{1}{2}(b+c) = \sin.^2 \tfrac{1}{2}a \sin. \tfrac{1}{2}(B-C) \cos. \tfrac{1}{2}(B-C)$$

oder

$$qs = QS \quad \ldots \quad \text{(VI)}.$$

Diese sechs Gleichungen, nämlich:

$$\text{(I)} \; ps = PS$$
$$\text{(II)} \; rq = RQ$$
$$\text{(III)} \; rs = RS$$
$$\text{(IV)} \; pq = PQ$$
$$\text{(V)} \; pr = PR$$
$$\text{(VI)} \; qs = QS$$

geben:

$$ppqs = PPQS$$
$$qqpr = QQPR$$
$$rrqs = RRQS$$
$$sspr = SSPR$$

und

$$P^2 = p^2$$
$$Q^2 = q^2$$
$$R^2 = r^2$$
$$S^2 = s^2$$

folglich:

$$P = \mp p$$
$$Q = \mp q$$
$$R = \mp r$$
$$S = \mp s.$$

Da die Winkel der sphärischen Dreiecke, mit denen wir in der Krystallographie zu thun haben, immer kleiner als 180° sind, so sind für uns P, Q, R, S immer positiv.

Hier sind also die vier Gaussischen Formeln zusammengestellt:

1) $\cos.\ \frac{1}{2}a\ \sin.\ \frac{1}{2}(B+C) = \cos.\ \frac{1}{2}A\ \cos.\ \frac{1}{2}(b-c)$

2) $\sin.\ \frac{1}{2}a\ \sin.\ \frac{1}{2}(B-C) = \cos.\ \frac{1}{2}A\ \sin.\ \frac{1}{2}(b-c)$

3) $\cos.\ \frac{1}{2}a\ \cos.\ \frac{1}{2}(B+C) = \sin.\ \frac{1}{2}A\ \cos.\ \frac{1}{2}(b+c)$

4) $\sin.\ \frac{1}{2}a\ \cos.\ \frac{1}{2}(B-C) = \sin.\ \frac{1}{2}A\ \sin.\ \frac{1}{2}(b+c)$.

Diese Formeln können mit grossem Vortheil in allen den Fällen gebraucht werden, wo ein Winkel und die einschliessenden Seiten oder eine Seite und die einschliessenden Winkel bekannt sind, und man alle übrigen Stücke wissen will. Man wendet sie in folgender Gestalt an:

a) Wenn eine Seite und die einschliessenden Winkel bekannt sind:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(B-C)}{\sin.\ \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\ \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}A = \sin.\ \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(B+C)}{\sin.\ \frac{1}{2}(b-c)}$$

b) Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \cot.\ \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(b-c)}{\sin.\ \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B+C) = \cot.\ \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(b-c)}{\cos.\ \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}a = \cos.\ \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(b-c)}{\sin.\ \frac{1}{2}(B-C)}.$$

13. Es sey E der Inhalt des sphärischen Dreiecks ABC Fig. 9, die Oberfläche des ganzen Kegel gleich 360° gesetzt, so ist dieser leicht auf folgende Art zu finden.

Man denke sich alle drei Seiten a, b, c des Dreiecks über die ganze Kugel hin verlängert, so dass drei grösste Kreise gebildet werden, deren Ebenen sich unter den Winkeln des Dreiecks A, B, C schneiden. Es ist klar, dass das Stück Kugelfläche, das zwischen je zwei dieser Ebenen enthalten ist, sich zur ganzen Oberfläche der Kugel verhält, wie die Winkel, die die zwei Ebenen machen, zu 360°; und da wir die ganze Kugeloberfläche gleich 360° gesetzt haben, so ist offenbar das Stück Kugelfläche zwischen den verlängerten Seiten a und b gleich C, das Stück zwischen a und c gleich B und das Stück zwischen b und c gleich A.

Von den verlängerten Seiten des Dreiecks wird offenbar auf der entgegengesetzten Seite der Kugel ein ganz gleiches und ähnliches Dreieck gebildet, als dieses; den Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke bezeichnen wir mit E. Man sieht nun leicht ein, dass die ganze Oberfläche der Kugel zusammengesetzt ist:

1) Aus den beiden Stücken Kugelfläche, welche zwischen den aus der Verlängerung der Seiten b und c entstehenden grössten Kreisen, die sich in zwei Polen schneiden, enthalten sind, und deren beider Inhalt zusammen gleich $2A$ ist.

2) Aus den beiden Stücken Kugelfläche, welche zwischen den aus der Verlängerung der Seiten a und c entstehenden grössten Kreisen enthalten sind, und deren beider Inhalt zusammen gleich $2B$ ist, weniger den Inhalten der beiden gleichen und ähnlichen sphärischen Dreiecke, die man sich von dem Durchschnitt der grössten Kreise auf beiden entgegengesetzten Seiten der Kugel gebildet denkt, und deren Inhalt zusammen $2E$ beträgt.

3) Aus den beiden Stücken Kugelfläche, welche zwischen den aus der Verlängerung der Seiten a und b entstehenden grössten Kreisen enthalten sind, und deren beider Inhalt zusammen gleich $2C$ ist, weniger dem Inhalt der beiden sphärischen Dreiecke, die für beide $2E$ beträgt.

Da wir nun die ganze Oberfläche der Kugel gleich 360° gesetzt haben, so bekommen wir folgende Gleichung:

$$360° = 2A + 2B - 2E + 2C - 2E$$

oder

$$E = \tfrac{1}{2}(A + B + C - 180°).$$

Will man die Oberfläche der Kugel gleich der Einheit setzen, so dividirt man das 2te Glied dieser Gleichung durch 360°.

II. ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENEN.

Da die Krystalle von Ebenen begrenzt sind, so ist klar, dass die Geometrie der Ebenen von Wichtigkeit für die Krystallonomie seyn muss. In der That, alle Formeln der sphärischen Trigonometrie, die man jeden Augenblick braucht, lassen sich aus den Grundsätzen der analytischen Geometrie der Ebenen entwickeln. Es wird deshalb gut seyn, uns in der Einleitung zur Krystallonomie mit der Theorie der Ebenen bekannt zu machen.

Wir besitzen eine grosse Anzahl von Werken, die von diesem Gegenstand handeln; aber überall hat man vorausgesetzt, dass die Coordinaten-Ebenen sich unter rechten Winkeln schneiden. Da diese Annahme in den Aufgaben der Krystallonomie nicht immer zulässig ist, so werden wir hier keine solche Voraussetzung machen.

14. Es seyen also λ, μ, ν die Winkel der Coordinaten, das heisst λ der Winkel der Axe des x und der Axe des y, μ der Winkel der Axe der x und der Axe der z, und ν der Winkel der Axe der y und der Axe der z. Die allgemeine Gleichung der Ebene, die sich auf diese Coordinaten bezieht, sey:

$$Ax + By + Cz + D = o.$$

Eine genaue Analyse dieser Gleichung wird uns alle Eigenschaften der Ebene kennen lehren, welche der Gegenstand der nachstehenden Aufgaben seyn kann.

1^b. Aufgabe. Man finde den Durchschnitt zweier Ebenen, deren Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$

sind.

Auflösung. Es seyen x', y', z' die Coordinaten eines Punctes im Durchschnitt der beiden Ebenen. Es ist klar, dass diese Coordinaten beiden Gleichungen Genüge leisten müssen; man hat also:

$$Ax' + By' + Cz' + D = o$$
$$A_{(1)}x' + B_{(1)}y' + C_{(1)}z' + D_{(1)} = o.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen x', y' und z' nacheinander, so findet man folgende drei neue Gleichungen:

$$(A_{(1)}B - AB_{(1)})\,y' + (A_{(1)}C - AC_{(1)})\,z' + A_{(1)}D - AD_{(1)} = o$$
$$(A_{(1)}B - AB_{(1)})\,x' + (BC_{(1)} - B_{(1)}C)\,z' + BD_{(1)} - B_{(1)}D = o$$
$$(C_{(1)}A - CA_{(1)})\,x' + (C_{(1)}B - CB_{(1)})\,z' + C_{(1)}D - CD_{(1)} = o;$$

von denen die beiden ersten hinreichen, die Lage des Durchschnitts der beiden gegebenen Ebenen zu bestimmen.

Es ist klar, dass dieser Durchschnitt eine grade Linie ist; wir wollen ihren Gleichungen folgenden Ausdruck geben, welches zugleich die allgemeine Form der Gleichungen einer graden Linie ist:

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$
$$-bx + ay + \gamma = o;$$

indem wir

$$\begin{aligned} A_{(1)}B - AB_{(1)} &= c \\ A_{(1)}C - AC_{(1)} &= b \\ BC_{(1)} - B_{(1)}C &= a \\ BD_{(1)} - B_{(1)}D &= \alpha \\ A_{(1)}D - AD_{(1)} &= \beta \\ C_{(1)}D - CD_{(1)} &= \frac{a\beta - b\alpha}{c} = \gamma \end{aligned} \quad (4)$$

setzen.

Von diesen Gleichungen sind zwei hinreichend, um die Lage der graden Linie zu bekommen, da man die Coefficienten der dritten Gleichung aus den beiden andern bestimmen kann.

2°. Aufgabe. Man finde den Durchschnitt dreier Ebenen, deren Gleichungen folgende sind:

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$
$$A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} = o.$$

Auflösung. Man sucht erst die Durchschnittslinie der ersten und zweiten Ebene; es seyen

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$

die Gleichungen dieser Durchschnittslinie, wie im Vorhergehenden. Die Werthe von a, b, c, α, β sind durch die Formeln (4) gegeben. Man findet

auf gleiche Weise die Gleichungen der Durchschnittslinie der ersten und dritten Ebene

$$c'x + a'z + \alpha' = o$$
$$c'y + b'z + \beta' = o$$

deren Coefficienten a', b', c', α', β' ebenfalls durch die Formeln (4) gegeben sind, wenn man in denselben den Exponenten (1) in (2) verwandelt. Jetzt, um den Durchschnitt dieser beiden graden Linien zu finden, substituiren wir die Coordinaten x', y', z' dieses Durchschnittspunctes, welche beiden Gleichungen Genüge leisten müssen, in allen vier Gleichungen für die Veränderlichen x, y, z; und wir haben:

$$\begin{aligned} cx' + az' + \alpha &= o \\ cy' + bz' + \beta &= o \\ c'x' + a'z' + \alpha' &= o \\ c'y' + b'z' + \beta' &= o \end{aligned} \quad \ldots \quad (a)$$

Eine leichte Elimination giebt uns folgende Werthe der Coordinaten x', y', z' des Durchschnittspunctes der beiden Linien, oder, was dasselbe ist, des Durchschnittspunctes der drei Ebenen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{aa' - a'\alpha}{a'c - ac'} \\ y' &= \frac{b\beta' - b'\beta}{b'c - bc'} \quad \ldots \quad (5) \\ z' &= \frac{a'c - ac'}{ac' - a'c} = \frac{\beta'c - \beta c'}{bc' - b'c} \end{aligned}$$

Es ist eben so leicht, die Bedingungen zu finden, unter welchen sich n Ebenen in demselben Puncte schneiden.

Es seyen:

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$
$$A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} = o$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{(n-1)}x + B_{(n-1)}y + C_{(n-1)}z + D_{(n-1)} = o$$

die Gleichungen dieser n Ebenen. Man sucht erst die Coordinaten x', y', z' des Durchschnittspunctes der drei ersten Ebenen, und da dieser Punct sich in allen andern Ebenen finden muss, so müssen seine Coordinaten allen andern Gleichungen Genüge leisten; es muss also im Allgemeinen, damit der Durchschnitt dieser n Ebenen in demselben Puncte statt finden könne, die Gleichung der $(i+1)$ten Ebene folgende Form annehmen können:

$$A_{(i)}x' + B_{(i)}y' + C_{(i)}z' + D_{(i)} = o;$$

welches die Bedingungsgleichung ist, unter welcher die Ebene, deren Gleichung

$$A_{(i)}x + B_{(i)}y + C_{(i)}z + D_{(i)} = o$$

ist, durch denselben Punct geht, als die drei ersten Ebenen, nämlich durch den Punct, dessen Coordinaten x', y', z' sind.

Setzt man die Coordinaten des Durchschnittspunctes x', y', z' der Linien, welche aus dem Durchschnitt der Ebenen entstehen, unendlich, so hat man ein System von Ebenen, die sich in mehreren Linien schneiden, welche parallel untereinander sind. In diesem Fall bekommen die Formeln (5) folgende Form:

$$a'c - ac' = o \text{ und } b'c - bc' = o$$
$$a''c - ac'' = o \text{ und } b''c - bc'' = o$$
$$a'''c - ac''' = o \text{ und } b'''c - bc''' = o$$

u. s. w.

Die Werthe von a und b sind durch die Formeln (4) gegeben; a' und b' bedeuten, was a und b wird, wenn man in ihren Ausdrücken den Exponenten (1) in (2) verwandelt; a'' und b'' bezeichnen, was aus a und b wird, wenn man in ihren Ausdrücken den Exponenten (1) in (3) verwandelt und so fort.

Es ist klar, dass die vorhergehenden Gleichungen, welche sich auf die Durchschnittslinien mehrerer Ebenen beziehen, im Allgemeinen auf alle grade Linien anwendbar sind, weil man jede grade Linie als den Durchschnitt zweier Ebenen ansehen kann. Die Gleichungen (5) sind also eben so gut die Bedingungsgleichungen, unter welchen sich zwei grade Linien, deren Gleichungen in (*a*) gegeben sind, in einem Punct schneiden, dessen Coordinaten x', y', z' sind. Die Gleichungen (6) geben uns den Zusammenhang, der zwischen den Coefficienten der Gleichungen mehrerer graden Linien statt findet, welche untereinander parallel sind.

3°. Aufgabe. Die Bedingungsgleichungen zu finden, unter welchen sich n Ebenen in derselben Linie schneiden.

Auflösung. Es seyen:

$$\begin{aligned}
Ax + By + Cz + D &= o \\
A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} &= o \\
A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} &= o \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{(n-1)}x + B_{(n-1)}y + C_{(n-1)}z + D_{(n-1)} &= o
\end{aligned}$$

die Gleichungen dieser n Ebenen. Wir haben im Vorhergehenden die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen gefunden; sie sind:

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o;$$

wir fanden ebenfalls, dass die Gleichungen der Durchschnittslinie der ersten und dritten Ebene folgende sind:

$$c'x + a'z + \alpha' = o$$
$$c'y + b'z + \beta' = o:$$

die Werthe von a, b, c, α, β sind durch die Formeln (4) gegeben; a', b', c', α', β' bezeichnen, was aus a, b, c, α, β wird, wenn man in ihren Ausdrücken den Exponenten (1) in (2) verwandelt.

Man findet auf dieselbe Weise die Gleichungen der Durchschnittslinie der ersten Ebene mit der vierten:

$$c''x + a''z + \alpha'' = o$$
$$c''y + b''z + \beta'' = o$$

indem man mit a'', b'', c'', α'', β'' die Werthe von a, b, c, α, β bezeichnet, nachdem man in ihren Ausdrücken den Exponenten (1) in (3) verwandelt hat.

So werden wir nach und nach die Gleichungen der $n-1$ Durchschnittslinien der n Ebenen finden; und da wir annehmen, dass alle Ebenen sich in einer Linie schneiden, so haben wir offenbar:

$$a = a', \quad a = a'', \quad a = a''', \quad a = a'''' \text{ etc.}$$
$$b = b', \quad b = b'', \quad b = b''', \quad b = b'''' \text{ etc.}$$
$$c = c', \quad c = c'', \quad c = c''', \quad c = c'''' \text{ etc.}$$
$$\alpha = \alpha', \quad \alpha = \alpha'', \quad \alpha = \alpha''', \quad \alpha = \alpha'''' \text{ etc.}$$
$$\beta = \beta', \quad \beta = \beta'', \quad \beta = \beta''', \quad \beta = \beta'''' \text{ etc.}$$

indem man mit a' bezeichnet, was aus a wird, wenn man in dem Ausdruck desselben, der in den Formeln (4) gegeben ist, den Exponenten (1) in (2)

verwandelt: mit a'', was aus a wird, wenn man in dem Ausdruck von a den Exponenten (1) in (3) verwandelt; mit a''', was aus a wird, wenn man in dem Ausdruck desselben den Exponenten (1) in (4) verwandelt, und so fort.

Macht man den Durchschnitt der n Ebenen unmöglich, so hat man die Bedingungen, unter welchen die n Ebenen untereinander parallel sind. Um diess hervorzubringen, braucht man nur a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', etc. gleich Null zu machen, oder, was dasselbe ist:

$$A_{(1)}B - AB_{(1)} = o, \quad A_{(1)}C - AC_{(1)} = o, \quad BC_{(1)} - B_{(1)}C = o;$$
$$A_{(2)}B - AB_{(2)} = o, \quad A_{(2)}C - AC_{(2)} = o, \quad BC_{(2)} - B_{(2)}C = o;$$
$$A_{(3)}B - AB_{(3)} = o, \quad A_{(3)}C - AC_{(3)} = o, \quad BC_{(3)} - B_{(3)}C = o;$$

u. s. w.

Diess sind die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt seyn müssen, damit sich n Ebenen parallel seyn können.

4° Aufgabe. Man finde die Entfernung D zwischen zwei Puncten im Raum, deren Coordinaten x', y', z' und x'', y'', z'' sind.

Auflösung. Wenn man durch die Coordinaten des ersten Punctes drei Ebenen legt, die parallel mit den Coordinatenebenen sind, so wird ein Parallelepiped gebildet, dessen ebene Winkel λ, μ, ν und dessen Seitenlinien gleich x', y', z' sind, und dessen Diogonale der Entfernung des Punctes vom Anfangspunct der Coordinaten gleich seyn wird. Dasselbe gilt von den Coordinaten x'', y'', z'' des andern Punctes: Ebenen, die man durch dieselben parallel mit den Coordinatenebenen legt, bilden mit den Coordinatenebenen ein ähnliches Parallepiped, dessen ebene Winkel gleich λ, μ, ν, dessen Seitenlinien gleich x'', y'', z'' sind und dessen Diagonale

gleich ist der Entfernung des Punctes vom Anfangspuncte der Coordinaten. Es ist ferner klar, dass man die Entfernung der beiden Puncte als die Diagonale eines Parallelepipeds von denselben Winkeln ansehen kann, dessen Seitenlinien gleich $x' - x''$, $y' - y''$, und $z' - z''$ sind. Es gilt also diese Diagonale zu finden.

Man kann diese Diagonale direct berechnen; einfacher, wenn auch nicht schärfer, ist folgende Methode, sie zu finden. Man sucht erst die Diagonalen der Seitenflächen des Parallelepipeds, deren Quadrate gleich sind:

$$a^2 + b^2 + 2ab \cos. \lambda$$
$$a^2 + c^2 + 2ac \cos. \mu$$
$$b^2 + c^2 + 2bc \cos. \nu;$$

indem man $x' - x'' = a$, $y' - y'' = b$, $z' - z'' = c$ setzt.

Jetzt ist es klar, dass man das Quadrat der Diagonale des Parallepipeds findet, wenn man zum Quadrat eines der drei Diagonalen der Seitenflächen desselben hinzufügt:

1° das Quadrat der dritten Seitenlinie des Parallelepipeds, welche nicht in dem Ausdruck der gewählten Diagonale der Seitenfläche vorkommt;

2° eine Grösse, k, k' oder k'', die uns unbekannt ist, weil wir den Winkel zwischen jener dritten Seitenlinie des Parallelepipeds und der gewählten Diagonale seiner Seitenfläche nicht kennen.

Man hat also, je nachdem man die erste, zweite oder dritte Diagonale wählt, folgende drei Ausdrücke für das Quadrat der gesuchten Diagonale des Parallelepipeds:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos. \lambda + k$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ac \cos. \mu + k'$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos. \nu + k''.$$

Da diese drei Ausdrücke unter einander gleich sind, so ist klar, dass der Ausdruck von k, $2ac \cos. \mu$ und $2bc \cos. \nu$ enthalten muss; der Ausdruck von k' muss $2ab \cos. \lambda$ und $2bc \cos. \nu$ enthalten, und der Ausdruck von k'' muss $2ab \cos. \lambda$ und $2ac \cos. \mu$ enthalten.

Nun aber, wenn $\lambda = \mu = \nu = 90^\circ$; oder $\cos. \lambda = \cos. \mu = \cos. \nu = o$ ist, so ist das Quadrat der gesuchten Diagonale des Parallelepipeds gleich $a^2 + b^2 + c^2$: in diesem Fall ist also $k = k' = k'' = o$. Wenn hingegen $\lambda = \mu = \nu = o$ oder $\cos. \lambda = \cos. \mu = \cos. \nu = 1$ ist, so ist offenbar das Quadrat der Diagonale des Parallelepipeds gleich $(a+b+c)^2$ oder gleich $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; also:

$$k = 2ac + 2bc$$
$$k' = 2ab + 2bc$$
$$k'' = 2ab + 2ac.$$

Hieraus kann man schliessen, dass diese drei unbekannten Grössen im Allgemeinen keine andere Bedeutung haben können, als folgende:

$$k = 2ac \cos. \mu + 2bc \cos. \nu$$
$$k' = 2ab \cos. \lambda + 2bc \cos. \nu$$
$$k'' = 2ab \cos. \lambda + 2ac \cos. \mu.$$

Bezeichnet man also mit D die Diagonale eines Parallelepipeds, dessen Seitenlinien gleich a, b, c, und dessen Winkel gleich λ, μ, ν sind, dass heisst, wo der Winkel zwischen a und b gleich λ, der Winkel zwischen

a und c gleich μ und der Winkel zwischen b und c gleich ν ist, so haben wir

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos. \lambda + 2ac \cos. \mu + 2bc \cos. \nu.$$

Die Entfernung zwischen zwei Puncten, deren Coordinaten x', y', z' und x'', y'', z'' sind, ist also

$$\sqrt{[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'') \cos. \lambda + 2(x' - x'')(z' - z'') \cos. \mu + 2(y' - y'')(z' - z'') \cos. \nu]}.$$

Macht man $x'' = y'' = z'' = 0$, so findet man die Entfernung eines Punctes, dessen Coordinaten x', y', z' sind, vom Anfangspunct der Coordinaten:

$$\sqrt{[x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos. \lambda + 2x'z' \cos. \mu + 2y'z' \cos. \nu]}.$$

5°. **Aufgabe.** Man finde den Winkel zwischen zwei graden Linien, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} cx + az + \alpha &= o \\ cy + bz + \beta &= o \\ c'x + a'z + \alpha' &= o \\ c'y + b'z + \beta' &= o \end{aligned}$$

sind.

Auflösung. Wir wollen mit x', y', z' die Coordinaten des Durchschnittpunctes der beiden Linien bezeichnen, so haben wir aus dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} x' &= \frac{aa' - a'a}{a'c - ac'} \\ y' &= \frac{b\beta' - b'\beta}{b'c - bc'} \quad \cdots\cdots\cdots (1) \\ z' &= \frac{a'c - ac'}{ac' - a'c} = \frac{\beta'c - \beta c'}{bc' - b'c}. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt zwei Puncte auf den beiden Linien annehmen, deren Coordinaten x'', y'', z'' und x''', y''', z''' sind, und welche gleich weit von

dem Durchschnitt der beiden Linien entfernt sind. Die Entfernung dieser Puncte vom Durchschnittspunct der Ebenen sey = 1. Wir werden haben:

1°. Da sich die beiden Puncte auf den beiden Linien befinden:

$$\left.\begin{aligned} cx'' + az'' + \alpha &= o \\ cy'' + bz'' + \beta &= o \\ c'x''' + a'z''' + \alpha' &= o \\ c'y''' + b'z''' + \beta' &= o ; \end{aligned}\right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

hieraus und aus den Gleichungen (1) findet man:

$$x'' - x''' = \frac{ac'(z' - z'') - a'c(z' - z''')}{cc'}$$

$$y'' - y''' = \frac{bc'(z' - z'') - b'c(z' - z''')}{cc'}.$$

2°. Da ihre Entfernung vom Durchschnittspuncte der beiden Linien = 1 ist:

$$\left.\begin{aligned} 1 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos.\lambda \\ + 2(x' - x'')(z' - z'')\cos.\mu + 2(y' - y'')(z' - z'')\cos.\nu \\ 1 = (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2 + 2(x' - x''')(y' - y''')\cos.\lambda \\ + 2(x' - x''')(z' - z''')\cos.\mu + 2(y' - y''')(z' - z''')\cos.\nu \end{aligned}\right\} (3)$$

3°. Wenn man p die Entfernung der beiden Puncte nennt, deren Coordinaten x'', y'', z'' und x''', y''', z''' sind:

$$\left.\begin{aligned} p^2 = (x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2 + 2(x'' - x''')(y'' - y''')\cos.\lambda \\ + 2(x'' - x''')(z'' - z''')\cos.\mu + 2(y'' - y''')(z'' - z''')\cos.\nu \end{aligned}\right\} (4)$$

Jetzt, wenn man in den Gleichungen (3) für die Coordinaten x'', y'' und x''', y''' ihre durch die Gleichungen (2) gegebenen Werthe substituirt, und zu gleicher Zeit für die Coordinaten x', y', z' ihre durch die Gleichungen (1) gegebenen Werthe setzt, so findet man (man muss in dieser Rechnung nicht vergessen, dass $\frac{a'c - ac'}{ac' - a'c} = \frac{\beta'c - \beta c'}{bc' - b'c} = z'$ ist):

$$1 = \frac{1}{c^2}(z' - z'')^2\,[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos.\lambda - 2ac\cos.\mu - 2bc\cos.\nu]$$

und

$$1 = \frac{1}{c'^2}(z' - z''')^2\,[a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2a'b'\cos.\lambda - 2a'c'\cos.\mu - 2b'c'\cos.\nu]$$

oder, wenn man

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos.\lambda - 2ac\cos.\mu - 2bc\cos.\nu = A$$

und

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2a'b'\cos.\lambda - 2a'c'\cos.\mu - 2b'c'\cos.\nu = A'$$

setzt

$$z'' = z' - c\sqrt{\frac{1}{A}}$$
$$z''' = z' - c'\sqrt{\frac{1}{A'}}$$

folglich

$$z'' - z''' = c\sqrt{\frac{1}{A}} - c'\sqrt{\frac{1}{A'}}$$

und (siehe die Gleichung (2))

$$y'' - y''' = b\sqrt{\frac{1}{A}} - b'\sqrt{\frac{1}{A'}}$$
$$x'' - x''' = a\sqrt{\frac{1}{A}} - a'\sqrt{\frac{1}{A'}}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen (4), so findet man nach den gehörigen Reductionen:

$$p^2 = 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{A'}}(aa' + bb' + cc' + (ab' + a'b)\cos.\lambda - (ac' + a'c)\cos.\mu - (bc' + b'c)\cos.\nu)\right]$$

Da die Entfernung der beiden Puncte vom Durchschnittspuncte der beiden Linien gleich Eins ist, so ist klar, dass $\frac{p^2}{4}$ gleich ist dem Quadrate des Sinus der Hälfte des Winkels, den die beiden graden Linien mit einander machen, oder wenn wir diesen Winkel mit V bezeichnen;

$$\frac{p^2}{4} = \text{sin.}^2\tfrac{1}{2}V$$

und da

$$\cos. V = 1 - 2\,\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}V$$

$$(5)\cos.V=\frac{aa'+bb'+cc'+(a'b+ab')\cos.\lambda-(a'c+ac')\cos.\mu-(bc'+b'c)\cos.\nu}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+2ab\cos.\lambda-2ac\cos.\mu-2bc\cos.\nu)}\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2+2a'b'\cos.\lambda-2a'c'\cos.\mu-2b'c'\cos.\nu)}}$$

Macht man in diesem Ausdruck $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, so hat man $\cos.V=1$ oder $V=o$; das sind also die Bedingungen, unter welchen zwei Linien einander parallel sind.

Die beiden Linien machen einen rechten Winkel miteinander, wenn $aa'+bb'+cc'+(a'b+ab')\cos.\lambda-(a'c+ac')\cos.\mu-(b'c+bc')\cos.\nu=o$; alsdann ist $\cos.V=o$ und $V=90°$. Das ist die Bedingungsgleichung, welche erfüllt seyn muss, wenn zwei grade Linien senkrecht aufeinander seyn sollen.

6°. Aufgabe. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punct auf einer gegebenen Linie, senkrecht auf diese letztere, gelegt ist.

Auflösung. Es seyen

$$\left.\begin{aligned} cx+az+\alpha&=o\\ cy+bz+\beta&=o\end{aligned}\right\}\quad\cdot\quad\cdot\quad(1)$$

die Gleichungen der gegebenen graden Linie.

Es seyen überdiess

$$\left.\begin{aligned} c'x+a'z+\alpha'&=o\\ c'y+b'z+\beta'&=o\end{aligned}\right\}\quad\cdot\quad\cdot\quad(2)$$

die Gleichungen einer anderen Linie, welche senkrecht auf die gegebene ist. Es folgt aus der vorhergehenden Nummer, dass

$$aa'+bb'+cc'+(a'b+ab')\cos.\lambda-(a'c+ac')\cos.\mu-(bc'+b'c)\cos.\nu=o\quad\cdot\quad\cdot\quad(3)$$

Es seyen x', y', z' die Coordinaten des Punctes auf der ersten Linie, durch welche die Ebene gelegt ist. Da die zweite Linie auch durch diesen

Punct geht, so müssen seine Coordinaten auch der Gleichung dieser Linie Genüge leisten; wir haben also

$$\begin{aligned} c'x' + a'z' + \alpha' &= o \\ c'y' + b'z' + \beta' &= o \end{aligned} \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$$

Wenn man die Gleichungen (2) und (4) von einander abzieht, so findet man:

$$\begin{aligned} c' (x - x') + a' (z - z') &= o \\ c' (y - y') + b' (z - z') &= o \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a' &= - c' \cdot \frac{(x - x')}{(z - z')} \\ b' &= - c' \cdot \frac{(y - y')}{(z - z')} \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe von a' und b' in die Gleichung (3), so hat man:

$$o = - c + a\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right) + b\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right) + \left(a \cdot \frac{(y-y')}{(z-z')} + b \cdot \frac{(x-x')}{(z-z')}\right) \cos.\ \lambda$$
$$- \left(c \cdot \frac{(x-x')}{(z-z')} - a\right) \cos.\ \mu - \left(c \cdot \frac{(y-y')}{(z-z')} - b\right) \cos.\ \nu$$

oder

$$o = x(a + b\cos.\lambda - c\cos.\mu) + y(b + a\cos.\lambda - c\cos.\nu) + z(-c + a\cos.\mu + b\cos.\nu)$$
$$- \begin{cases} x'(a + b\ \cos.\ \lambda - c\ \cos.\ \mu) \\ + y'(b + a\ \cos.\ \lambda - c\ \cos.\ \nu) \\ + z'(-c + a\ \cos.\ \mu + b\ \cos.\ \nu) \end{cases} \quad \cdot \quad \cdot \quad (5)$$

Das ist die Gleichung der Ebene, welche der gemeinschaftliche Ort aller graden Linien ist, die durch den Punct gehen, dessen Coordinaten x', y', z' sind, und die senkrecht auf irgend einer graden Linie sind, deren Gleichungen

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$

sind.

7° Aufgabe. Man finde die nöthigen Bedingungen, damit eine grade Linie senkrecht auf einer Ebene sey.

Auflösung. Es sey

$$Ax + By + Cz + D = o$$

die Gleichung der Ebene. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (5) in der vorhergehenden Nummer, welche die Auflösung des umgekehrten Problems enthält, so findet man:

$$A = a + b \cos.\lambda - c \cos.\mu \quad \ldots \quad (p)$$
$$B = b + a \cos.\lambda - c \cos.\nu \quad \ldots \quad (q)$$
$$C = -c + a \cos.\mu + b \cos.\nu \quad \ldots \quad (r).$$

Man folgert aus den ersten beiden Gleichungen (p) und (q)

$$a = \frac{A \sin.^2\nu + C(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\nu \cos.\mu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$
$$b = \frac{B \sin.^2\mu + C(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu) + A(\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$
$$c = -\frac{C \sin.^2\lambda + A(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

Das sind die Werthe von a, b und c in den Gleichungen

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$

einer graden Linie, die senkrecht auf die Ebene ist, deren Gleichung wir gleich im Anfange dieser Nummer gegeben haben.

8° Aufgabe. Man finde den Winkel U zwischen einer graden Linie und einer Ebene.

Auflösung. Es seyen wieder

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$

die Gleichungen der graden Linie, und

$$Ax + By + Cz + D = o$$

die Gleichung der Ebene.

Wir denken uns eine Linie, deren Gleichungen

$$c'x + a'z + \alpha' = o$$
$$c'y + b'z + \beta' = o$$

seyen, und welche senkrecht auf die Ebene ist; also, nach der vorhergehenden Nummer:

$$a' = \frac{A \sin.^2\nu + C(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\nu \cos.\mu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$
$$b' = \frac{B \sin.^2\mu + C(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu) + A(\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$
$$c' = -\frac{C \sin.^2\lambda + A(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

Es ist klar, dass der Winkel zwischen diesen beiden graden Linien gleich ist dem Complement des Winkels zwischen der ersten Linie und der Ebene zu 90°. Wir haben aber in Nummer (5) gefunden, dass, wenn wir den Winkel zwischen den beiden graden Linien mit V bezeichnen:

$$\cos.V = \frac{aa' + bb' + cc' + (a'b + ab')\cos.\lambda - (ac' + a'c)\cos.\mu - (bc' + b'c)\cos.\nu}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\lambda - 2ac\cos\mu - 2bc\cos\nu)}\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2a'b'\cos\lambda - 2a'c'\cos\mu - 2b'c'\cos\nu)}}$$

ist. Substituirt man in dieser Gleichung für a' und b' ihre eben angeführten Werthe, und setzt man sin. U für cos. V, so hat man:

$$\sin.U = \frac{Aa + Bb - Cc}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos.\lambda - 2ac\cos.\mu - 2bc\cos.\nu)}\sqrt{\begin{array}{l}(A^2\sin.^2\nu + B^2\sin.^2\mu + C^2\sin.^2\lambda \\ \quad + 2AB(\cos.\nu\cos.\mu - \cos.\lambda) \\ \quad + 2AC(\cos.\lambda\cos.\nu - \cos.\mu) \\ \quad + 2BC(\cos.\lambda\cos.\mu - \cos.\nu))\end{array}}} \quad \ldots (B)$$

Macht man in dieser Gleichung

$$a = \frac{A \sin.^2\nu + C(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\nu \cos.\mu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$b = \frac{B \sin.^2\mu + C(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu) + A(\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$c = -\frac{C \sin.^2\lambda + A(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

so findet man sin. $U = 1$ oder $U = 90°$, was vollkommen damit übereinstimmt, was wir in der Nummer (7) gefunden haben.

Macht man hingegen

$$Aa + Bb - Cc = o$$

so wird sin. $U = o$ und $U = o$. Diese Gleichung enthält also die Bedingungen, unter welchen eine grade Linie einer Ebene parallel ist.

9$^{o.}$ Aufgabe. Man finde den Winkel zweier Ebenen.

Auflösung. Es seyen

$$Ax + By + Cz + D = o$$

$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D = o$$

die Gleichungen der beiden Ebenen.

Man denke sich jetzt zwei grade Linien senkrecht auf die beiden Ebenen; die Gleichungen dieser graden Linien seyen:

$$cx + az + \alpha = o$$

$$cy + bz + \beta = o$$

$$c'x + a'z + \alpha' = o$$

$$c'y + b'z + \beta' = o.$$

Da sie senkrecht auf beiden Ebenen sind, so hat man nach dem Vorhergehenden:

$$a = \frac{A \sin.^2\nu + C(\cos.\lambda \cos. - \cos.\mu) + B(\cos.\nu \cos.\mu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$b = \frac{B \sin.^2\mu + C(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu) + A(\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$c = -\frac{C \sin.^2\lambda + A(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$a' = \frac{A_{(1)} \sin.^2\nu + C_{(1)}(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B_{(1)}(\cos.\nu \cos.\mu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$b' = \frac{B_{(1)} \sin.^2\mu + C_{(1)}(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu) + A_{(1)}(\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

$$c' = -\frac{C_{(1)} \sin.^2\lambda + A_{(1)}(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + B_{(1)}(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{1 - \cos.^2\lambda - \cos.^2\mu - \cos.^2\nu + 2\cos.\lambda \cos.\mu \cos.\nu}$$

Der Winkel zwischen diesen beiden graden Linien ist offenbar gleich dem Complement des Winkels zwischen den beiden Ebenen zu 180°. Bezeichnen wir diesen Winkel mit W, so ist klar, dass wir $-\cos. W$ bekommen werden, wenn wir in der Gleichung (4) der 5ten Nummer für a, b, c und a', b', c' die eben entwickelten Werthe dieser Grössen substituirt. Man findet auf diese Weise:

$$-\cos. W = \frac{AA_{(1)} \sin.^2\nu + BB_{(1)} \sin.^2\mu + CC_{(1)} \sin.^2\lambda + (AB_{(1)} + A_{(1)}B)(\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda)}{\sqrt{(A^2 \sin.^2\nu + B^2 \sin.^2\mu + C^2 \sin.^2\lambda + 2AB(\cos.\mu\cos.\nu - \cos.\lambda) + 2AC(\cos.\lambda\cos.\nu - \cos.\mu) + 2BC(\cos.\lambda\cos.\mu - \cos.\nu}}$$
$$\frac{+ (AC_{(1)} + A_{(1)}C)(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + (B_{(1)}C + BC_{(1)})(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{\sqrt{(A^2_{(1)} \sin.^2\nu + B^2_{(1)} \sin.^2\mu + C^2_{(1)} \sin.^2\lambda + 2A_{(1)}B_{(1)}(\cos.\mu\cos.\nu - \cos.\lambda) + 2A_{(1)}C_{(1)}(\cos.\lambda\cos.\nu - \cos.\mu) + 2B_{(1)}C_{(1)}(\cos.\lambda\cos.\mu - \cos.\nu}}$$

Macht man $A = A_{(1)}$, $B = B_{(1)}$, $C = C_{(1)}$, so findet man $-\cos. W = 1$ oder $W = 180°$. Das sind die Bedingungen, unter welchen die zwei Ebenen parallel untereinander sind. Man erhält $\cos. W = o$ oder $W = 90°$; wenn man

$$AA_{(1)} \sin.^2\nu + BB_{(1)} \sin.^2\mu + CC_{(1)} \sin.^2\lambda + (AB_{(1)} + A_{(1)}B)(\cos.\nu \cos.\mu - \cos.\lambda)$$
$$+ (AC_{(1)} + A_{(1)}C)(\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + (BC_{(1)} + B_{(1)}C)(\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu) = o.$$

Das ist die Bedingungsgleichung, welche erfüllt seyn muss, damit zwei Ebenen senkrecht auf einander seyn können.

Nota. Es ist klar, dass von den zwei Winkeln, die zwei Ebenen mit-

einander machen, und die sich zu 180° complementiren, in der obigen Entwickelung derjenige gemeint ist, der dem Anfangspunct der Coordinaten zugekehrt ist, oder innerhalb dessen Oeffnung sich der Anfangspunct der Coordinaten befindet.

15. Aus der letzten Formel, welche den Cosinus des Winkels giebt, den zwei Ebenen miteinander machen, kann man alle vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ableiten. Man kann sich nämlich, wie schon in Nro. 8 dargethan ist, jedes sphärische Dreieck so construiren, dass man drei Ebenen durch den Mittelpunct einer Kugel legt. Diese drei Ebenen schneiden auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreieck ab, dessen Winkel den Neigungswinkeln der Ebenen, und dessen Seiten den Winkeln zwischen den Durchschnittslinien der Ebenen gleich sind. Die Neigung der Ebenen ist aber der Gegenstand der eben entwickelten Formel; sie muss also alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie ebenfalls zu lösen im Stande seyn.

Wir wollen also drei Ebenen wählen, die sich unter beliebigen Winkeln schneiden, und den Zusammenhang ihrer Winkel und der Winkel ihrer Durchschnittlinien aus der eben entwickelten Formel ableiten. Um die Sache recht einfach zu machen, so mögen die Coordinatenebenen selbst diese Ebenen seyn: da die Werthe der Winkel λ, μ, ν ganz willkührlich sind. so können sie allerdings alle möglichen Winkel gegeneinander annehmen, und sind deshalb zu unserm Zweck geeignet.

Erst suche man die Werthe, die A, B, C, D in der allgemeinen Gleichung der Ebene annehmen, wenn die Ebene eine der Coordinatenebenen selbst seyn soll. Es ist klar, dass die Gleichung der Ebene der x; y

so beschaffen seyn muss, dass z für jeden Werth von x und y gleich Null wird. Also:

$$o = z = -\frac{D+By+Ax}{C}$$

Diese Gleichung kann nicht anders für alle Werthe von x und y statt finden, als wenn

$$D = o, \quad B = o, \quad A = o.$$

Eben so findet man für die Ebene der x, y

$$D = o, \quad C = o, \quad A = o$$

und für die Ebene der y, z

$$D = o, \quad B = o, \quad C = o.$$

Bezeichnet man also mit L den Winkel der Ebene der xz mit der Ebene der yz; mit M den Neigungswinkel der Ebene xy mit der Ebene der yz; mit N den Winkel der Ebene xy mit der Ebene der xz; so muss man, um diese Neigungswinkel zu finden, in der Gleichung der vorhergehenden Nummer, welche den Cosinus der Neigung zweier Ebenen giebt, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$

sind, den Grössen A, B, C, $A_{(1)}$, $B_{(1)}$, $C_{(1)}$ nacheinander folgende Werthe geben:

Um cos. L zu finden: $C = o$, $A = o$, $B_{(1)} = o$, $C_{(1)} = o$;

Um cos. M zu finden: $B = o$, $C = o$, $B_{(1)} = o$, $A_{(1)} = o$;

Um cos. N zu finden: $A = o$, $B = o$, $A_{(1)} = o$, $C_{(1)} = o$;

substituirt man diese Werthe nacheinander in die obige Formel, so findet man:

$$-\cos. L = \frac{\cos. \mu \cos. \nu - \cos. \lambda}{\sin. \mu \sin. \nu}$$
$$-\cos. M = \frac{\cos. \lambda \cos. \nu - \cos. \mu}{\sin. \lambda \sin. \nu} \quad \cdot \cdot \quad (II)$$
$$-\cos. N = \frac{\cos. \lambda \cos. \mu - \cos. \nu}{\sin. \lambda \sin. \mu}$$

diess ist eine Grundformel der sphärischen Trigonometrie.

Man findet aus den eben entwickelten Formeln:

$$\sin.^2 L = 1 - \cos.^2 L = \frac{1 - \cos.^2 \lambda - \cos.^2 \mu - \cos.^2 \nu + 2 \cos. \lambda \cos. \mu \cos. \nu}{\sin.^2 \mu \sin.^2 \nu}$$
$$\sin.^2 M = 1 - \cos.^2 M = \frac{1 - \cos.^2 \lambda - \cos.^2 \mu - \cos.^2 \nu + 2 \cos. \lambda \cos. \mu \cos. \nu}{\sin.^2 \lambda \sin.^2 \nu}$$
$$\sin.^2 N = 1 - \cos.^2 N = \frac{1 - \cos.^2 \lambda - \cos.^2 \mu - \cos.^2 \nu + 2 \cos. \lambda \cos. \mu \cos. \nu}{\sin.^2 \lambda \sin.^2 \mu}$$

folglich:

$$\frac{\sin. L}{\sin. M} = \frac{\sin. \lambda}{\sin. \mu}$$
$$\frac{\sin. L}{\sin. N} = \frac{\sin. \lambda}{\sin. \nu} \quad \cdot \quad \cdot \quad (I)$$
$$\frac{\sin. M}{\sin. N} = \frac{\sin. \mu}{\sin. \nu}$$

welches die andere Grundformel ist.

Man kann die erste von den Gleichungen (*II*) auch unter folgende Form bringen:

$$-\cos. L = \frac{\cot. \mu \cos. \nu}{\sin. \nu} - \frac{\cos. \lambda}{\sin. \mu \sin. \nu}.$$

Diese Gleichung mit cos. ν multiplicirt giebt:

$$-\cos. L \cos. \nu = \frac{\cot. \mu \cos.^2 \nu}{\sin. \nu} - \frac{\cos. \lambda \cos. \nu}{\sin. \mu \sin. \nu}$$
$$= \frac{\cot. \mu}{\sin. \nu} - \cot \mu \sin. \nu - \frac{\cos. \lambda \cos. \nu}{\sin. \mu \sin. \nu}$$

oder da $\cos. \lambda \cos. \nu = -\cos. M \sin. \mu \sin. \lambda + \cos. \mu$;

$$-\cos. L \cos. \nu = -\cot. \mu \sin. \nu + \frac{\cos. M \sin. \lambda}{\sin. \mu}; \quad \cdot \quad \cdot \quad (D)$$

und da ferner $\frac{\sin. \lambda}{\sin. \mu} = \frac{\sin. L}{\sin. M}$;

$$\cos. L \cos. \nu = \cot. \mu \sin. \nu - \cot. M \sin. L,$$

welches die dritte Grundformel ist.

Man kann die vierte Grundformel finden, indem man die Gleichung (*D*) mit sin. μ multiplicirt. Man findet:

$$\cos. M \sin. \lambda = \cos. \mu \sin. \nu - \cos. L \sin. \mu \cos. \nu.$$

Substituirt man in dieser $\frac{\sin. L \sin. \nu}{\sin. N}$ für sin. λ und $\frac{\sin. \gamma \sin. M}{\sin. N}$ für sin. μ, so findet man:

$$\sin. L \cos. M = \sin. N \cos. \mu - \cos. L \sin. M \cos. \nu \quad . \quad . \quad (A)$$

Diese Gleichung ist dieselbe, die wir schon bei der Entwickelung der vierten Grundformel der sphärischen Trigonometrie in Nummer (8) benutzt und ebenfalls mit (*A*) bezeichnet haben. Wenn man nämlich in dieser Gleichung *M* für *N* und ν für μ, und umgekehrt, setzt, was immer erlaubt ist, so hat man:

$$\sin. L \cos. N = \sin. M \cos. \nu - \cos. L \sin. N \cos. \mu$$

oder

$$\sin. M \cos. \nu = \sin. L \cos. N + \cos. L \sin. N \cos. \mu.$$

Substituirt man diesen Werth von sin. *M* cos. ν in das dritte Glied der Gleichung (*A*), so hat man:

$$\sin. L \cos. M = \sin. N \cos. \mu \sin.^2 L - \sin. L \cos. L \cos. N;$$

oder, nachdem man auf beiden Seiten mit sin. *L* dividirt:

$$\cos. M = \sin. N \sin. L \cos. \mu - \cos. L \cos. N$$

welches die vierte Grundformel ist.

16. Die in der 14ten Nummer entwickelten Formeln werden ungleich einfacher, wenn man $\lambda = \mu = \nu = 90°$, oder cos. λ = cos. μ = cos. ν = *o* setzt; das heisst, wenn man die Coordinaten rechtwinklicht nimmt.

Es seyen

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$

die Gleichungen zweier Ebenen, und

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$
$$c'x + a'z + \alpha' = o$$
$$c'y + b'z + \beta' = o$$

die Gleichungen zweier graden Linien. Wenn man diese Gleichungen auf rechtwinklichte Coordinaten bezieht, so hat man:

1°. Wenn man mit V den Winkel der beiden graden Linien bezeichnet:

$$\cos. V = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}.$$

Die Bedingungsgleichung, welche erfüllt seyn muss, damit diese beiden graden Linien einen rechten Winkel machen, ist:

$$aa' + bb' + cc' = o;$$

und, wenn sie mit einander parallel sind, so haben wir:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'.$$

2°. Wenn man mit U den Winkel der ersten graden Linie mit der ersten Ebene bezeichnet:

$$\text{sin. } U = \frac{Aa + Bb - Cc}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Macht man $a = A$, $b = B$, $-c = C$, so wird sin. $U = 1$ oder $U = 90°$, und die Linien machen einen rechten Winkel mit der Ebene. Setzt man hingegen

$$Aa + Bb - Cc = o$$

se wird sin. $U = o$ und $U = o$; in diesem Falle sind also die Linien und die Ebene einander parallel.

3°. Es sey W der Winkel der beiden Ebenen, so hat man:

$$-\cos. W = \frac{AA_{(1)} + BB_{(1)} + CC_{(1)}}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}\,\sqrt{(A_{(1)}^2+B_{(1)}^2+C_{(1)}^2)}}.$$

Setzt man $\cos. W = o$, so ist $W = 90°$, und

$$AA_{(1)} + BB_{(1)} + CC_{(1)} = o.$$

Setzt man hingegen

$$A = A_{(1)},\ B = B_{(1)},\ C = C_{(1)};$$

so wird $-\cos. W = 1$ oder $W = 180°$, und die beiden Ebenen sind einander parallel.

III. EINIGE ERKLÄRUNGEN AUS DER STEREOMETRIE.

Man benennt alle von Ebenen begrenzte Körper nach der Anzahl und der Form dieser Ebenen, zum Theil nach ihrer respectiven Lage, wenn sie sich hierin von den übrigen auszeichnen. In allen Formen, die bei den Krystallen vorkommen, sind immer je zwei Flächen einander parallel, mit sehr wenig Ausnahmen.

1) Das vierseitige Prisma, von sechs Flächen begrenzt, von denen sich je zwei und zwei parallel sind, und die sich so schneiden, dass die Begrenzungsflächen Parallelogramme sind, d. h. Rhomben oder Rhomboïde, oder Rechtecke. Man nennt bekanntlich Rhombus oder Rhomboïd Vierecke, in denen je zwei und zwei Seiten einander parallel sind; beim Rhombus sind alle Seiten einander gleich; beim Rhomboïd nur je zwei und zwei gegenüberliegende.

Man denkt sich gewöhnlich das Prisma auf eine seiner Flächen gestellt, und nennt diese die Basis; man begreift noch die obere ihr parallele Fläche mit unter diesem Namen. Die übrigen Flächen heissen Seitenflächen des Prisma. Eine Linie, die durch den Mittelpunct des Prisma allen Seitenflächen parallel geht, heisst die Axe des Prisma. Man nennt die Durchschnittslinien oder Kanten, die die Basis mit den übrigen Flächen bildet,

Basiskanten (Endkanten); diejenigen Kanten hingegen, die aus dem Durchschnitt der Seitenflächen untereinander entstehen und mit der Axe parallel laufen, Seitenkanten (oder auch Säulenkanten, indem die Seitenflächen eine Art Säule bilden).

Man unterscheidet verschiedene vierseitige Prismen:

A. Grade Prismen, deren Seitenkanten rechte Winkel mit den Basiskanten machen, oder deren Seitenflächen Rechtecke sind.

a) Grades Prisma mit quadratischer Basis.

b) Grades Prisma mit rectangulärer Basis.

c) Grades Prisma mit rhombischer Basis.

d) Grades Prisma mit rhomboïdischer Basis.

B. Schiefe Prismen, deren Seitenflächen Rhomben oder Rhomboïde sind, deren Basis also einen schiefen Winkel mit der Axe macht. Eine Ebene durch die vordere Seitenkante und die Axe gelegt, macht einen rechten Winkel mit der Basis, und alle Seitenflächen sind untereinander gleich und ähnlich.

a) Schiefes Prisma mit rhombischer Basis.

b) Schiefes Prisma mit rectangulärer Basis.

C. Unregelmässige Prismen, deren Flächen Rhomboïde sind, von denen nur je zwei und zwei parallele einander gleich sind: die Axe macht also einen schiefen Winkel mit der Basis, und eine Ebene, durch die vordere Seitenkante und die Axe gelegt, macht keinen rechten Winkel mit der Basis.

2) Das Octaëder, von acht Dreiecken begrenzt. Man denke sich drei Linien von beliebiger Länge, die sich in ihren Mitten unter beliebigen

Winkeln schneiden, und verbinde die sechs Endpuncte derselben durch Ebenen, so hat man ein Octaëder. Die drei Linien heissen Axen des Octaëders; eine von ihnen unterscheidet man als Hauptaxe, stellt sie vertical, und nennt sie schlechtweg Axe; die beiden andern Linien heissen Unteraxen oder Basisaxen, weil man die Ebene, die man sich durch diese beiden Axen gelegt denken kann, Basis nennt (sie ist in der That die Basis der Doppelpyramide, als welche man auch jedes Octaëder ansehen kann). Die Kanten, welche die Basis bilden, nennt man Basiskanten, die übrigen, die zu vier in den zwei Endpuncten der Hauptaxe zusammenkommen, Endkanten. Man unterscheidet wieder mehrere Arten Octaëder.

A. Grade Octaëder, deren Axen rechte Winkel untereinander machen.

a) Das reguläre Octaëder, von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt, und dessen Axen untereinander gleich sind.

b) Das Quadratoctaëder oder Octaëder mit quadratischer Basis, dessen Basisaxen untereinander gleich, aber von der Hauptaxe verschieden sind. Es ist offenbar von acht gleichschenklichten Dreiecken begrenzt.

c) Das Rhombenoctaëder oder Octaëder mit rhombischer Basis, dessen Axen alle drei von einander an Länge verschieden sind, von acht gleichen, aber ungleichschenklichten Dreiecken begrenzt.

B) Die Basisaxen machen rechte Winkel untereinander, aber die Hauptaxe ist schief gegen die Basis geneigt, so dass sie zwar einen rechten Winkel mit der einen Basisaxe macht, aber nicht mit der andern. Man denkt sich dieses Octaëder immer so gestellt, dass die Hauptaxe vertical steht, und diejenige Basisaxe, die einen stumpfen Winkel mit der Hauptaxe

macht, nach vorn gekehrt ist. Schiefe Octaëder: Einzige Gattung: schiefes Rhombenoctaëder, in welchem alle drei Axen von einander an Länge verschieden sind.

C. Die Axen machen alle drei schiefe Winkel untereinander. Schiefes Rhomboïdoctaëder oder unsymmetrisches Octaëder.

Man kann noch unterscheiden: das Rectangulär-octaëder, dessen Basis ein Rechteck ist. Es kann grade und schief seyn, d. h. die Basis kann einen rechten Winkel mit der Hauptaxe machen oder nicht. Wenn man in diesen Octaëdern Ebenen durch die Hälfte der Basiskanten und die Spitze legt, so bilden diese Ebenen Rhombenoctaëder, grade oder schiefe, je nachdem das Rectangulär-octaëder ein grades oder schiefes war. Wir werden weiterhin sehen, dass in der Krystallographie die Rhomben- und Rectangulär-octaëder zu derselben Klasse von Formen gezählt werden.

Wenn man sich beim Octaëder vier Ebenen denkt, die durch seine Basiskanten gehen und mit der verticalen Axe parallel sind, und noch zwei andere, die durch die beiden Endspitzen gehen und mit der Basis parallel sind, so entsteht ein Prisma, dessen Winkel von den Winkeln des Octaëders abhängen. So entsteht aus dem regulären Octaëder ein Würfel, aus dem Quadratoctaëder ein grades Prisma mit rhombischer Basis, aus dem schiefen Rhombenoctaëder ein schiefes Rhombenprisma, aus dem unsymmetrischen Octaëder endlich ein unsymmetrisches Prisma.

Wenn man sich abwechselnde Octaëderflächen, zwei oben und zwei unten, über die andern vier hinweg so verlängert denkt, dass sie sich schneiden, so entstehen vierflächige Körper, die man deshalb Tetraëder nennt. Diese unterscheiden sich von den bisher aufgezählten Formen be-

sonders dadurch, dass keine Fläche der andern parallel ist, indem von jedem Flächenpaar nur eine da ist. Das reguläre Octaëder giebt ein reguläres Tetraëder, das von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist. Aus den übrigen Octaëdern entstehen mehr oder wenige unregelmässige Tetraëder.

Von andern Formen mit unvollzähligen Flächen wird weiterhin die Rede seyn. *)

3) Das Rhomboëder, von sechs gleichen Rhomben begrenzt. Man denke sich durch den obern Endpunct einer Verticallinie drei Ebenen gelegt, die gleiche Winkel unter sich und mit der Linie machen; durch den untern Endpunct der Verticallinie lege man ebenfalls drei Ebenen, die den obern parallel gehen; die Form, die daraus entsteht, ist ein Rhomboëder, die Verticallinie seine Axe. Der Durchschnittslinien der obern und untern Ebenen sind sechs, sie liegen nicht in einer Ebene, sondern im Zikzak; man nennt sie Basiskanten, zum Unterschiede von den Durchschnittslinien, die durch die Endpunkte der Axe gehen und die man Endkanten nennt. Legt man eine Linie durch eine Ecke an der Basis und den dritten Theil der Axe, so ist sie rechtwinklicht mit der Axe.

4) Das Dihexaëder, sechsseitige Doppelpyramide, von lauter gleichen und ähnlichen Dreiecken begrenzt.

a) Gleichschenklichte Dihexaëder, oder schlechtweg Dihexaëder, von zwölf gleichschenklichten Dreiecken begrenzt. Die Basiskanten liegen in einer Ebene und bilden ein reguläres Sechseck. Jeder Schnitt durch die Axe gelegt giebt einen Rhombus.

---

*) Siehe den Abschnitt vom regulären System.

b) Ungleichschenkliehtes Dihexaëder (Drei- und Dreikantner. *Weiss*), von zwölf gleichen ungleichschenklichten Dreiecken begrenzt; die Neigungswinkel der Flächen an den Endkanten sind nur abwechselnd einander gleich; die Basiskanten liegen im Zikzak. Jeder Schnitt durch die Axe und eine Endkante gelegt giebt ein Rhomboïd.

5) Das reguläre sechsseitige Prisma, ein grades Prisma, dessen Basis ein reguläres Sechseck ist.

Von den übrigen Formen, die noch bei den Krystallen vorkommen, kann erst weiterhin die Rede seyn.

DER LEHRE VON DEN KRYSTALLEN

ERSTES CAPITEL.

Begriff und Abtheilungen der Wissenschaft. Erklärungen.

1. Die Krystallonomie im engeren Sinn lehrt uns die mathematischen Verhältnisse des Krystallbaues kennen, und in so fern ist sie nichts weiter als die Anwendung der Geometrie der Ebenen auf gewisse Fälle, deren Anzahl dadurch, dass bei allen diesen Bildungen eine gewisse Symmetrie gefordert wird, sehr beschränkt ist. Die Krystallonomie im weitern Sinn hingegen begreift auch die physikalischen und chemischen Eigenschaften dieser unorganischen Wesen: sie ist also eine Mineralogie, welche die unkrystallinischen Substanzen ausschliesst. Die Entwickelung aller Erscheinungen, die hieher gehören, aus einem einzigen Naturgesetz, würde endlich eine dritte Unterabtheilung der Krystallonomie, eine Mechanik der Krystalle, abgeben, wenn uns etwas mehr hievon bekannt wäre, als noch zu bestätigende Beziehungen der äussern und innern Constitution der Krystalle, deren tiefere Bedeutung man noch nicht kennt.

Wir setzen uns vor, unseren Gegenstand in dieser Ordnung zu behandeln. Nachdem wir erst unser Feld näher bezeichnet, wollen wir Formeln erfinden, die uns mit Leichtigkeit von den uns als schon bekannt

vorausgesetzten Dingen zu den unbekannten führen; eine ohne alle Voraussetzung durchgeführte Analyse wird uns die allgemeinsten Beziehungen der Winkel untereinander geben; wenn wir so den Krystallonomischen Calcul völlig in unserer Gewalt haben, wollen wir uns an die Mittel wenden, wie man die zu denselben nöthigen Data durch Messungen auf das genaueste finden kann; hiemit wird der erste Theil geschlossen seyn. Im zweiten Theile setzen wir uns vor uns mit den physischen und chemischen Eigenschaften der Krystalle zu beschäftigen, nämlich wie sie sich gegen das Licht, gegen die Wärme, gegen die Electricität etc. verhalten; die Formen, in denen sie vorkommen, ihr specifisches Gewicht, ihre Härte, ihr Glanz und endlich ihre chemische Zusammensetzung wird mit Sorgfalt angegeben werden. Das Wenige, was sich bis jetzt über den theoretischen Zusammenhang der mannigfaltigen Erscheinungen, die sie darbieten, ergeben hat, wird dem zweiten Theile angehängt werden.

2. Ein Krystall ist, wenn man bloss auf seine mathematische Bedeutung Rücksicht nimmt, ein von Ebenen begrenzter Körper, bei dem diese Ebenen um eine Linie her, die man Axe nennt, und der in den meisten Fällen mehrere Ebenen (Säulenflächen genannt) parallel gehen, mit einer gewissen Symmetrie geordnet sind. Jeder Fläche geht, mit sehr wenig Ausnahmen, eine andere parallel, die sich am entgegengesetzten Ende des Krystalls befindet. Man spricht deshalb nur von einem Ende des Krystalls, weil das andere Ende eben so gebildet ist.

Die Durchschnittslinien der Flächen, die den Krystall begrenzen, nennt man Kanten; die Spitzen, die aus dem Durchschnitt von mehr als zwei Flächen in einem Puncte entstehen, heissen Ecken. Die Flächen, die mit

der Axe einen Winkel machen, folglich eines von ihren Enden durchschneiden, nennt man Endflächen; die Flächen, die parallel mit der Axe sind, Seitenflächen oder Säulenflächen. Die Kanten, die aus dem Durchschnitt der Endflächen entstehen, heissen Endkanten, die Durchschnittslinien der Seitenflächen Seitenkanten (oder Säulenkanten), die Durchschnittslinien der End - und Seitenflächen, oder der obern und untern Endflächen, Kanten an der Basis oder Basiskanten. Die Ecke, welche aus dem Durchschnitt der Endflächen entsteht und sich am Ende der Axe befindet, nennt man die Endspitze. Wenn durch die Kante zweier Flächen ausserhalb derselben eine dritte gelegt ist, so nennt man die letztere die Abstumpfungsfläche der Kante; es ist eine grade Abstumpfung, wenn die dritte Ebene mit jeder der beiden andern denselben Winkel macht *); ist das nicht der Fall, so ist es eine schiefe Abstumpfung. Wenn durch die Kante zweier Flächen zwei andere Flächen gelegt sind, die einen grösseren Winkel untereinander machen, als die beiden ersten, so nennt man diess eine Zuschärfung der Kante. Abstumpfungsflächsn und Zuschärfungsflächen der Ecken sind Flächen, die durch den Durchschnittspunct mehrerer Flächen gelegt sind. Ein Krystall ist zugespitzt, wenn mehrere Flächen durch denselben Endpunct gehen; er ist an der Spitze zugeschärft, wenn dieser Flächen nur zwei sind; es ist eine schieflaufende Zuschärfung, wenn die Durchschnittslinie der beiden Zuschärfungsflächen (die Zuschärfungskante) keinen rechten Winkel mit der Axe macht.

In Betreff des Verhältnisses der Endflächen zu den Seitenflächen, so kann eine Endfläche mit einer gewissen Seitenfläche eine mit der Axe

*) Wir werden indess beim schiefen Octaëder eine Ausnahme von diesem Sprachgebrauch machen.

rechtwinklichte Kante bilden, und ist dann grade auf die Seitenfläche aufgesetzt; ist dieser Winkel kein rechter, so ist es eine schiefe Aufsetzung. Dasselbe gilt von den Seitenkanten, auf die die Endflächen auch grade oder schief aufgesetzt seyn können, je nachdem die Endfläche mit einer durch die Kante und die Axe gelegte Ebene einen rechten Winkel macht oder nicht. Eine gradangesetzte Endfläche ist eine solche, die einen rechten Winkel mit den Seitenflächen macht; bei der schiefangesetzten Endfläche ist dieser Winkel $< 90°$.

Eintheilung der Krystallformen.

3. An jedem vollständigen Krystall giebt es grösstentheils, ausser den Säulenflächen, die mit der Axe parallel sind, noch mehrere Endflächen, die dieselbe Neigung gegen die Axe haben. Wenn dieser Flächen mehr als zwei sind, so bilden sie zusammengenommen, und hinlänglich verlängert, bis sie sich schneiden, einen einfachen Körper; man sieht sie deshalb als Flächen von derselben Art an, und bezeichnet sie in den Abbildungen der Krystalle mit denselben Buchstaben, wenn sie sich von den übrigen Flächen auch durch eine gleiche physikalische Beschaffenheit, das heisst, durch ein gleiches äusseres Ansehen und besonders dadurch unterscheiden, dass die blättrigen Brüche, die ihnen parallel gehen, von gleicher Vollkommenheit sind, was gewöhnlich der Fall ist. Bei den Seitenflächen, die alle parallel mit der Axe gehen, und wo die gleiche Neigung gegen die Axe kein Unterscheidungszeichen der zu derselben Art gehörigen Flächen abgeben kann, sind die eben angegebenen physischen Merkmale, verschie-

dener Glanz, oft verschiedene Härte und Verschiedenheit der Winkel, die sie untereinander bilden, ausreichend, um die Flächen verschiedener Art von einander zu unterscheiden.

4. Man kann alle Krystallformen, so gross auch ihre Mannigfaltigkeit ist, nach der Art der Anordnung ihrer Flächen um die Axe her, unter folgende Abtheilungen bringen:

1. Mehrere Endflächen, deren immer mehr als zwei sind, machen denselben Winkel untereinander und denselben Winkel mit der Axe.

   a. Dieser Endflächen sind drei oder sechs: System der Rhomboëder (rhomboëdrisches System. *Weiss* und *Mohs*). Man kann noch das eigentlich rhomboëdrische System vom dihexaëdrischen (dirhomboëdrischen. *Mohs*, sechsgliedrigen. *Weiss*) unterscheiden. Beim ersten sind der Flächen, die eine gleiche Neigung gegen die Axe haben und gleiche Winkel untereinander machen, drei, beim zweiten sind ihrer sechs. Man findet indess zuweilen beide Fälle zugleich an demselben Krystall, z. B. am Eisenglanz; welches beweisst, dass diese Trennung nicht ganz wesentlich ist.

   b. Dieser Endflächen sind vier: System der Quadratoctaëder (viergliedriges System. *Weiss*, pyramidales System. *Mohs*).

2. Die Endflächen, die um die Endspitze her liegen, haben keine gleiche Neigungen untereinander (prismatisches System. *Mohs*).

   a. Alle Endflächen des Krystalls sind so geordnet, dass immer je vier Flächen eine gleiche Neigung gegen die Axe haben und von gleicher physikalischer Beschaffenheit sind. Sind nur zwei Flächen von gleicher Art, das heisst von gleicher Neigung gegen die Axe

und von gleicher physikalischer Beschaffenheit, da, so macht ihre Durchschnittslinie einen rechten Winkel mit der Axe. System der Rhombenoctaëder mit vollkommener Symmetrie der Endflächen (zwei - und zweigliederiges System. *Weiss*; prismatisches System mit prismatischen Combinationen. *Mohs*). Grade Rhombenoctaëder.

b. Die Endflächen gleicher Art sind so angeordnet, dass nur je zwei dieselbe Neigung gegen die Axe haben, und ihre Kante einen spitzen Winkel mit der Axe macht. Finden sich zuweilen zwei Flächen von gleicher Neigung gegen die Axe, deren Kante einen rechten Winkel mit der Axe macht, so sind sie stets von verschiedener physikalischer Beschaffenheit, oder ihnen gehen Brüche von verschiedener Vollkommenheit parallel. System der Rhombenoctaëder mit halber Symmetrie der Endflächen (zwei- und eingliedriges System. *Weiss*, prismatisches System mit hemiprismatischen Combinationen. *Mohs*). Schiefe Rhombenoctaëder.

c. Es giebt gar nicht mehrere Endflächen derselben Art oder von derselben Neigung gegen die Axe: oder jede Endfläche von irgend einer Neigung gegen die Axe oder irgend einer physikalischen Beschaffenheit kommt nur einmal vor. System der unsymmetrischen Octaëder (ein - und eingliedriges System. *Weiss*; prismatisches System mit tetartoprismatischen Combinationen. *Mohs*). Unsymmetrisches Octaëder.

Die Charactere dieser Abtheilungen sind so leicht mit den gewöhnlichen Sinnen zu fassen, dass man bei einiger Uebung und Umsicht von jedem Krystall, den man sieht, leicht bestimmen kann, zu welcher Abthei-

lung er gehört. Es kommt hauptsächlich darauf an, die Axe richtig zu erkennen, weil ihre Lage darüber entscheidet, ob gewisse Flächen, die man ins Auge fasst, zu den Endflächen oder zu den Seitenflächen gehören, und die Charactere mehrerer der obigen Abtheilungen sind bloss von den Endflächen hergenommen. Das ist aber nicht schwer, weil die meisten Krystalle Flächen, die der Axe parallel sind, das heisst Säulenflächen, besitzen; sie sind gewöhnlich in der Richtung der Axe mehr ausgedehnt. Man kann grösstentheils schon von den Säulenflächen sicher schliessen, zu welcher Abtheilung der Krystall gehört; besonders wenn man auf die physikalische Beschaffenheit derselben Rücksicht nimmt. Das System der Rhomboëder hat immer sechs Säulenflächen (selten drei) von gleicher physikalischer Beschaffenheit und die sich unter gleichen Winkeln schneiden. Das System der Quadratoctaëder hat vier oder acht Säulenflächen ebenfalls von gleicher Neigung gegeneinander, von denen je vier und vier abwechselnd von gleicher physikalischer Beschaffenheit sind und sich unter rechten Winkeln schneiden. Beim System der Rhombenoctaëder kommen auch in der Regel vier Säulenflächen vor, die sich aber gewöhnlich unter schiefen Winkeln schneiden, von denen je zwei uud zwei einander gegenüberliegende einander gleich sind; wenn sie sich unter rechten Winkeln schneiden, so sind die Flächenpaare von verschiedener physikalischer Beschaffenheit: dasselbe ist der Fall, wenn ihrer sechs oder mehr sind. Das System der Rhombenoctaëder mit vollkommener Symmetrie der Endflächen, kann man von demjenigen der Rhombenoctaëder mit halber Symmetrie der Endflächen nur an den Endflächen oder den ihnen correspondirenden Brüchen unterscheiden. Giebt es zwei blättrige Brüche von gleicher Vollkommen-

heit, die auf den stumpfen oder scharfen Winkeln der Flächen der vierseitigen Säule unter demselben Winkel aufgesetzt sind, so gehört der Krystall zum System der Rhombenoctaëder mit vollkommener Symmetrie der Endflächen; giebt es nur einen solchen Bruch, der einen rechten Winkel mit der Axe macht, so gehört der Krystall zu derselben Abtheilung; macht aber dieser einzige blättrige Bruch einen schiefen Winkel mit der Axe, so gehört der Krystall zum System der Rhombenoctaëder mit halber Symmetrie der Endflächen. Die letzte Abtheilung endlich, das System der unsymmetrischen Octaëder erkennt man an Säulenflächen von denen nur je zwei parallele einander in Hinsicht ihrer Lage und ihrer physikalischen Beschaffenheit gleich sind; eine Ebene, die senkrecht auf die Axe queer durch die Säule gelegt wird, wird von den Säulenflächen nie in einem Rhombus, sondern immer in Rhomboïden geschnitten.

Das reguläre System (homosphaeroëdrisches System. *Weiss*, tessulares System. *Mohs*) schliesst sich an die eben genannten an, und lässt sich, ohne Messungen anzustellen, nur durch Mittel erkennen, mit denen wir uns gleich beschäftigen werden. Der Würfel zum Beispiel kann so gut zum System der Rhomboëder als zum System der Quadratoctaëder gezählt werden, je nachdem man eine Linie, die durch zwei gegenüberliegende Ecken, oder eine, die durch die Mitte zweier gegenüberliegenden Flächen geht, als Axe nimmt. Man kann ihn selbst zum System der Rhombenoctaëder zählen, wenn man ihn als mittleres Glied in der Reihe der rechtwinklichten Säulen betrachten will, bei welchem der physikalische Unterschied zwischen den Säulenflächen verschwindet.

Vom Gesetz der Symmetrie.

5. Die meisten Krystalle sind bloss an einem Ende auskrystallirt und sitzen mit dem anderen auf. Indessen giebt es auch welche, die rund umher auskrystallisirt sind, und an diesen findet man, sehr wenige ausgenommen, dass die Lage und physikalische Beschaffenheit der Flächen an einem Ende der Axe durchaus dieselbe ist, als am entgegengesetzten Ende derselben. Diess kommt daher, weil jeder Fläche, wieder mit höchst wenigen Ausnahmen, eine andere ihr parallele gegenüber liegt. Denkt man sich nun erst beim rhomboëdrischen System die sechs Flächen, die zu drei gleichmässig um jedes Ende der Axe her und so vertheilt sind, dass immer je zwei einander parallel laufen, so weit verlängert, bis sie sich schneiden, so sieht man leicht ein, dass sich ausser den beiden Ecken an den Enden der Axe noch sechs andere bilden werden, welche regelmässig im Zikzak um dieselbe her liegen: einen solchen Körper nennt man ein Rhomboëder, und daher die Benennung des ganzen Systems. Von diesen sechs Ecken liegen sich immer je zwei einander gegenüber, und man kann sie sich eben so durch eine Linie verbunden denken, wie die beiden Ecken, die an den beiden entgegengesetzten Enden der Axe liegen, durch diese Axe verbunden sind. Diese drei Unteraxen (man kann sie so nennen, zum Unterschiede von der Hauptaxe, die wir bisher schlechtweg Axe genannt haben) sind untereinander gleich; sie machen auch alle denselben Winkel mit der Hauptaxe, sie sind der letzteren aber nicht an Länge gleich, wenn man den Fall ausnimmt, wo sich die Ebenen der Rhomboëder unter rechten Winkeln schneiden oder wo er ein Würfel ist: man zählt deshalb den Würfel nicht zu den eigentlichen Rhomboëdern.

Dehnt man diese Betrachtungen auch auf das dihexaëdrische System aus, so findet man, dass der aus der Verlängerung der zwölf Flächen, die zu sechs um die beiden Enden der Axe her liegen, und von denen immer je zwei einander parallel laufen, entstehende Körper eine sechsseitige Doppelpyramide, d. h. ein Dihexaëder ist, oder ein Körper, den man sich aus zwei gleichen, graden, sechsseitigen Pyramiden, die mit ihren Basen aneinander haften, gebildet denken kann. Hier haben wir ebenfalls drei Unteraxen von gleicher Länge, die denselben Winkel miteinander machen, die aber alle in einer auf die Hauptaxe senkrechten Ebene liegen, Sie sind stets an Länge von der Hauptaxe verschieden, ohne Ausnahme. *).

In der Abtheilung 1), *b*) bekommen wir durch dasselbe Verfahren ein grades Octaëder oder eine grade doppelte vierseitige Pyramide, mit quadratischer Basis (Quadratoctaëder), bei welchem also die beiden Unteraxen, d. h. die Diagonalen der Basis, einander gleich sind. Die Hauptaxe, die mit den ersteren einen rechten Winkel macht, ist nur beim regulären Octaëder (das man nicht zu den eigentlichen Quadratoctaëdern rechnet) den ersteren gleich, sonst bei allen übrigen von denselben an Länge verschieden.

In der Abtheilung 2), *a*. und *b*. bekommen wir ein Octaëder, dessen Basis ein Rhombus ist (Rhombenoctaëder), bei welchem also die beiden Unteraxen, d. h. die Diagonalen der Basis, einander nicht gleich sind; sie sind auch von der Hauptaxe verschieden; denn in dem Fall, wo diess nicht wäre, braucht man nur diejenige Axe, die von den beiden andern

*) Beim Smaragd sind die Axen einander sehr nahe gleich, und Haüy nimmt unter denselben eine völlige Gleichheit an; ich habe aber durch genaue Messung gefunden, dass dieses nicht der Fall ist.

unter sich gleichen verschieden ist, zur Hauptaxe zu machen, und wir hätten einen Krystall aus der Abtheilung 1), *b*) vor uns, in welcher die beiden Unteraxen einander gleich sind. Die Basis der Rhombenoctaëder aus der Unterabtheilung (*a*) der zweiten Abtheilung ist senkrecht auf die Hauptaxe, oder die Rhombenoctaëder sind grade; in der Unterabtheilung (*b*) sind hingegen lauter schiefe Rhombenoctaëder, deren Basis schiefe Winkel mit der Hauptaxe macht: doch einige von ihnen sind auf grade Rhombenoctaëder reducirbar, wie wir weiterhin sehen werden.

Die letzte Abtheilung 2), *c*. endlich giebt ein ganz unsymmetrisches Octaëder, ein schiefes Octaëder, dessen Basis ein Rhomboïd ist, oder ein schiefes Rhomboïdoctaëder. Die drei Axen sind, wie beim Rhombenoctaëder, einander nicht gleich; die beiden Unteraxen machen weder einen rechten Winkel unter sich, noch mit der Hauptaxe.

6. Betrachtet man die Flächen, die um die beiden Enden jeder dieser drei oder vier Axen her liegen, mit einiger Aufmerksamkeit, so findet man einen merkwürdigen Unterschied in ihrer Anordnung, die in einem unmittelbaren Zusammenhange mit der Länge dieser Axen steht. Sind nämlich alle Axen einander gleich, so ist auch die Anordnung der Flächen an allen Enden derselben gleich; das ist beim regulären System der Fall, und dadurch unterscheidet sich dieses System auf eine sehr kenntliche Weise von allen andern. In allen übrigen Systemen wird die Ungleichheit der Axen durch eine ungleiche Anordnung, gewöhnlich auch durch eine ungleiche physikalische Beschaffenheit der um sie her liegenden Flächen, mit grosser Bestimmtheit angedeutet. Bei den Krystallen zum Beispiel, die zum rhomboëdrischen oder quadratoctaëdrischen System gehören, sind die

Flächen, die sich um die beiden Enden der Hauptaxe her bilden, in der Anordnung, in den Winkeln, in dem Glanze etc. von denjenigen, die sich um die Enden der übrigen Axen her bilden, völlig verschieden; die Anordnung der Flächen an den Unteraxen ist hingegen an der einen eben so wie an der anderen, weil die Unteraxen einander gleich sind. In der zweiten Abtheilung ist die Anordnung und physikalische Beschaffenheit nach allen drei Richtungen der Axen verschieden, indem diese selbst von einander verschieden sind.

Durch dieses Gesetz sind wir im Stande, ohne alle vorhergehende Winkelmessung:

1) das reguläre System von allen übrigen zu unterscheiden;

2) zu bestimmen, zu welchen von den übrigen Systemen ein Krystall gehöre, selbst wenn die die drei Abtheilungen characterisirenden Flächen fehlen, wie z. B. beim Cyanit, eine rechtwinklicht vierseitige Säule, die offenbar in die zweite Abtheilung gehört, wegen des physikalischen Unterschiedes der Flächenpaare, die sich rechtwinklicht schneiden und die an Glanz und Härte sehr verschieden sind.

Dieses Gesetz hat Haüy das Gesetz der Symmetrie genannt (loi de symmetrie); es giebt uns leicht bemerkliche und sich deutlich aussprechende Kennzeichen der Krystallsysteme, die uns selbst da, wo grobe Messungen, wie man deren gewöhnlich mit dem Carangeau'schen Goniometer vornimmt, uns im Stiche lassen, noch eine richtige Anzeige geben.

7. Die Benennung dieses Gesetzes kommt daher, weil man eine solche regelmässige Anordnung der Begränzungsflächen eines Körpers, die sich auf gewisse Axen bezieht, welche man sich im Innern des Körpers gelegt denkt,

Symmetrie nennt. Die oben angeführten Körper, das Rhomboëder, das Quadratoctaëder und Rhombenoctaëder, welche aus der Verlängerung der die beiden ersten Abtheilungen characterisirenden Flächen entstehen, heissen symmetrische. Hier ist der Ort, den Begriff der Symmetrie näher zu bestimmen.

Man schneide irgend eine Figur, bei der weder alle Seiten, noch alle Winkel einander gleich sind, z. B. das Rhomboïd *ABCD*, Fig. 10, aus Papier; man mache die eine Seite des Papiers schwarz, um einen Unterschied zwischen den beiden entgegengesetzten Seiten des Papiers einzusetzen. Jetzt schneide man noch ein eben solches Rhomboïd aus, schwärze es auf derselben Seite, und lege die weisse Seite des einen Rhomboïd's auf die weisse Seite des andern, oder die schwarze Seite des einen Rhomboïd's auf die schwarze Seite des andern: man wird finden, dass sich die Rhomboïde auf diese Art keineswegs decken. Legt man aber die schwarze Seite des einen Rhomboïd's auf die weisse Seite des andern, so decken sie sich vollkommen. Man sieht hieraus, dass ein Unterschied zwischen den beiden entgegengesetzten Seiten desselben Rhomboïds statt findet; in beiden Rhomboïden sind die Winkel, die Seiten und der Flächeninhalt dieselben, aber das weisse Rhomboïd ist nach rechtshin geneigt, das schwarze nach links, wie Fig. 11 zeigt: und es sind grade die entgegengesetzten Rhomboïde, die sich decken und die völlig gleichen decken sich nicht. Jetzt schneide man eins von den Rhomboïden nach der Linie *CB* in zwei Hälften und man wird wieder dasselbe finden, nämlich, dass sich die weissen Hälften keineswegs decken und eben so wenig die schwarzen; die schwarzen Hälften decken aber die weissen und umgekehrt; eine und dieselbe weisse Hälfte

wird also von zwei schwarzen Hälften gedeckt, während diese sich untereinander nicht decken, woraus man deutlich den Unterschied zwischen sich decken (in dem gebrauchten Sinne) und sich gleich seyn wahrnimmt: da, wenn zwei Dinge einem dritten gleich sind, diese beiden Dinge auch unter sich selbst gleich sind.

Diess festgesetzt, ist es leicht, den Begriff einer symmetrischen ebenen Figur aufzustellen. Eine symmetrische Figur ist nämlich eine solche, welche sich von einer gewissen Linie aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen auf dieselbe Art begrenzt, oder welche von einer gewissen Linie (welche man die symmetrische Axe nennt) in zwei Hälften getheilt wird, die sich decken oder einander genau entgegengesetzt sind *). Das Quadrat *ABCD* Fig. 12 zum Beispiel ist eine symmetrische Figur, weil die Linie *FG* sie in zwei Hälften theilt, die sich (im oben erklärten Sinne des Worts) decken, oder sich genau entgegengesetzt sind. Dieses Quadrat ist nach mehreren Richtungen symmetrisch, weil die Linien *BC*, *AD*, *HK* ganz dieselbe Eigenschaft haben, als die Linie *FG*. Das Rechteck *ABCD* Fig. 13 ist ebenfalls symmetrisch, aber nur in den Richtungen der Linien *FG* und *HK*. Die Linie *AD* hingegen theilt es in zwei Hälften, die einander nicht decken, weil die Linien und Winkel auf der einen Seite der Linie *AD* denjenigen auf der andern Seite der Linie an demselben Orte der letztern nicht gleich sind. Wollte man die Hälfte der Figur *ABD* so ergänzen, dass eine Figur daraus entstände, deren symmetrische Axe die Linie *AD* wäre, so müsste man, wie in Fig. 14 geschehen ist, das Dreieck

*) Diese anschauliche und einfache Entwickelung des Begriffes der Symmetrie gehört meinem vortrefflichen Lehrer, Herrn Prof. Weiss in Berlin.

ADL anfügen, wo *ABD* = *ALD*, *BD* = *DL* u. s. w. Aus derselben Ursache ist das Rhomboïd *ABCD* Fig. 15 keine symmetrische Figur, weil weder die Hälften *AFGC* und *FGDB*, noch die Hälften *ABHK* und *CDHK*, noch die Hälften *ABC* und *BCD*, noch die Hälften *ABD* und *ACD* einander decken. Der Rhombus Fig. 16 ist symmetrisch nach zwei Richtungen, d. h. er hat zwei symmetrische Axen, *AD* und *BC*; die Linien *HK* und *FG* hingegen sind keine symmetrische Axen.

Die gegebene Definition der Symmetrie ebener Figuren lässt sich leicht auch auf solide Körper anwenden. Man denkt sich erst eine Ebene durch den Mittelpunct des Körpers gelegt, die ihn in zwei Hälften theilt; senkrecht auf diese Ebene legt man noch eine Menge anderer Ebenen; sind die ebenen Figuren, welche von der Oberfläche des in Frage stehenden Körpers auf diesen Ebenen abgeschnitten werden, symmetrisch, so ist der Körper auch symmetrisch in Bezug auf die erste den Körper halbirende Ebene. Solcher Ebenen, in Bezug auf welche ein Körper symmetrisch ist, kann es mehrere geben, so wie es auch bei einer ebenen Figur mehrere symmetrische Axen geben kann; ihre Durchschnittslinien können als symmetrische Axen angesehen werden. Der Würfel zum Beispiel ist ein symmetrischer Körper, denn wenn man eine Ebene durch seinen Mittelpunct, parallel mit einer seiner Seiten, legt, so werden alle Ebenen, die senkrecht auf dieser Ebene sind, von der Oberfläche des Würfels in symmetrischen Figuren (nämlich in Quadraten und Rechtecken) geschnitten. Da man drei verschiedene Ebenen parallel mit den Seiten des Würfels durch dessen Mittelpunct legen kann, die alle dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die auf ihnen senkrechten Ebenen haben, so hat der Würfel drei sym-

metrische Axen, die sich unter rechten Winkeln schneiden und den Kanten des Würfels parallel laufen. Andere Linien, die durch den Mittelpunct des Würfels und durch die Mitte seiner Kanten gehen, und noch andere, die durch die entgegengesetzten Ecken des Würfels gehen, können ebenfalls symmetrische Axen vorstellen. Die graden Octaëder mit quadratischer und rhombischer Basis sind ebenfalls symmetrische Körper; und sie haben auch drei auf einander senkrechte symmetrische Axen. Das schiefe Prisma mit rhombischer Basis hingegen ist nur in Bezug auf eine Ebene symmetrisch, die, senkrecht auf die Basis, durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten des Prisma gelegt ist; es ist unsymmetrisch in Bezug auf eine Ebene, die man durch seinen Mittelpunct, parallel mit der Basis, legt: mit einem Wort, die auf der Basis senkrechte Ebene, die man sich durch die beiden gegenüberliegenden Seitenkanten des Prisma gelegt denken kann, ist die einzige, in Bezug auf welche das schiefe Prisma mit rhombischer Basis symmetrisch ist.

Das Rhomboëder endlich ist nur in Bezug auf die Ebenen, die durch die Endkanten und durch die Axe desselben gehen, symmetrisch; die Axe des Rhomboëders ist also die einzige symmetrische Axe des Rhomboëders.

Von den Formen im Allgemeinen, die bei den Krystallen vorkommen.

8. Wir haben schon durch die Vertheilung aller Krystallformen in zwei Abtheilungen angedeutet, dass es nur eine gewisse beschränkte Anzahl von Formen giebt, welche bei den Krystallen vorkommen. Wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, das Characteristische dieser Formen näher zu

bestimmen, und endlich den Zusammenhang, der zwischen den verschiedenen Winkeln der Formen desselben Körpers statt findet, aufzudecken.

Wir haben schon im Vorhergehenden gesehen, dass es zwei verschiedene Hauptformen giebt, das Rhomboëder und das Octaëder: die erstere ist immer grade, das heisst ihre Axe macht einen rechten Winkel mit der Basis; das Octaëder zerfällt in drei Abtheilungen, das Quadratoctaëder, das Rhombenoctaëder und das Rhomboïdoctaëder, von denen das erste immer grade, das letzte immer schief ist, das mittlere bald grade, bald schief.

Ausser den Flächen, die diese Formen begrenzen, kommen noch viele andere vor, die für sich neue Formen bilden, wir wollen, zum Theil um die Benennungen dieser Formen kennen zu lernen, zum Theil um zu zeigen, wie die Natur in Anordnung dieser Flächen verfährt, hier eine allgemeine Uebersicht derselben geben.

Wenn man an einem Krystall erst die Hauptform herausgefunden hat, so findet man gewöhnlich, dass die übrigen Flächen so liegen, dass ihre Durchschnittslinien mit den Flächen der Hauptform den Kanten der letztern parallel gehen. Vertritt die neue Fläche die Stelle der Kante der Hauptform, so nennt man sie eine Abstumpfungsfläche; liegen zwei neue Flächen zu beiden Seiten der Kante, so dass sie sich in derselben durchschneiden, so sind es Zuschärfungsflächen. Die meisten Krystalle erscheinen also in den eben beschriebenen Hauptformen mit hinzutretenden Abstumpfungs- und Zuschärfungsflächen.

α. Formen des rhomboëdrischen Systems.

Am Rhomboëder kommen häufig die Endkanten grade abgestumpft vor,

d. h. es tritt an die Stelle jeder Endkante eine Fläche, die gegen beide Rhomboëderflächen gleich geneigt ist, deren Neigung gegen die Axe also eben so gross ist, als die Neigung der Endkante gegen die Axe. Verlängert man diese sechs Flächen (drei an den obern, drei an den untern Endkanten), bis sie sich schneiden, so erhält man wieder ein Rhomboëder, das aber stumpfer ist, als das erste, und das man deshalb das nächst stumpfere nennt. Die Endkanten des nächst stumpfren Rhomboëders kann man sich wieder abgestumpft denken, woraus ein neues Rhomboëder entsteht, welches man das zweite stumpfere nennt und so fort. Es ist klar, dass die Endkanten des nächst stumpferen Rhomboëders über den Flächen des ersten Rhomboëders (das wir Grundrhomboëder nennen wollen) liegen; die Endkanten des zweiten stumpferen hingegen über den Endkanten des Grundrhomboëders; die Endkanten des 2ten, 4ten, 6ten etc. Rhomboëders, liegen also in derselben Ebene, in welcher auch die Endkante des Grundrhomboëders und die Axe liegt; die Endkanten des 1sten, 3ten, 5ten, 7ten etc. Rhomboëders hingegen liegen in einer andern Ebene, die mit der ersten einen Winkel von 60° macht, und in welcher auch die Diagonale der Grundrhomboëderfläche und die Axe liegen. Lässt man alle diese verschiedenen Rhomboëderflächen durch dieselben zwei Endpuncte der Axe gehen, so erscheinen sie als in einander eingeschrieben.

Man kann von jedem andern Rhomboëder als Grundrhomboëder ausgehen, z. B. vom ersten stumpferen: im Vergleich mit diesem ist das frühere Grundrhomboëder schärfer; man nennt es deshalb in diesem Bezuge das nächste schärfere: seine Flächen gehen durch die Längen-Diagonalen *)

*) Ich nenne Längendiagonale diejenige Diagonale einer Rhomboëderfläche, die durch die Endspitze geht, die andere dagegen die Queerdiagonale.

je zweier benachbarten Flächen des Grundrhomboëders oder sie kommen an die Stelle der Ecken an der Basis. Von diesen schärferen Rhomboëdern gilt wieder in Hinsicht ihrer respectiven Lage dasselbe, was von den stumpferen Rhomboëdern gilt; die Endkanten des 2ten, 4ten, 6ten etc. schärferen Rhomboëders liegen mit den Endkanten des Grundrhomboëders, die Endkanten des 1sten, 3ten, 5ten etc. mit den Endkanten des nächsten stumpferen Rhomboëders in zwei Ebenen, die einen Winkel von 60° miteinander machen.

Ausser den Rhomboëdern, die diese grosse Reihe bilden, können noch andere vorkommen, deren Endkanten zwischen den Endkanten der genannten liegen; nie aber kommen welche vor, deren Endkanten in andern Ebenen lägen, als denjenigen, die durch die Endkanten der genannten Rhomboëder und die Axe gehen.

Noch findet man im rhomboëdrischen System Zuschärfungsflächen der Endkanten und der Basiskanten des Grundrhomboëders oder irgend eines andern. Die Zuschärfung der Endkanten, deren es überhaupt sechs giebt, drei obere und drei untere, giebt zwölf Flächen, die sich in zwölf Endkanten und eben so viel Basiskanten schneiden. Von den Endkanten fallen sechs mit den obern und untern Endkanten des Grundrhomboëders zusammen; die übrigen sechs gehen ebenfalls, zu drei, durch die obere und untere Endspitze; sie liegen aber zwischen den Endkanten des Grundrhomboëders und über den Längendiagonalen seiner Flächen. Die Neigungen der Flächen an denjenigen Endkanten, die mit den Endkanten des Grundrhomboëders zusammenfallen, können schärfer oder stumpfer seyn, als die Neigungen der Flächen an den dazwischen liegenden Endkanten,

sie können auch alle untereinander gleich seyn; in den beiden ersten Fällen liegen die Basiskanten im Zikzak, im dritten Falle dagegen in einer Ebene; die beiden ersten Fälle bringen ungleichschenklichte sechsseitige Doppelpyramiden (ungleichschenklichte Dihexaëder, Drei- und Dreikantner) hervor, der dritte Fall erzeugt eine gleichschenklichte sechsseitige Doppelpyramide (schlechtweg Dihexaëder).

Sind es die Basiskanten des Grundrhomboëders, die zugeschärft sind, so giebt das ähnliche Körper, deren Basiskanten mit den Basiskanten des Grundrhomboëders zusammenfallen, und deren Endkanten über den Endkanten und über den Längendiagonalen des Grundrhomboëders liegen, so dass sie durch die Basiskanten des Grundrhomboëders gehen, und sich in einem Puncte auf der verlängerten Axe derselben oberhalb seiner Endspitze schneiden. Da die Basiskanten des Grundrhomboëders immer im Zikzak liegen, so können die Basiskanten dieser Drei- und Dreikantner nie in einer Ebene liegen, von den Endkanten können immer nur je drei und drei von gleicher Länge und Neigung gegen die Axe, und die Winkel, die ihre Flächen an den Endkanten machen, können nie alle einander gleich seyn; oder mit andern Worten, durch Zuschärfung der Basiskanten eines Rhomboëders kann nie ein gleichschenklichtes Dihexaëder entstehen.

Die Flächen des rhomboëdrischen Systems, die der Axe parallel sind, bilden reguläre sechsseitige Prismen oder Säulen, deren benachbarte Flächen unter 120° gegeneinander geneigt sind. Diese Säulen sind zweierlei Art, sie stumpfen entweder die Basisecken oder die Basiskanten des Grundrhomboëders ab. Kommt das Grundrhomboëder mit den Säulenflächen der ersten Art vor, so sind seine Flächen auf die Säulenflächen grade aufge-

setzt; ist es die Säule zweiter Art, so sind die Grundrhomboëderflächen auf den Säulenkanten aufgesetzt; so ist es leicht, die beiden Arten von Säulen von einander zu unterscheiden.

Alle Flächen, die im rhomboëdrischen System vorkommen, sind also entweder Flächen eines Rhomboëders oder eines Drei- und Dreikantner's, oder einer regulären sechsseitigen (oder dreiseitigen) Säule, oder es ist gradangesetzte Endfläche (eine Fläche, die einen rechten Winkel mit der Axe macht). In gewissen Fällen können die Neigungswinkel an den Endkanten des Drei- und Dreikantner's alle einander gleich werden oder der Drei- und Dreikantner kann ein Dihexaëder seyn. Hier ist ein Uebergang des rhomboëdrischen Systems in das dihexaëdrische (sechsgliedriges System. *Weiss*, rhomboëdrisches System mit dirhomboëdrischer Combination. *Mohs*); ein anderer Uebergang geschieht auf folgende Art. Verbindet man zwei gleiche Rhomboëder so, dass ihre Axen zusammenfallen, und dass die Ebenen, die man sich durch die Endkanten der Rhomboëder und ihre Axen gelegt denken kann, und deren es in beiden Rhomboëdern zusammen sechs giebt, gleiche Winkel miteinander machen, d. h. Winkel von 60°, und schneidet alle die Stücke weg, die über die Durchschnitte der sechs Flächen dieser zwei Rhomboëder hinaus liegen, so hat man ein Dihexaëder. Man erhält dasselbe Dihexaëder, wenn man Ebenen durch die Endspitze des Rhomboëders und die Hälfte seiner Kanten an der Basis legt, welche die Ecken an der Basis wegschneiden. Verlängert man im Gegentheil beim Dihexaëder die abwechselnden Flächen bis zum Durchschnitt, so dass die dazwischen liegenden verschwinden, so hat man ein Rhomboëder. Diesen Uebergang aus dem Dihexaëder ins Rhomboëder findet man häufig beim

Quarz; den ersten Uebergang aus dem Rhomboëder ins Dihexaëder, vermittelst eines Drei- und Dreikantner's der zweiten Art, dessen Flächen Zuschärfungen an den Endkanten des Rhomboëders bilden, nehmen wir beim Eisenglanz wahr.

Die Formen des dihexaëdrischen Systems sind nun wieder lauter Modificationen des Dihexaëders, indem die Neigungen der Flächen gegen die Axe sich von einem zum andern ändern. Werden diese Neigungen $= 0°$, so haben wir die reguläre sechsseitige Säule, werden sie gleich 90°, so haben wir die grade Abstumpfung der Spitze des Dihexaëders. Man kann sich auch die Endflächen des dihexaëdrischen Systems als Uebergangsflächen von den Dihexaëderflächen zu den Säulenflächen denken.

Wir haben eben gesehen, wie man von derjenigen Dihexaëderfläche, die die grösste Neigung gegen die Axe hat, durch eine Menge anderer Dihexaëderflächen durch, zu den Flächen der sechsseitigen Säule, auf welche alle diese Dihexaëderflächen grade aufgesetzt sind, gelangt. Man kann eben so jede Dihexaëderfläche zur Säulenfläche, welche derjenigen, auf welche sie grade aufgesetzt ist, benachbart ist, hinüberführen, indem man ihren Neigungswinkel gegen diese Säulenfläche immer grösser und endlich $= 180°$ macht. Die verschiedenen Lagen, die die Dihexaëderfläche bei diesem Uebergange annehmen kann, geben eben so viel neue Flächen ab, deren Durchschnittslinien mit der Säulenfläche alle einander parallel sind, woran man sie auch erkennen kann *). Verfährt man so mit allen Dihex-

*) Da die Säulenfläche einer durch zwei gegenüberliegende Endkanten des Dihexaëders gelegten Ebene parallel ist, so ist klar, dass die Durchschnittslinien der neuen Flächen mit den Dihexaëderflächen auch mit der zunächstliegenden Endkante parallel laufen müssen

aëderflächen, so ist klar, dass die Wege zweier benachbarten Dihexaëderflächen sich durchkreuzen; in den Kreuzungspuncten selbst fallen immer je zwei Flächen, die von zwei benachbarten Dihexaëderflächen herkommen, in eine zusammen, und bilden sechs neue Dihexaëderflächen, die auf die Säulenkanten aufgesetzt sind; vor und nach den Kreuzungspuncten hingegen bekommt man durch hinlängliche Verlängerung der Flächen Formen, bei denen sich zwölf Flächen in einer Endspitze durchschneiden. Es ist merkwürdig, dass die Flächen vor dem Kreuzungspuncte nie, die Flächen nach dem Kreuzungspuncte oft nur zur Hälfte vorkommen, nämlich entweder bloss die, welche auf der linken Seite jeder Säulenkante liegen, oder bloss die, welche auf der rechten Seite der Säulenkante liegen.

9. Als Inbegriff der Formen des quadratoctaëdrischen Systems (viergliedriges System. *Weiss*; pyramidales System. *Mohs*) kann man das Dioctaëder (Vier- und Vierkantner. *Weiss*) ansehen. Dieser Körper ist eine achtseitige Doppelpyramide, deren Flächen alle eine gleiche Neigung gegen die Axe haben, deren Neigungswinkel der Flächen aber nur an den abwechselnden Endkanten einander gleich sind. Wenn man die Neigungswinkel der Flächen an vier abwechselnden Kanten gleich 180° macht, so entsteht ein Quadratoctaëder; lässt man vier abwechselnde Endkanten unbeweglich in derselben Lage, so kann man zweierlei Quadratoctaëder machen, die in einem bestimmten Verhältniss zu einander stehen: macht man die Neigungen der Flächen an den unbeweglichen Endkanten gleich 180°, so entsteht das zweite Octaëder, dessen Endkanten mit den Diagonalen der Flächen des ersten Octaëders zusammenfallen. Jeder dieser Octaëder wird zur rechtwinklicht vierseitigen Säule, wenn man die Neigung seiner Flächen

gegen die Axe gleich 0° macht, ihre Combination giebt eine reguläre achtseitige Säule: macht man diese Neigung gleich 180°, so hat man die grade Abstumpfungsfläche der Endspitze des Octaëders. Das Dioctaëder, wenn die Neigung seiner Flächen gegen die Axe gleich 0° wird, wird zur achtseitigen Säule. Flächen, die sich an der Basis des Quadratoctaëders befinden und deren Durchschnittslinien mit den Octaëderflächen den Octaëderendkanten parallel laufen, kann man als Uebergangsflächen von den Octaëderflächen zu denjenigen Säulenflächen ansehen, auf welche die Octaëderendkanten grade aufgesetzt sind. Diese Flächen, so wie diejenigen, welche Zuschärfungen an den Endkanten des Quadratoctaëders bilden, sind oft auf eigne Säulenflächen aufgesetzt, welche zwischen den acht bereits angeführten liegen.

10. In der zweiten Abtheilung kommen nur Octaëder mit abwechselnd gleichen Endkanten und die graden Abstumpfungen ihrer Kanten und ihrer Ecken vor.

In der Unterabtheilung (*a*) der zweiten Abtheilung kommen mehrere Rhombenoctaëder vor. Am häufigsten hängen die Flächen der verschiedenen Octaëder so untereinander zusammen, dass sie bald als Zuschärfungen der Basiskanten, bald als Zuspitzungsflächen eines gewissen Rhombenoctaëders erscheinen, welche auf die Flächen dieses Octaëders grade aufgesetzt sind; man kann sie als Uebergangsflächen aus einer gradangesetzten Endfläche zur graden Abstumpfung der Basiskanten des Rhombenoctaëders ansehen. Seltner sind Octaëderflächen, die als Zuschärfungen der Endkanten eines Rhombenoctaëders erscheinen. Prismen mit rhombischer Basis kommen mehrere vor: man kann sie als grade Abstumpfungsflächen der Kanten an

der Basis der Rhombenoctaëder ansehen; wirklich findet man auch oft an demselben Krystalle Octaëderflächen, die auf einigen von diesen Säulenflächen grade aufgesetzt sind, aber nicht immer. Eben so ist es mit den graden Abstumpfungsflächen der Endkanten der Rhombenoctaëder; es giebt deren mehrere übereinander liegende, deren Durchschnittslinien mit einander parallel sind und einen rechten Winkel mit der Axe machen; aber es finden sich an demselben häufig die Octaëderflächen nicht, an deren Endkanten sie als Abstumpfungsflächen erscheinen würden. Nimmt man die acht Abstumpfungsflächen aller Endkanten eines Rhombenoctaëders zusammen, so entsteht ein neues Octaëder, dessen Basis ein Rechteck ist, oder ein Rectangulär-octaëder; da dieses aber aus Ebenen zusammen gesetzt ist, die weder eine gleiche Neigung gegen die Axe, noch eine gleiche physikalische Beschaffenheit haben, so ist es als keine einfache Form zu betrachten.

11. Die Säulenflächen, die in der Unterabtheilung (*b*) der zweiten Abtheilung der Krystallsysteme vorkommen, sind ganz denen ähnlich, die in der eben betrachteten Unterabtheilung (*a*) vorkommen; der Unterschied dieser beiden Unterabtheilungen zeigt sich blos in den Endflächen, welche nicht so symmetrisch angeordnet sind, als die Seitenflächen. Dieser Umstand macht die Säulenflächen, mithin die Lage der Axe, leicht kenntlich, während man hingegen bei den Rhombenoctaëdern der Abtheilung (*a*) oft gleichgültig jede der drei aufeinander senkrechten Axen als die Hauptaxe ansprechen kann. Wenn man von den Säulenflächen diejenigen aussucht, die gleicher Art sind, d. h. die gleiche Neigungen gegen die aufeinander senkrechten Unteraxen und gleiche physikalische Beschaffenheit haben, so findet man sie immer zu vieren, welche verbunden ein Prisma mit rhom-

[illegible] Von den Endflächen hingegen finden sich an demselben [illegible] immer nur höchstens zwei Flächen von gleicher physikalischer Beschaffenheit. Bilden die beiden Endflächen gleicher Art eine schieflaufende Zuschärfung, so sind sie nie auf die Säulenflächen grade aufgesetzt; diese Kante ist oft von einer schiefangesetzten Endfläche abgestumpft, die man die vordere nennt, indem man sich den Krystall in aufrechter Stellung so vor sich denkt, dass diese schiefangesetzte Endfläche nach vorn gerichtet ist: nach hinten liegt oft eine ähnliche schief angesetzte Endfläche, die zuweilen dieselbe Neigung gegen die Axe hat, als die vordere, aber nie von derselben physikalischen Beschaffenheit ist. Die hintern Zuschärfungsflächen sind zuweilen von derselben Neigung gegen einander und gegen die Axe, als die vordern, aber nie von derselben physikalischen Beschaffenheit. Die physikalische Verschiedenheit der vordern und der hintern schiefangesetzten Endflächen zeigt sich besonders oft darin, dass der einen ein blättriger Bruch parallel geht, der andern nicht: man denkt sich gewöhnlich den blättrigen Bruch nach vorn gekehrt, so dass die ihm parallele schiefangesetzte Endfläche zur vordern wird; doch ist das ganz willkührlich. Von den vordern und hintern Zuschärfungsflächen, die eine schieflaufende Zuschärfungskante bilden, giebt es mehrere, von denen einige unter sich parallele Kanten bilden, indem die Neigungswinkel der zusammen gehörigen Paare immer spitzer und spitzer werden, von dem Paar angefangen, das die schieflaufende Zuschärfungskante bildet. Gradangesetzte Endflächen giebt es fast gar nicht: und schon an diesem Mangel rechtwinklichter Neigung kann man die Endflächen von den Seitenflächen unterscheiden.

12. Bei den Formen der vierten Abtheilung endlich hört selbst die

Symmetrie in der Anordnung der Säulenflächen auf; es sind ganz unsymmetrische Formen. Von den Säulenflächen sind immer nur je zwei parallele von derselben Art; nimmt man zwei solche Flächenpaare zusammen, so entsteht eine vierseitige Säule mit rhomboïdischer Basis; wenn es Flächen giebt, die die Kanten dieser vierseitigen Säule abstumpfen, so gehen diese Flächen den Diagonalen der Basis parallel, bilden also keine rechte Winkel untereinander, wie bei den Säulen mit rhombischer Basis. Die Endflächen sind so beschaffen, dass es nur eine Fläche von einer gewissen Neigung gegen die Axe an jedem Ende derselben giebt; sie sind so angeordnet, dass je zwei immer eine schieflaufende Zuschärfung bilden: wenn man aber eine Ebene durch die Zuschärfungskante und durch die Axe legt, so haben die beiden Flächen, die die Zuschärfung bilden, nie eine gleiche Neigung gegen diese Ebene. Die Endflächen sind nie grade auf die Säulenflächen aufgesetzt, es giebt weder grad angesetzte Endflächen, noch schieflaufende, die auf eine der Seitenkanten der Säule grade aufgesetzt wären. Die Rechtwinklichkeit mancher Flächen, die in der vorhergehenden Abtheilung wenigstens in der Zone der Säulenflächen möglich war, ist in dieser Abtheilung ganz ausgeschlossen.

13. Die Formen des regulären Systems verdienen eine besondere Betrachtung. Wir wollen sie in der Reihe durchgehen, in welcher sie sich aus dem Würfel (Hexaëder. *Mohs*) oder regulären Octaëder durch Abstumpfung, Zuschärfung und Zuspitzung ihrer Kanten und Ecken entwickeln lässen.

Wenn man die Ecken des Würfels grade abstumpft oder Ebenen durch die Diagonalen seiner Flächen legt, so entsteht das reguläre Octaëder,

aus welchem hinwiederum der Würfel wird, wenn man dessen sechs Ecken grade abstumpft, oder wenn man Ebenen durch dessen Ecken legt, die senkrecht auf den Axen des Octaëders sind. Der Würfel schliesst also das reguläre Octaëder so ein, dass die sechs Ecken des Octaëders in die Mitte der sechs Würfelflächen treffen. Stumpft man hingegen die zwölf Kanten des Würfels grade ab oder legt Ebenen durch dieselben, die eine gleiche Neigung gegen die beiden Würfelflächen haben, welche die Kanten bilden, so erhebt sich eine vierseitige Pyramide über jeder Würfelfläche, die der Pyramide zur Basis dient: die zwei benachbarten Flächen zweier Pyramiden fallen in eine Ebene zusammen, und man hat zwölf Rhomben, die diese neue Form begrenzen: sie heisst Rhombendodecaëder (einkantiges Tetragonaldodecaëder. *Mohs*), oder, nach Weiss's kürzerer Benennung, Granatoëder, weil sie besonders häufig beim Granat vorkommt, dessen blättriger Bruch den Flächen dieser Form parallel geht. Der Würfel wird aber so vom Granatoëder eingeschlossen, dass die Kanten des Würfels mit den kürzeren Diagonalen seiner rhombischen Flächen zusammen fallen. Hieraus ist klar, dass das Rhombendodecaëder zweierlei Ecken hat, nämlich sechs, die sich über den Würfelflächen erheben und durch deren grade Abstumpfung Würfelflächen zum Vorschein kommen, und acht andere, die da liegen, wo der eingeschlossene Würfel seine Ecken hat, und deren grade Abstumpfung dieselben Flächen hervorbringt, als die grade Abstumpfung der Würfelecken, nämlich die Flächen das regulären Octaëders: umgekehrt erscheinen die Flächen des Rhombendodecaëders, wenn wenn man die Kanten des regulären Octaëders grade abstumpft; die längern Diagonalen des Granatoëders fallen mit den Kanten des Octaëders zusam-

men. Stellt man den Würfel so, dass eine Linie, die durch zwei gegenüberliegende Ecken desselben geht und für einen Augenblick als die Axe des Würfels gelten mag, aufrecht steht, so befinden sich drei Kanten des Würfels am obern Ende, drei am untern Ende und sechs sind an der Basis und liegen im Zikzak: die grade Abstumpfung der sechs Kanten an der Basis giebt offenbar eine reguläre sechsseitige Säule, die wir schon beim rhomboëdrischen System kennen gelernt haben; wir können nach und nach alle Kanten des Würfels zu Kanten an der Basis machen, indem wir nacheinander alle vier Axen des Würfels, die durch zwei gegenüberliegende Ecken gehen, und die sich völlig gleich sind, aufrecht stellen; es giebt also keine Fläche des Rhombendodecaëders (denn das sind die Flächen, die aus der graden Abstumpfung der Würfelkanten entstehen), die nicht in die Reihe der Flächen einer regulären sechsseitigen Säule treten könnte oder die nicht unter 120° gegen die benachbarte Fläche geneigt wäre.

Wenn man die Kanten des Würfels zuschärft, oder durch jede Würfelkante zwei Ebenen legt, die eine gleiche Neigung gegen die Würfelflächen haben, welche die Kanten bilden, so erheben sich ebenfalls vierseitige Pyramiden über jeder Würfelfläche, aber die benachbarten Flächen der benachbarten Pyramiden fallen nicht in eine Ebene zusammen. Man hat alsdann den Pyramidenwürfel (hexaëdrisches Trigonal-Icositetraëder. *Mohs*), von denen der merkwürdigste derjenige ist, bei welchem die Höhe der Pyramiden grade den vierten Theil der Würfelkante beträgt. Denkt man sich an diesem Pyramidenwürfel von zwei benachbarten Flächen, die sich in einer Würfelzante schneiden, eine verschwindend, so dass die Verlän-

gerung der übriggebliebenen deren Platz einnimt, und wiederholt dies, nach der sogleich anzuzeigenden Ordnung, an allen Würfelkanten, so entsteht das Pentagondodecaëder (hexaëdrisches Peutagonaldodecaëder. *Mohs*), das man kürzer Pyritoëder nennt, weil es besonders häufig beim Schwefelkies vorkommt. Dieser Körper ist von zwölf fünfseitigen Flächen begrenzt, welche durch zwölf Kanten des Würfels gelegt sind, so dass sie ungleich gegen die beiden Würfelflächen, durch deren Kanten sie gehen, geneigt sind: sie gehen einer Ebene parallel, welche man sich durch eine Kante des Würfels und durch die Hälften der gegenüberliegenden Kanten gelegt denken kann. Um sich die Entstehung dieser Form ganz deutlich zu machen, ziehe man auf einer Würfelfläche zwei sich rechtwinklicht kreuzende Linien, die durch die Mitten der gegenüberliegenden Seiten derselben Würfelfläche gehen; durch eine von diesen Linien und durch die beiden ihr parallelen Seiten der entgegengesetzten Würfelfläche, welche der ersten Würfelfläche parallel geht, lege man zwei Ebenen; man wiederhole dieses Verfahren auf jeder Würfelfläche, doch so, dass man von den zwei sich kreuzenden Linien auf jeder Würfelfläche diejenige wählt, welche mit der auf der benachbarten Fläche gewählten Linie nicht parallel ist. Denkt man sich auf jeder Würfelfläche mehrere der gewählten Linie parallele Linien, so durchkreuzen einander alle Linien, die benachbarten Würfelflächen gehören; und alle Linien, die parallelen Würfelflächen gehören, sind einander parallel. Man findet auf den Würfelflächen des Schwefelkieses oft Streifen, die dieses Gesetz befolgen.

Die Flächen des Pentagondodecaëders bilden Prismen auf jeder Würfelfläche, deren Höhe dem vierten Theil der Würfelkante gleich ist. Wenn

man sich eine Linie denkt, die in dieser Höhe über der Würfelfläche so liegt, dass sie zweien gegenüberliegen Kanten der Würfelfläche parallel, und gleich weit von ihnen entfernt ist, und welche, an Länge drei Vierteln der Würfelkante gleich, in gleichen Entfernungen von den beiden andern Würfelkanten, die sie kreuzen, absteht, so bilden die vier Ebenen, die man sich durch diese Linie und durch die ihr parallelen Seiten der Würfelfläche und durch die Endpuncte dieser Linie und die beiden andern Seiten der Würfelfläche gelegt denken kann, das eben angeführte Prisma, das sich über jeder Würfelfläche erhebt, um den Würfel in ein Pentagondodecaëder zu verwandeln. Die eben beschriebene Linie oder höchste zweien Würfelkanten parallele Kante des Prisma kreuzt die ähnliche Kante des ähnlichen Prisma, das sich über der benachbarten Würfelfläche erhebt; so ist es möglich, dass die je zwei benachbarten Flächen zweier benachbarten Pyramiden in eine Ebene zusammen fallen, und dass die sechs vierseitigen Körper, die sich über die sechs Würfelflächen erheben, eine Form geben, die von zwölf Flächen begrenzt ist.

Die Pyritoëderflächen sind also Fünfecke; die oben erwähnte Linie, welche um ein Viertel Würfelkante über der Würfelfläche erhaben ist und drei Viertel Würfelkante lang ist, bildet eine Seite des Fünfecks; die andern Seiten werden von den Linien gebildet, welche von den Endpuncten der oft erwähnten Linie nach den Würfelecken gehen: sie sind also alle vier untereinander gleich, aber von der ersten verschieden und kleiner als dieselbe. Das Pyritoëder ist also von dem regelmässigen Pentagondodecaëder der Geometer verschieden.

Sieht man die längste Seite des Fünfecks als die Grundlinie an, so sind die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich; von den drei übrigen Winkeln ist der an der Spitze des Fünfecks verschieden von den beiden andern, die wieder unter sich gleich sind. Diese verschiedenen ebenen Winkel bilden zweierlei verschiedene Ecken: die erste Art von Ecken wird von zwei Winkeln an der Grundlinie und einem Winkel an der Spitze des Fünfecks, die zweite Art von dreien der übrigen Winkel gebildet; die Ecken erster Art liegen zu beiden Enden der Grundlinie jedes Fünfecks und werden von einer Granatoëderfläche abgestumpft; die Ecken zweiter Art fallen auf die Ecken des vom Pentagondodecaëder eingeschlossenen Würfels und werden von Octaëderflächen abgestumpft.

Am regulären Octaëder erscheinen die Flächen des Pentagondodecaëders als Zuschärfungen der Octaëderecken, auf die Octaëderkanten grade aufgesetzt, welche Ebenen parallel gehen, die man sich durch die Octaëderecken und durch das Viertel der gegenüberliegenden Axe gelegt denken kann; diese Zuschärfungen sind so angeordnet, dass auf jeder Octaëderkante nur eine Zuschärfungsfläche grade aufgesetzt ist; so dass die Zuschärfungskanten der benachbarten Ecken sich kreuzen.

Am Granatoëder erscheinen die Flächen des Pentagondodecaëders als Zuschärfungsflächen derjenigen Ecken, aus deren grader Abstumpfung Würfelflächen werden. Diese Zuschärfungsflächen sind auf die Flächen des Granatoëders grade aufgesetzt, d. h. die Durchschnittslinien der Zuschärfungsflächen mit den Flächen des Granatoëders sind den kleinen Diagonalen der letztern parallel; sie sind wieder so angeordnet, dass die Zuschärfungskanten zweier benachbarten Ecken sich kreuzen.

Das Pentagondodecaëder, dessen Flächen die Würfelkanten so abstumpfen, dass die abgeschnittenen Stücke der rechtwinklichten Kanten sich wie 1 : 2 verhalten, ist das gewöhnliche des Schwefelkieses, und trägt allein den Namen Pyritoëder; es giebt indessen noch zwei andere Pentagondodecaëder, deren Flächen eine andere Neigung gegen die Würfelflächen haben, die aber im Uebrigen ganz dasselbe äussere Ansehen und dieselben allgemeinen Eigenschaften haben.

Wenn man die vier und zwanzig Kanten des Rhombendodecaëders grade abstumpft, so entsteht eine Form, die man häufig beim Leucit findet, und die deshalb von Weiss Leucitoëder benannt worden ist; Mohs nennt sie zweikantiges Tetragonal - Icositetraëder.

Diese Form ist aus vier und zwanzig vierseitigen Flächen zusammen gesetzt. Wenn man eine grade vierseitige Pyramide über jeder Fläche des Rhombendodecaëders als Basis construirt, und immer je zwei benachbarte Flächen zweier benachbarten Pyramiden in eine Ebene zusammen fallen lässt, so entsteht derselbe Körper. Da die Basis dieser Pyramiden ein Rhombus ist, so sind die Endkanten der Pyramiden von ungleicher Länge; jede Fläche des Leucitoëders wird also von vier Linien gebildet, von denen zwei kürzer sind, als die beiden andern; der Neigungswinkel der beiden kürzeren Linien wird stumpf, der Neigungswinkel der beiden längeren wird spitz seyn; die beiden Neigungswinkel der kürzeren und längeren Linien sind einander gleich. Der stumpfe ebene Winkel der Leucitoëderflächen ist offenbar doppelt so gross, als der stumpfere ebene Winkel an der Basis der Pyramide, der von der kürzern Pyramidenendkante und der Seite der Basis (oder der Kante des Granatoëders) gebildet wird; der spitze ebene

Winkel der Leucitoëderfläche ist offenbar doppelt so gross, als der spitzere ebene Winkel an der Basis der Pyramide, der von der längern Pyramidenkante und der Seite der Basis gebildet wird. Die beiden gleichen ebenen Winkel der Leucitoëderfläche sind offenbar den ebenen Winkeln an der Spitze der Pyramide gleich.

Die Leucitoëderflächen entstehen auch durch Zuspitzung der Würfelecken; die Zuspitzungsflächen sind auf die Würfelflächen grade aufgesetzt, oder ihre Durchschnittslinien mit den Würfelflächen sind den Diagonalen der Würfelflächen parallel; die Zuspitzungsflächen sind Ebenen parallel, welche durch die eben erwähnten Diagonalen der Würfelflächen und durch die Hälften derjenigen Würfelkanten gehen, welche auf die Würfelfläche, in welcher die Diagonale liegt, senkrecht sind, und sich der Diagonale gegenüber befinden. Aus der Lage der Würfelecken im Granatoëder wird klar, das die neue Ecke, welche von den Zuspitzungsflächen der Würfelecke an Stelle der Würfelecke gebildet wird, von den stumpfen ebenen Winkeln der Leucitoëderflächen zusammengesetzt wird; die grade Abstumpfung einer solchen Ecke giebt eine Octaëderfläche. Die spitzen ebenen Winkel der Leucitoëderflächen dagegen treffen zu vieren zusammen und bilden Ecken eigner Art, durch deren grade Abstumpfung Würfelflächen zum Vorschein kommen. Die mittleren ebenen Winkel der Leucitoëderflächen, von denen sich auf jeder Fläche zwei gleiche befinden, kommen ebenfalls zu vier zusammen und bilden Ecken einer dritten Art, deren grade Abstumpfung die Granatoëderfläche giebt. Das Leucitoëder hat also Ecken von dreierlei Art, deren grade Abstumpfungen sechs Würfelflächen,

acht Octaëderflächen und zwölf Granatoëderflächen geben, also überhaupt sechs und zwanzig Ecken.

Am Octaëder erscheinen die Leucitoëderflächen als Zuspitzungsflächen der Octaëderecken, welche auf die Octaëderflächen grade aufgesetzt sind und einer Ebene parallel gehen, die man sich durch eine Kante an der Basis des Octaëders und den vierten Theil der Axe oder durch den dritten Theil der Diagonale der gegenüber liegenden Fläche gelegt denken kann.

Am Pentagondodecaëder erscheinen sie als dreiflächige Zuspitzungen derjenigen Ecken, durch deren Abstumpfung die Octaëderflächen zum Vorschein kommen; diese drei Zuspitzungsflächen sind auf die Kanten, welche den der Grundlinie gegenüberliegenden ebenen Winkel des Fünfecks bilden, aufgesetzt. Umgekehrt erscheinen die Pyritoëderflächen am Leucitoëder als grade Abstumpfungrn zweier gegenüberliegender Kanten von den vier Kanten, die in einer von den spitzen ebenen Winkeln der Leucitoëderflächen gebildeten Ecke zusammen kommen. Finden sich diese Abstumpfungsflächen an allen vier Kanten, so entsteht, wie schon aus den obigen Bemerkungen über das Pentagondodecaëder klar ist, ein Pyramidenwürfel, mit doppelt so viel Flächen, als das Pyritoëder deren hat.

Wir haben eben gesehen, dass die Leucitoëderfläche, von der bisher die Rede gewesen ist, als Zuspitzungsfläche der Würfelecke erscheint, welche einer Ebene parallel ist, die durch die Diagonale der Würfelfläche und die Hälfte der gegenüberliegenden Kante geht. Es giebt noch andere Flächen, die weniger oder mehr von der gegenüberliegenden Kante abschneiden; diese bilden ähnliche Körper, die Mohs ebenfalls zweikantige Tetragonal - Isocaëder nennt, und welche Weiss durch den Namen Leucitoïde

unterscheidet, weil sie sich zum Leucitoëder ungefähr so verhalten, wie die Sphäroide zur Kugel. Sie sind stumpfer oder schärfer als das Leucitoëder, je nachdem die vier Flächen, die sich im Mittelpunct der Würfelfläche vereinigen, mehr oder weniger gegen die Axe geneigt sind, als beim Leucitoëder.

Es giebt noch mehrere Pyramidenwürfel, welche alle als Zuschärfungsflächen der Würfelkanten erscheinen, aber keiner von ihnen erscheint so oft mit halbzähligen Flächen, wie derjenige Pyramidenwürfel, der mit der halben Anzahl seiner Flächen im Pyritoëder auftritt.

Das Pyramidenoctoëder (octaëdrisches Trigonal - Icositetraëder. *Mohs*) entsteht, wenn man sich über jeder Octaëderfläche als Basis eine dreiseitige Pyramide construirt. Die Flächen dieser Körper erscheinen am Würfel als Zuspitzungsflächen seiner Ecken, auf die Kanten grade aufgesetzt, oder als Uebergangsflächen zwischen Octaëderfläche und Granatoëderfläche. Am Granatoëder bilden sie eine dreiflächige Zuspitzung derjenigen Ecken, welche aus drei stumpfen ebenen Winkeln der rhombischen Flächen des Granatoëders zusammengesetzt sind; die Zuspitzungsflächen sind auf die Flächen aufgesetzt und zwar so, dass ihre Durchschnittslinien mit denselben ihren langen Diagonalen parallel laufen.

Am Leucitoëder erscheinen die Flächen des Pyramidenoctaëders als dreiflächige Zuspitzung derjenigen Ecken, welche aus drei stumpfen ebenen Winkeln der Leucitoëderflächen gebildet sind, und bei deren grader Abstumpfung eine Octaëderfläche zum Vorschein kommt; die Zuspitzungsflächen sind auf die Leucitoëderflächen grade aufgesetzt.

Am Pentagondodecaëder endlich kommen sie als Zuspitzungsflächen derjenigen Ecken vor, aus deren grader Abstumpfung die Octaëderfläche entsteht; die Zuspitzungsflächen sind auf die Flächen des Pyritoëders schief aufgesetzt.

Wenn man vierseitige Pyramiden über den Flächen des Granatoëders construirt, deren Basen eben diese Flächen sind, so entstehen Pyramidengranatoëder (Tetracontaoctaëder. *Mohs*), deren Flächen als Zuschärfungen der Kanten der Granatoëder erscheinen. Diese Flächen bilden am Octaëder sechsseitige Pyramiden, die sich über die Octaëderflächen, die ihnen als Basen diesen, so erheben, dass drei abwechselnde Endkanten in die ebenen Winkel der Octaëderfläche treffen, die drei andern aber ausserhalb dieser Fläche durch die verlängerten Diagonalen derselben gehen. Man kann deshalb diese Formen auch doppelte oder gebrochene Pyramidenoctaëder nennen, weil die Anzahl ihrer Flächen doppelt so gross ist, als beim gewöhnlichen Pyramidenoctaëder. Dieselbe Form bildet über den Würfelflächen achtseitige Pyramiden, von denen vier abwechselnde Endkanten in die vier ebenen Winkel der Würfelfläche treffen, die vier andern aber Linien durchschneiden, welche parallel den Seiten der Würfelfläche durch deren Mitte gehen. Will man diese Form einen doppelten oder gebrochenen Pyramidenwürfel nennen, so bedeutet diese Benennung dasselbe, als gebrochenes oder doppeltes Pyramidenoctaëder. Man kann diese Form als die vielflächigste einfache Form des ganzen Systems ansehen, aus der sich alle übrigen Formen desselben Systems herleiten lassen.

Das sind die einfachsten Formen des regulären Systems; ihre Combination giebt noch mehrere zusammengesetzte Formen, die zum Theil eigne

Namen bekommen haben. Folgende Zusammenstellung giebt eine deutliche Uebersicht aller dieser Formen und ihrer Benennungen:

Würfel

- mit grade abgestumpften Ecken: Octaëderflächen.
- mit grade abgestumpften Kanten: Granatoëderflächen.
- mit schief abgestumpften Kanten: Pyritoëderflächen.
- mit zugeschärften Kanten: Pyramidenwürfelflächen.
- mit dreifach zugespitzten Ecken:
  - die Zuspitzungsflächen auf die Flächen aufgesetzt: Leucitoëderflächen.
  - die Zuspitzungsflächen auf die Kanten aufgesetzt: Pyramidenoctaëderflächen.
- mit sechsfach zugespitzten Ecken: Pyramidengranatoëderflächen (gebrochenes Pyramidenoctaëder oder gebrochener Pyramidenwürfel).

Octaëder

- mit grade abgestumpften Ecken: Würfelflächen.
- mit grade abgestumpften Kanten: Granatoëderflächen.
- mit zugeschärften Ecken, die Zuschärfungsflächen auf die Kante aufgesetzt: Pyritoëderflächen (Icosaëder).
- mit zugeschärften Kanten: Pyramidenoctaëderflächen,
- mit vierfach zugespitzten Ecken:
  - die Zuspitzungsflächen auf die Flächen aufgesetzt: Leucitoëderflächen.
  - die Zuspitzungsflächen auf die Kanten aufgesetzt: Pyramidenwürfelflächen.
- mit achtfach zugespitzten Ecken: Pyramidengranatoëderflächen.

Granatoëder

- an den scharfen Ecken grade abgestumpft: Würfelflächen.
- an den stumpfen Ecken grade abgestumpft: Octaëderflächen.
- mit grade abgestumpften Kanten: Leucitoëderflächen.
- an den scharfen Ecken zugeschärft, die Zuschärfungsflächen auf die Flächen aufgesetzt: Pyritoëderflächen.
- an den Kanten zugeschärft: Pyramidengranatoëderflächen.
- an den scharfen Ecken vierfach zugespitzt, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen aufgesetzt: Pyramidenwürfelflächen.
- an den stumpfen Ecken dreifach zugespitzt, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen aufgesetzt: Pyramidenoctaëderflächen.

Leucitoëder

hat dreierlei Ecken. Die spitzen werden von den spitzen, die stumpfen von den stumpfen, die mittleren von den mittleren ebenen Winkeln der Leucitoëderflächen gebildet,

- die spitzen Ecken grade abgestumpft: Würfelflächen.
- die stumpfen Ecken grade abgestumpft: Octaëderflächen.
- die mittlern Ecken grade abgestumpft: Granatoëderflächen.
- die Kanten an den spitzen Ecken grade abgestumpft,
  - alle vier zugleich: Pyramidenwürfelflächen.
  - nur zwei gegenüberliegende an jeder Ecke: Pyritoëderflächen.
- die Kanten an den stumpfen Ecken, oder die kurzen Seitenlinien der Leucitoëderflächen grade abgestumpft: Pyramidenoctaëderflächen.
- die mittleren Ecken vierfach zugespitzt, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen aufgesetzt: Pyramidenoctaëderflächen.

Pyritoëder { hat zweierlei Ecken: die Ecken an der Grundlinie des Fünfecks und die Würfelecken, durch deren Abstumpfung die Octaëderflächen erscheinen,

die Ecken an der Grundlinie abgestumpft: Granatoëderflächen.
die Würfelecken abgestumpft: Octaëderflächen (Icosaëder).
die Grundlinien grade abgestumpft: Würfelflächen.
die Ecken an der Grundlinie zugeschärft,
die Zuschärfungsfläche auf die Flächen,
die sich in der Grundlinie schneiden,
aufgesetzt: halbzählige Pyramidengranatoëderflächen.
die Würfelecken dreifach zugespitzt, die
Zuspitzungsflächen auf die Kanten auf-
gesetzt: Leucitoëderflächen.
die Würfelecken dreiflächig zugespitzt,
die Zuspitzungsflächen auf die Flächen
aufgesetzt: Pyramidenoctaëderflächen.

14. Um die Aufzählung aller Formen, die vorkommen können, vollständig zu machen, bleibt uns noch übrig, von denjenigen Ausnahmen zu sprechen, die das Gesetz des Parallelismus der Flächen erleidet; denn bei allen bisher angeführten Formen geht jeder Fläche eine andere parallel. Die aus dieser Halbirung der Flächenanzahl entstehenden Formen kommen fast nur in der ersten Abtheilung und im regulären System vor; im regulären System begreift man sie unter dem Namen der tetraëdrischen Formen. Wenn man beim regulären Octaëder von zwei parallelen Flächen immer eine unterdrückt, oder, bei aufrechter Stellung der Axe, zwei gegenüberliegende Flächen oben und zwei gegenüberliegende, die den oberen nicht parallel sind, unten, hinlänglich verlängert, bis sie sich schneiden,

so dass die benachbarten Flächen verschwinden, so entsteht eine Form, die von vier gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist und die man das reguläre Tetraëder nennt. Dieses Tetraëder giebt durch grade Abstumpfung der Ecken das vollständige Octaëder, durch grade Abstumpfung der Kanten den Würfel. Man sieht leicht ein, dass die Veränderungsflächen an diesem Körper keine andere seyn können, als diejenigen, die beim regulären Octaëder vorkommen: nur kommen sie oft nur zur Hälfte vor, mit Weglassung der parallen Flächen.

Die Kanten der Tetraëder werden von der Hälfte der Flächen des Leucitoëders zugeschärft; es bilden sich dreiseitige Pyramiden über jeder Tetraëderfläche; es entsteht ein Körper der von zwölf gleichschenklichte Dreiecken begrenzt ist, unter denen es keine parallele giebt; diese dem äussern Ansehen nach so sehr vom Leucitoëder abweichende Form ist doch nichts weiter, als ein Leucitoëder (oder Leucitoïd) mit der halben Anzahl seiner Flächen, indem von zwei parallelen Flächen des Leucitoëders immer eine unterdrückt ist. Man kann diese Körper im Allgemeinen Pyramidentetraëder (Trigonaldodecaëder. *Mohs*) nennen, und diejenige Varietät derselben, welche durch Unterdrückung der halben Anzahl der Flächen des Leucitoëders entsteht, durch die Benennung tetraëdrisches Leucitoëder unterscheiden.

Die andere Hälfte der Flächen des Leucitoëders erscheint in dreiflächigen Zuspitzungen der Ecken des Tetraëders, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten des Tetraëders grade aufgesetzt. Oft finden sich beiderlei Flächen, die Zuschärfungsflächen der Kanten und die eben erwähnten Zuspitzungsflächen der Ecken des Tetraëders, an demselben Tetraëder zugleich, und bilden dann, hinlänglich verlängert, das vollständige Leucitoëder. Es ist

1677

klar, dass diese Flächen ein eben solches Pyramidentetraëder bilden, als die Zuschärfungsflächen der Kanten des Tetraëders. Diese Zuspitzungsflächen der Ecken eines Tetraëders erscheinen als Zuschärfungsflächen der Kanten eines andern Tetraëders, das dem ersten gleich ist, und aus demselben Octaëder gebildet ist, nur mit den vier andern Octaëderflächen, die man bei der Bildung des ersten Tetraëders unterdrückt hat.

Die Granatoëderflächen erscheinen am Tetraëder als dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, auf die Flächen des Tetraëders aufgesetzt, und sind vollzählig. Solche Zuspitzungsflächen können auch Pyramidenoctaëderflächen seyn, die sich dann in halber Anzahl finden und für sich allein, hinlänglich verlängert, das tetraëdrische Pyramidenoctaëder (zweikantiges Tetragonaldodecaëder. *Mohs*) bilden; die Begrenzungsflächen dieser Form sind Vierecke, den Flächen des Leucitoëders ähnlich, indem auch bei ihnen zwei gleiche und zwei ungleiche ebene Winkel einander gegenüber liegen.

Wenn man die Ecken des Tetraëders mit drei Flächen so zuspitzt, dass die Zuspitzungsflächen schief auf die Flächen des Tetraëders aufgesetzt sind, so entsteht, bei einer gewissen Neigung dieser Flächen, das Pentagondodecaëder; bei andern Neigungen aber entsteht zwar auch ein Körper, der von zwölf Fünfecken begrenzt ist; diese Fünfecke haben aber lauter ungleiche ebene Winkel, und von vieren ihrer Seiten sind nur je zwei und zwei einander gleich. Mohs nennt diesen Körper das tetraëdrische Pentagonaldodecaëder.

Eine sechsflächige Zuspitzung der Tetraëderecken giebt einen Körper, der von vier und zwanzig ungleichseitigen Dreiecken begrenzt ist und welchen Mohs tetraëdrisches Trigonal-Icositetraëder nennt.

Wenn wir weiterhin, bei Berechnung der Winkel, die die Krystallflächen überhaupt untereinander machen, vom regulären System besonders handeln werden, werden wir diese Formen und ihre geometrischen Verhältnisse genauer betrachten und zugleich ihre Winkel angeben.

15. Solche Ausnahmen vom Parallelismus der Flächen finden sich noch beim dihexaëdrischen System; ich habe diese Flächen schon in No. 8. angeführt; es sind diejenigen, welche die Kante zwischen einer Dihexaëderfläche und derjenigen Säulenfläche, welche der Säulenfläche, auf die die Dihexaëderfläche grade aufgesetzt ist, benachbart ist, schief abstumpfen, und welche sich oft nur in halber Anzahl finden; alsdann sind sie entweder alle nach links oder alle nach rechts gewendet, und zwei entgegengesetzte sind einander nicht parallel. Solche Flächen in halber Anzahl finden sich beim Quarz, viel seltner beim Apatit; beim Beryll sind sie vollzählig, gehören also eigentlich nicht hieher.

In den übrigen Systemen, z. B. im System der Rhombenoctaëder, finden sich diese halbzählige Flächen so selten, dass sie kaum eine besondere Erwähnung verdienen.

Von den primären und secundären Formen.

16. Wenn man eine Reihe von Krystallen desselben Körpers vor sich hat, so bemerkt man leicht, dass gewisse Flächen sich fast in allen Formen wiederfinden, andere hingegen ab und zu treten, so dass eigentlich nur diese letztern die Verschiedenheit der Krystallformen derselben Substanz begründen, wenn man blos auf die Winkel sieht, und die Aenderung der Dimensionen unbeachtet lässt. Wir wollen diese Flächen, die sich fast

an allen Krystallformen derselben Substanz wiederfinden, vor der Hand primäre Flächen nennen, mit dem Vorbehalt, diesem Namen, der auf eine so schwankende Definition gegründet ist, sphäterhin eine bestimmtere Bedeutung zu geben; die übrigen Flächen aber, die sich bald vorfinden, bald nicht, wollen wir secundäre Flächen nennen. Wir werden uns nachher überzeugen, dass die Formen, die man sich von den secundären Flächen begrenzt denken kann, auf eine sehr einfache Art mit den Formen, welche die primären Flächen bilden, zusammen hängen; und indem wir diese Einfachheit des Zusammenhangs zwischen den primären und secundären Flächen als nothwendiges Bedingniss aller Krystallbildung aufstellen, haben wir ein Criterium, woran wir alle Formen, die bei den Krystallen vorkommen können, sicher von den übrigen geometrisch möglichen Formen unterscheiden können. Dieses einfache Gesetz der Krystallbildung ist von Haüy entdeckt worden, und es ist hier am Orte, eine Darstellung seiner wichtigen Theorie der primären Formen zu geben.

Haüy's Theorie. Durchgang der Blätter.

17. Man unterscheidet Krystalle und krystallinische Substanzen. Krystalle sind die von Ebenen begrenzten Körper, von denen wir bisher gehandelt haben; wenn man aber alle Begrenzungsebenen zerstört hat, so zeigt die innere Substanz der Krystalle doch noch Eigenschaften, die sie von der gewöhnlichen Substanz unterscheiden und eine besondere Benennung (krystallinische Substanz) rechtfertigen. Diese Eigenthümlichkeit der krystallinischen Substanz besteht darin, dass sie nach gewissen Richtungen

leichter bricht, als nach andern, wenn sie irgend einer mechanischen Gewalt nicht mehr widerstehen kann. Die Brüche geschehen alsdann nach gewissen parallelen Ebenen, welche den krystallinischen Körper in eine unendliche Menge dünner Tafeln oder Blätter zerschneiden, und die man deshalb blättrige Brüche oder Blätterdurchgänge nennt. Gewöhnlich hat jede krystallinische Substanz mehrere solcher Ebenen, welchen die Blätter, in die sich die Substanz mit grösserer oder geringerer Mühe spalten lässt, parallel gehen; diese Spaltungsebenen schneiden sich unter Winkeln, die sich bei derselben Substanz immer gleich bleiben; oft lässt sich die Substanz nach der einen Richtung leichter spalten, als nach der andern, und auch diese Verschiedenheit ist bei derselben Substanz constant. Wir haben auf diese Verschiedenheit der Vollkommenheit der Brüche in derselben Substanz schon oben bei der Eintheilung der Krystallformen in vier Abtheilungen aufmerksam gemacht.

Einige Blätterdurchgänge sind sehr deutlich, andere sehr versteckt und schwer zu erhalten. Von den deutlichen haben manche Substanzen nur einen, manche mehrere von gleicher oder verschiedener Vollkommenheit, die sich unter gleichen oder verschiedenen Winkeln schneiden.

Man kann die Blätterdurchgänge aller Substanzen in folgende Abtheilungen bringen:

1) Substanzen mit einem deutlichen Durchgang der Blätter: Glimmer;
2) Substanzen mit zwei deutlichen Durchgängen der Blätter
   a) die sich rechtwinklicht schneiden und von ungleicher Vollkommenheit sind: Feldspath;
   b) die sich schiefwinklicht schneiden, von gleichem Werth: Hornblende.

3) Substanzen mit drei deutlichen Durchgängen der Blätter

a) die sich rechtwinklicht schneiden,

α) von gleichem Werth: Bleiglanz;

β) von ungleichem Werth: Anhydrit;

b) die sich schiefwinklicht schneiden,

α) von gleichem Werth: Kalkspath;

β) von ungleichem Werth: Gyps, Schwerspath;

(bei diesen beiden Substanzen machen die weniger deutlichen Blätterdurchgänge zwar einen schiefen Winkel untereinander, aber einen rechten mit dem deutlichsten Blätterdurchgang.)

4) Substanzen mit vierfachem Durchgang der Blätter: Flussspath. Die vier Blätterdurchgänge des Flussspathes sind von gleichem Werth und gehen den Flächen eines regulären Octaëders parallel.

5) Substanzen mit sechsfachem Blätterdurchgang: Blende. Die sechs Blätterdurchgänge der Blende sind von gleicher Vollkommenheit und gehen den Flächen eines Granatoëders parallel.

6) Substanzen mit mehrfachem Durchgang der Blätter.

Wo bei den als Beispiele angeführten Substanzen die Neigung, sich nach gewissen Richtungen zu spalten, gross ist, findet man fast bei jedem Krystall im Innern desselben parallele Sprünge, welche die Richtung der Spaltungsebenen befolgen, und alsdann bemerkt man leicht, dass ein constanter Zusammenhang zwischen diesen Spaltungsebenen und den äusseren Begrenzungsflächen des Krystalls statt findet. Man nennt dies die Beziehung des äussern Baues oder der Begrenzung der Krystalle zum innern Bau oder zur Structur derselben. Zuweilen gehen einige äussere Flächen

des Krystalls den Ebenen der Blätterdurchgänge parallel, und dann ist ihre Beziehung untereinander klar; in andern Fällen befolgen die äussern Begrenzungsflächen mittlere Richtungen, und diese sollen uns besonders beschäftigen.

Der Kalkspath krystallisirt oft in regulär-sechsseitigen Säulen mit gradangesetzter Endfläche. Zerbricht man einen solchen Krystall, so zerspringt er in lauter regelmässige Bruchstücke, deren Flächen den Flächen eines Rhomboëders von 105° — 5′ Flächenneigung parallel gehen. Ergänzt man aus diesen Bruchstücken wieder den Krystall, oder verfolgt auch nur mit dem Auge, ohne ihn zu zerbrechen, die Richtungen der Sprünge im Innern desselben, die sich besonders deutlich beobachten lassen, wenn man den Krystall geschickt gegen das Tageslicht dreht, so wird man finden, das alle diese Sprünge den Flächen eines einzigen Rhomboëders parallel gehen, dessen Lage man sich im Krystall so denken kann, wie Fig. 17 es darstellt. Die Spitze des Rhomboëders trifft in die Mitte der gradangesetzten Endfläche, und die Seitenflächen der Säule gehen, mit der Axe parallel, durch die Kanten an der Basis des Rhomboëders.

Jede Säulenfläche, wie *fdd′f′*, erscheint also als Abstumpfung einer Kante an der Basis des Rhomboëders, die einer durch zwei gegenüberliegende Endkanten *AE*, *A′K* gelegten Ebene parallel ist. Stösst man an die Ecke, so springt sie so ab, dass eine der Rhomboëderfläche *AEOI* parallele Ebene an ihre Stelle tritt, und so mit allen Ecken, so dass also die Rhomboëderflächen als dreiflächige Zuspitzungen, auf die abwechselnden Seitenkanten der Säule aufgesetzt, erscheinen.

Eine andere reguläre sechsseitige Säule des Kalkspaths, mit gradangesetzter Endfläche, Fig. 18 und 19, springt so, dass alle Spaltungsebenen den Flächen eines Rhomboëders parallel gehen, dessen Spitze ebenfalls in die Mitte der gradangesetzten Endfläche trifft, dessen Ecken an der Basis aber so liegen, dass die Säulenflächen dieselben abstumpfen. An dieser Säule springen nicht die Ecken, sondern die Kanten *lf*, *fd*, *ml* etc. ab, und es erscheinen an ihrer Stelle Ebenen, die mit der Fläche des eingeschriebenen Rhomboëders parallel laufen, so dass also die Säule von den Rhomboëderflächen dreiflächig zugespitzt wird, die Zuspitzungsflächen auf die abwechselnden Säulenflächen grade aufgesetzt.

Die abgesprungenen Ecken oder Kanten, wenn man sie weiter zerschlägt, zerspringen wieder in lauter Rhomboëder, und man kann diese Theilung so weit fortsetzen, als unsere Instrumente und Sinne es nur erlauben. Man mag sein Instrument anlegen, an welchen Punct man will, die Sprünge befolgen immer drei Richtungen oder Spaltungsebenen, welche die bekannten Winkel der Rhomboëderflächen des Kalkspaths mit einander machen.

Diesen Umstand hat Haüy zu einer sinnreichen Hypothese benutzt, welche, gehörig entwickelt, nicht nur den schon angedeuteten Zusammenhang, der zwischen den Flächen desselben Krystalls statt findet, vollständig erklärt, sondern auch den Geometer in den Stand setzt, aus gewissen bekannten Winkeln alle übrigen zu berechnen.

18. Haüy nennt das Rhomboëder, welches durch Abstossung der Ecken der regulären sechsseitigen Säule, Fig. 17, oder durch Abstossung der Endkanten der Säule, Fig. 18, entsteht den Kern (*noyau*) des Krystalls. Da

die abgestossenen Ecken oder Kanten der Säule wieder aus einer unendlichen Menge kleiner Rhomboëder von derselben Gestalt bestehen, welche mit ihren parallelen Flächen aneinander hängen, so kann man sich vorstellen, dass der Kern durch einen Aufbau von sehr kleinen Rhomboëdern, deren Flächen sich respectiv parallel bleiben, zur regulären sechsseitigen Säule mit gradangesetzter Endfläche ergänzt werde. Haüy nennt deshalb die kleinen Rhomboëder, die sich in regelmässigen Haufen über die Flächen und Ecken des Kerns erheben, und die beim Kalkspath dem Kern völlig ähnlich sind, Ergänzungsatome (Molecules intégrantes). Bei denjenigen Substanzen, wo die Ergänzungsatome eine andere Form haben, als der Kern, unterscheidet man die Form des letztern unter dem Namen primitive Form (forme primitive) oder Kerngestalt. Um den Aufbau der Ergänzungsatome über den Flächen der Kerngestalt graphisch zu verfolgen, wollen wir die einfachste Krystallform, den Würfel, als Beispiel wählen. Der Würfel zerfällt durch Spaltungsebenen, die seinen Flächen parallel gehen, in lauter eben solche Würfel, die man so klein machen kann, als man will: die Ergänzungsatome des Würfels sind also ebenfalls Würfel. Wir wollen nun auf drei benachbarten Flächen des Würfels die Ergänzungsatome so übereinander schichten, wie es in Fig. 20 abgebildet ist. Man muss sich in dieser Zeichnung die Ergänzungsatome viel kleiner und in verhältnissmässig grösserer Menge vorstellen.

Man sieht dass sich über jeder Würfelfläche, z. B. über *EOI*, ein pyramidaler Haufe von kleinen Würfeln erhebt, die sich mit ihren parallelen Flächen so aneinander legen, dass weder zwischen den Ergänzungswürfeln selbst, noch zwischen diesen und dem Kernwürfel Zwischenräume übrig

bleiben. Diese Würfelchen sind so angeordnet, dass die erste Schicht, welche unmittelbar auf der Kernfläche *EOI* liegt, auf dieser Fläche so viel Rand übrig lässt, dass noch eine Reihe Würfelchen rund umher da Platz hätte. Die zweite Schicht verhält sich zur ersten eben so, wie die erste zur Kernfläche, und so geht es im Abnehmen fort, bis an die Spitze der der Pyramide, wo sich nur ein Würfelchen *s* befindet. Nimmt man wie in der Figur die Würfelchen so gross, dass ihre Seite grade den 17ten Theil der Kante des Kernwürfels beträgt, so besteht

die erste Schicht aus 225 Würfelchen, 15 in einer Reihe.
— zweite —— 169 —— 13 ——
— dritte —— 121 —— 11 ——
— vierte —— 81 —— 9 ——
— fünfte —— 49 —— 7 ——
— sechste —— 25 —— 5 ——
— siebente —— 9 —— 3 ——
— achte —— 1 Würfelchen.

Denkt man sich jetzt die Würfelchen unendlich klein, so gehören viel Schichten dazu, um sie bis auf eines abnehmen zu lassen; die Höhe der Pyramide wird übrigens dieselbe seyn und die vorspringenden Kanten der Würfelreihen werden so nahe an einander treten, dass sie eine Ebene bilden werden, welche dieselbe Lage hat, als wenn man eine Ebene durch die Kante *OI* des Kernwürfels und durch die obere Kante des Würfelchens *s* legt. Man sieht leicht ein, dass diese Ebene eine gleiche Neigung gegen die Würfelfläche *EOI* als gegen die Würfelfläche *OIO′I′* haben muss: es

ist also, wie aus der in No. 13. gegebenen Zusammenstellung aller Formen des regulären Systems klar ist, die Fläche des Rhombendodecaëders.

Haüy nennt dieses Abnehmen der Reihen der Ergänzungsatome auf den Flächen einer Kerngestalt, wodurch eine neue auf die Kernfläche geneigte Fläche gebildet wird, eine Decrescenz (decroissement, reculement); hat sie, wie in dem eben betrachteten Fall, an den Kanten statt, so ist es eine Decrescenz an den Kanten (decroissement sur les bords).

Um den Würfel zu einem Rhombendodecaëder zu ergänzen, schichtet man die Ergänzungsatome so aufeinander, dass auf eine Reihe in die Breite eine Reihe in die Höhe wegfällt. In der Figur 21 sind hingegen die Würfelreihen so aufgebaut, dass von der Kante *OI* aus auf zwei Reihen in die Breite eine Reihe in die Höhe wegfällt; eine solche Decrescenz bringt offenbar eine Fläche hervor, die stärker gegen die Würfelfläche *EOI* geneigt ist, als die Fläche des Rhombendodecaëders, die aus einer Decrescenz von einer Reihe in die Breite auf eine Reihe in die Höhe entsteht. Die Ebene die man durch die Würfelkante *DI* und durch die obere Kante der Würfelreihe *pq* legen kann, hat dieselbe Lage als die Fläche des Pentagondodecaëders. Damit der Würfel ganz zu dieser Gestalt ergänzt werde, muss man die Ebene über die Kante *OI* hinaus verlängern: und das geschieht offenbar durch eine Decrescenz von zwei Reihen in die Höhe gegen eine Reihe in die Breite, wie sie in der Figur angedeutet ist. Eine Ebene durch *pqt* gelegt, geht auch durch *OI*. Die Decrescenzen müssen an allen Kanten des Kernwürfels so wiederholt werden, wie es die bekannte Lage der Flächen des Pyritoëders mit sich bringt.

Um die Neigung der entstandenen Fläche deutlich zu machen, ist die Fig. 22 entworfen, welche einen Queerschnitt der Fig. 21, durch den Mittelpunct des Würfels und der Würfelfläche *EOE'O'* parallel gelegt, vorstellt. Man sieht, dass die Linie *pr* halb so gross ist, als die Linie *rO*, da sie halb so viel Würfelseiten enthält; die Tangente des Winkels α, welches der Neigungswinkel der Pentagondodecaëderfläche gegen die unterliegende Würfelfläche ist, ist also gleich $\frac{1}{2}$ und $\alpha = 26° - 34'$.

Aus dem Vorhergehenden wird von selbst verständlich, was Decrescenz in die Breite und Decrescenz in die Höhe (decroissement en largeur et decroissement en hauteur) heisst. Man kennt einfache, zweifache, dreifache etc. Decrescenz in die Breite oder in die Höhe, je nachdem eine, zwei, drei etc. Reihen in die Breite oder in die Höhe gegen eine Reihe in die Höhe oder in die Breite wegfallen. Fällt eine gewisse Anzahl von Reihen in die Breite die grösser als Eins ist, gegen eine gewisse Anzahl von Reihen in die Höhe, die auch grösser als Eins ist, weg, so nennt man diess eine gemischte Decrescenz (decroissement mixte), Die Flächen, welche durch die Decrescenzen entstehen, nennt man secundäre Flächen, im Gegensatz zu den Flächen des Kerns, die man primäre Flächen oder Kernflächen nennt.

Durch eine einfache Decrescenz an den Ecken des Würfels (decroissement sur les angles) entsteht die Fläche des regulären Octaëders. Diese Decrescenz ist Fig. 23 abgebildet. Man sieht, dass gegen eine Reihe in der Breite (nach den Diagonalen des Würfels) auch eine Reihe in die Höhe wegfällt. Man überzeugt sich leicht, dass diess wirklich die Octaëderfläche sey, wenn man den kleinen Würfel, der bei *d* wegfällt, sich wieder hingestellt denkt; dieser Würfel wird von einer Ebene, die durch

alle die vorspringenden Ecken der Würfelchen geht, offenbar in *lmd* (Fig. 24) geschnitten; da nun alle Flächen des Würfelchens (Fig. 24) den Flächen des Kernwürfels (Fig. 23) parallel sind, so ist auch *dl*, *dm* im kleinen Würfel den Linien *EO*, *IO* im grossen parallel; und dass eine Ebene, die einer durch *EOI* gehenden Ebene parallel ist, die Fläche des regulären Octaëders ist, wissen wir schon aus dem Vorhergehenden. Wiederholt man diese Decrescenz auf allen drei ebenen Winkeln, die in der Würfelecke zusammenkommen, so fallen die drei dadurch enstehenden Ebenen in eine zusammen.

Eine doppelte Decrescenz in die Breite auf der Ecke des Würfels, d. h. bei welcher zwei Reihen in die Breite gegen eine Reihe in die Höhe weg fallen, giebt, wie man aus Fig. 25 und 26 sieht, die Leucitoëderflächen; denn stellt man in *d* die drei Würfelchen, welche hier weggefallen sind, wieder her, so schneidet offenbar die Ebene, welche durch alle vorspringende Ecken der Würfelchen geht, diese drei Würfelchen in den Linien *ld*, *dm* (Fig. 26); dass die Linien *ld*, *dm* (Fig, 26) den Linien *Ek*, *kI* (Fig. 25), wo $Ok = Ok$, parallel sind, bedarf keines Beweises; und wir wissen aus dem Vorhergehenden, dass eine Ebene, die einer durch die Linien *Ek*, *kI* gehenden Ebene parallel ist, die Fläche des Leucitoëders ist.

Es giebt noch eine Art Decrescenzn an den Ecken, die Haüy mittlere Decrescenzen (decroissemens intermediaires) nennt, und von welchen ein Beispiel Fig. 27 abgebildet ist. Bei den gewöhnlichen Decrescenzen an den Ecken geschieht, wie man aus Fig. 23 und 25 sieht, die Decrescenz längst der Kante *EO* nach demselben Gesetz, als die Decrescenz längst der Kante *OI*; bei einer mittleren Decrescenz, wie Fig. 27, ist es aber anders;

hier erheben sich die von den Würfelchen gebildeten Stufen längst der einen Kánte nach einem rascheren Gesetz, als längst der andern. Bei den mittleren Decrescenzen muss man also nicht nur angeben, nach welchem Gesetz sie in die Breite und in die Höhe abnehmen, sondern auch, wie sie längst den beiden Kanten, welche in der Ecke zusammen kommen, geschehen. So nennt man die Fig. 27 abgebildete mittlere Decrescenz eine einfache Decrescenz zweier Atome (Moleküle) längst der Kante *EO* (decroissement d'une rangée de molécules doubles); dagegen ist Fig. 29 eine doppelte Decrescenz von vier Atomen (decroissement par deux rangées de molécules quadruples). Stellt man in *d* (Fig. 27) die beiden Würfelchen, welche durch die Decrescenz weggefallen sind, wieder her, so geht die durch die Decrescenz gebildete Ebene offenbar durch die Linien *ld*, *md* (Fig. 28), und diese Linien sind den Linien *Fk*, *kI* (Fig. 27) parallel, wo $Ok = O'k$. Auf dieselbe Art findet man für Fig. 29, dass die von der Decrescenz gebildete Ebene durch die Linien *ld*, *dm* (Fig. 30) geht; diese Linien gehen aber mit *Fk*, *kI* (Fig. 29) parallel; hier ist $Ok = \frac{1}{4} OO'$.

19. Haüy hat für diese Decrescenzen verschiedener Art auch verschiedene Zeichen eingeführt. Er bezeichnet erst die Flächen, Ecken und Kanten des Kernwürfels durch grosse Buchstaben, wie es in der 31sten Figur angegeben ist. *P* bedeutet also die Würfelfläche, *B* die Würfelkante und *A* die Würfelecke. Ensteht eine Fläche aus einer einfachen Decrescenz an der Würfelkante, wie die Fläche des Rhombendodecaëders (Fig. 20), so wird sie mit $\dot{B}$ bezeichnet. Ist es eine Decrescenz an der Kante von zwei Reihen in die Breite, gegen eine Reihe in die Höhe, so ist ihr Zeichen $\dot{\dot{B}}$, diess ist Fläche eines Pyramidenwürfels. Kommt dieser Pyramidenwürfel nur mit

der halben Anzahl Flächen als Pentagondodecaëder vor (s. Fig. 21), so geschieht die bezeichnete Decrescenz auf jeder Fläche nur von zwei parallelen Kanten aus; alsdann bezeichnet man drei Kantenpaare des Würfels (ich nenne Kantenpaar je zwei parallele Kanten) mit besondern Buchstaben B, C, G (Fig. 32); von den Kanten B aus geschieht die Decrescenz nach oben (vergl. die Fig. 32 mit der Fig. 21) und man bezeichnet sie mit $\hat{B}$; von den Kanten C aus geschieht sie nach unten, ihr Zeichen ist also $\underset{2}{C}$; von den Kanten G aus geht die Decrescenz von der einen rechts hin, von der andern links hin, und man kann sie nicht anders als mit $G^{2}\,{}^{2}G$ bezeichnen.

Diess sind lauter Decrescenzen in die Breite, indem man annimmt, dass die Decrescenz in die Höhe dabei einfach sey. Ist aber die Decrescenz in die Höhe gegen eine Reihe in die Breite mehrfach, so bezeichnet man diess durch einen gebrochenen Exponenten, dessen Zähler Eins ist und dessen Nenner die Zahl der Reihen in die Höhe angiebt, welche gegen eine Reihe in die Breite wegfallen. So ist $\overset{\frac{1}{2}}{C}$ (Fig. 32) ebenfalls das Zeichen einer Pentagondodecaëderfläche, weil bei dieser von der Kante C aus nach oben hin zwei Reihen in die Höhe gegen eine Reihe in die Breite wegfallen, wie man sehr deutlich aus Fig. 21 sieht.

Die gemischten Decrescenzen (decroissemens mixtes) bezeichnet man ebenfalls durch gebrochene Exponenten, deren Zähler die Zahl der Reihen, welche in die Breite wegfallen, und deren Nenner die Zahl der Reihen, welche in die Höhe wegfallen, angiebt. So bedeutet $\overset{\frac{2}{3}}{B}$ (Fig. 31) eine aus einer gemischten Decrescenz gebildete Fläche, bei welcher zwei Reihen in die Höhe gegen drei Reihen in die Breite wegfallen.

Mit den Decrescenzen an den Ecken verhält es sich eben so: $\overset{1}{A}$ bedeutet eine Fläche, die aus einer einfachen Decrescenz an der Ecke A (s. Fig. 31) entsteht, wie Fig. 23 abgebildet ist; es ist die Fläche des regulären Octaëders. Die Leucitoëderfläche, deren Entstehen aus einer zwiefachen Decrescenz in die Breite an der Würfelecke durch Fig. 25 deutlich gemacht wird, wird durch $\overset{2}{A}$ bezeichnet. $\overset{3}{A}$ endlich ist das Zeichen einer Fläche, die durch eine Decrescenz an der Würfelecke entsteht, bei welcher drei Reihen in die Breite gegen zwei Reihen in die Höhe wegfallen.

Bei den mittleren Decrescenzen (decroissemens intermediaires) muss man nicht nur die Art der Decrescenz an der Ecke, sondern auch die Decrescenzen an den Kanten angeben. Man schliesst das Zeichen überdiess in eine Paranthese ein, um alle Verwechselung zu verhüten. So bedeutet $(\overset{1}{A}\ B^1\ B^2)$ eine einfache Decrescenz zweier Atome längst der Kante B, wie sie Fig. 27 abgebildet ist. Die Exponenten von B zeigen uns an, in welchem Verhältniss die Decrescenz an der einen Kante zu der an der andern Kante steht; hier fallen gegen ein Atom auf der einen Kante, zwei Atome auf der andern Kante weg. Der Exponent von A bezeichnet die Raschheit der Decrescenz, welche man an derjenigen Kante abnimmt, wo die Decrescenz in die Breite am geringsten ist: das ist in Fig. 27 die Kante EO; hier ist die Decrescenz einfach, also $\overset{1}{A}$. In Fig. 29 ist eine andere mittlere Decrescenz abgebildet, welche man mit $(\overset{2}{A}\ B^1\ B^2)$ bezeichnet; das Verhältniss der Decrescenz längst der Kante EO, zur Decrescenz längst der Kante OI ist ebenfalls wie 1 zu 2; aber längst der Kante EO, wo die Decrescenz in die Breite am geringsten ist, fallen zwei Reihen in die Breite gegen eine Reihe in die Höhe weg, deshalb muss man $\overset{2}{A}$ setzen.

20. Ist die Kerngestalt kein Würfel, sondern ein Rhomboëder, wie beim Kalkspath, so sind, wie wir schon erinnert haben, die Ergänzungsatome (molecules intégrantes) auch Rhomboëder von denselben Winkeln. Die Decrescenzen geschehen auf ganz dieselbe Weise, wie beim Würfel, durch den Aufbau dieser kleinen Rhomboëder, von welchen eine gewisse Anzahl von Reihen in die Breite gegen eine gewisse Anzahl von Reihen in die Höhe wegfällt. Auch hier giebt es Decrescenzen an den Kanten, Decrescenzen an den Ecken und mittlere Decrescenzen. Der einzige Unterschied, den wir an den Decrescenzen auf den Flächen des Würfels und an den Decrescenzen auf den Flächen des Rhomboëders bemerken, ist derjenige, dass die Decrescenzen an den verschiedenen Kanten und verschiedenen Ecken verschieden ausfallen, das heisst, dass an den verschiedenen Kanten und Ecken desselben Rhomboëders verschiedene Flächen gebildet werden; wir haben von diesem Gesetz, unter den Namen „Gesetz der Symmetrie", schon oben gesprochen. Man ist deshalb gezwungen, den verschiedenen Kanten und Ecken des Rhomboëders verschiedene Zeichen zu geben, so wie es Fig. 33 geschehen ist.

Nun ist $\underset{1}{A}$ das Zeichen einer Fläche, die die Endspitze A des Rhomboëders grade abstumpft oder einen rechten Winkel mit der Axe des Rhomboëders macht. $\underset{x}{A}$, wo $x > 1$, bezeichnet im Allgemeinen Flächen, welche zwischen $\underset{1}{A}$ und der Fläche P des Kernrhomboëders liegen, so dass alle Durchschnittslinien dieser Flächen parallele, mit der Axe rechtwinklichte Kanten bilden. Alle übrigen Flächen, welche dieselbe Eigenschaft haben, nämlich dass sie untereinander und mit den vorigen parallele auf die Axe

rechtwinklichte Kanten bilden, welche aber nicht zwischen A und P liegen, haben $\overset{x}{e}$ zum Zeichen, wo x alle möglichen Werthe annehmen kann. Diejenige Abstumpfungsfläche der Ecke an der Basis e, welche mit der Axe parallel ist (s. Fig. 19), wird mit $\overset{2}{e}$ bezeichnet: Denn, in Fig. 23, wo die Ecke des Würfels durch eine Fläche abgestumpft wird, welche aus einer einfachen Decrescenz an der Ecke entsteht, geht diese Fläche durch die Ecke O, an welcher die Decrescenz statt findet, und durch die eine Diagonale lm (Fig. 24) des Würfelchens, der bei d (Fig. 23) durch die Decrescenz weggefallen ist, oder durch die Hälfte der andern Diagonale pq desselben Würfelchens (Fig. 24); eine Fläche, die durch eine doppelte Decrescenz in die Breite an der Ecke des Würfels hervorgebracht ist, geht, wie man aus Fig. 25 und 26 sieht, durch die Ecke O (Fig. 25), an welcher die Decrescenz geschieht, und durch die Linie lm (Fig. 26) oder durch den Endpunct p der Diagonale pq des ersten wegfallenden Würfelchens; und im Allgemeinen, x Decrescenzen in die Breite gegen y Decrescenzen in die Höhe, an der Ecke des Würfels, bringen eine Fläche hervor, welche durch die Ecke des Würfels, an welcher die Decrescenz geschieht, und durch den Endpunct einer Linie geht, die senkrecht auf der Würfelfläche, und von dieser an gerechnet y Ergänzungswürfelseiten hoch ist, und welche die durch O gehende Diagonale des Würfels in einem Puncte trifft, der um x halbe Ergänzungswürfeldiagonalen von O entfernt ist. In der Fig. 34 ist $AEA'e$ der Queerschnitt eines Rhomboëders durch eine Endkante, durch die Axe und durch die der Endkante gegenüberliegende Ecke an der Basis gehend. Die Parallelogramme, welche über Ae' liegen, sind die Queerschnitte der Ergänzungsatome, die auf der Fläche des Rhomboëders aufge-

baut sind. Man sieht, dass die Linie *eq* durch den Endpunct der ganzen Diagonale *ts* des ersten Ergänzungsatoms geht; das Zeichen der Fläche, die durch diese Linie rechtwinklicht mit dem Queerschnitt (oder mit der Ebene der Kupfertafel) geht, ist also $\overset{2}{e}$, weil $ts = 2tx$; es ist die Fläche der regulären sechsseitigen Säule, welche die Ecke *e* des Rhomboëders abstumpft und Fig. 19 abgebildet ist. Die Linie *er* geht durch die Hälfte der Diagonale *st* der Fläche des ersten Ergänzungsatoms: das Zeichen der Fläche, welche durch dieselbe, rechtwinklicht mit dem Queerschnitt, geht, ist also $\overset{1}{e}$, weil $\frac{1}{2}ts = tx$; es ist diejenige Abstumpfungsfläche der Ecke *e*, welche durch die Spitze des Rhomboëders, und zwei Ecken an der Basis, welche durch eine Diagonale der Rhomboëderfläche verbunden sind, oder durch *A'E'E* Fig. 33 geht. Das Zeichen der Fläche, die, rechtwinklicht mit dem Queerschnitt, durch die Linie *pe* geht, ist $\overset{4}{e}$, weil $tv = 4tx$. Man findet durch eine geometrische Construction leicht das Zeichen jeder Fläche dieser Art, wenn man ihre Neigung gegen die Axe kennt. Man zeichnet den Durchschnitt (Hauptschnitt) des Kernrhomboëders *EAeA'* (Fig. 35), indem man die Grösse der Winkel und das Verhältniss seiner Seiten genau beobachtet. Man verlängert die Seiten *AE*, *A'e*, und zieht die Durchschnittslinien des Hauptschnitts und der Flächen, deren Zeichen man finden will, alle durch *e*, wenn es Flächen von der Form $\overset{x}{e}$, und durch *A*, wenn es Flächen von der Form $\underset{x}{A}$ sind. Alsdann zählt *Ae* für die Decrescenz zweier Reihen in die Breite, während die Stücke, welche durch die Flächen von der Linie *As* abgeschnitten werden, die Decrescenzen in die Höhe messen, die Seite *AE* als Einheit genommen. Es seyen *le*, *me*, *ne*, *oe*, *pe*, *qe*, *re*, *se* die Durchschnittslinien der Ebene des Hauptschnitts mit mehreren Flächen von

der Form $\overset{x}{e}$; es seyen Az, Aw, Ax, Au, At die Durchschnittslinien der Ebene des Hauptschnitts mit mehreren Flächen von der Form $\overset{A}{x}$; wir wollen diese Flächen mit (le), (me), (ne), (oe), (pe), (qe), (re), (se); (Az), (Aw), (Ax), (Au), (At) bezeichnen, je nachdem sie rechtwinklicht mit der Ebene des Hauptschnitts $AEA'e$, durch die Linien le, me, ne, oe etc. oder durch die Linien Az, Aw, Ax etc. gehen. Es sey ferner:

$$\begin{aligned} AE &= Ao = oq = qs \\ &= ew = wu = ut \\ Al &= lm = mn = no = qr = \tfrac{1}{4}Ao \\ op &= ez = wx = \tfrac{1}{2}Ao. \end{aligned}$$

Diese Data sind hinreichend, um die Zeichen der obigen Flächen zu finden. Man erinnere sich, dass Ae für zwei Reihen in die Breite zählt, während Ao eine Reihe in die Höhe beträgt. Es ist also:

$$\begin{aligned} (le) &= \overset{\frac{Ae}{Al}}{e} = \overset{5}{e} \\ (me) &= \overset{4}{e} \\ (ne) &= \overset{\frac{8}{3}}{e} \\ (oe) &= \overset{2}{e} \\ (pe) &= \overset{\frac{4}{3}}{e} \\ (qe) &= \overset{1}{e} \\ (er) &= \overset{\frac{4}{5}}{e} \\ (es) &= \overset{\frac{2}{3}}{e} \\ (Az) &= \overset{A}{4} \\ (Aw) &= \overset{A}{2} \end{aligned}$$

$$(Ax) = A^{\frac{1}{3}}$$
$$(Au) = A^{\frac{1}{1}}$$
$$(Al) = A^{\frac{3}{3}}$$

Geschieht die Decrescenz an den Ecken E, so muss man den Schnitt durch EEe legen; im übrigen verfährt man eben so, wie im vorhergehenden Fall; man schreibt die gefundene Zahl zur Seite von E, weil die Decrescenz in dieser Richtung geschieht. So bedeutet $E^{\frac{1}{e}}{}^{1}E$ die Abstumpfungsfläche der Ecke E, welche durch Aee geht und welche mit der Fläche $\frac{1}{e}$ zusammenfällt.

Diese Betrachtungen sind unmittelbar auf die Decrescenzen an den Ecken des Würfels anwendbar. Man gebraucht, um die Zeichen der Flächen, welche durch Decrescenzen an den Ecken entstehen, zu finden, dieselbe Construction (Fig. 35); nur wird der Winkel EAe und EEe ein rechter, und der Unterschied zwischen A, E und e, d. h. zwischen Ecke an der Spitze und an der Basis, fällt weg; und man braucht die Exponenten nicht unterhalb der Buchstaben zu schreiben, weil die Decrescenz nach allen Seiten geschieht.

22. Eben so leicht ist es, die Zeichen der Flächen zu finden, welche durch irgend eine Decrescenz an den Kanten des Rhomboëders entstehen. Man unterscheidet zwei Arten von Kanten, Endkanten und Basiskanten des Rhomboëders, und bezeichnet die ersten mit B, die andern mit D (s. Fig. 33). Man legt rechtwinklicht durch vier parallele Kanten eine Ebene $D'BDB'$ (Fig. 36), und zieht, wie oben, die Durchschnittslinien Dm, Do, Dp etc., Bz, Bw etc. dieser Ebene mit den Flächen, welche durch De-

crescenzen an den Kanten B oder D entstehen, und welche mit dieser Ebene rechte Winkel machen. Hier zählt die Linie BD für eine Reihe in die Breite, während die Linie $Bq = Dx$ für eine Reihe in die Höhe zählt.

Bezeichnet man wieder die Flächen, deren Zeichen man sucht, mit (Dm), (Do), (Dp), (Dq) und mit (Bz), (Bw), (Bx), je nachdem sie, rechtwinklicht mit der Ebene $D'qxB'$, durch Dm, Do, Dp, Dq etc. oder durch Bz, Bw, Bx gehen. so haben wir:

$$(Bz) = \overset{4}{B}$$
$$(Bw) = \overset{2}{B}$$
$$(Bx) = \overset{1}{B}$$
$$(Dm) = \overset{4}{D}$$
$$(Do) = \overset{2}{D}$$
$$(Dp) = \overset{\frac{4}{3}}{D}$$
$$(Dq) = \overset{1}{D}$$

Die Flächen, die zwischen (Bx) und (Bq) liegen, entstehen durch ähnliche Decrescenzen auf der andern Seite von B; die Flächen, die zwischen (Dq) und (Dx) liegen, entstehen durch ähnliche Decrescenzen auf der andern Seite von D, deshalb brauchen sich in der Figur nur zwei Rhomben zu befinden.

Um ein Beispiel von einer Decrescenz an der Kante eines Rhomboëders zu geben, ist Fig. 37 entworfen. Es ist die Decrescenz $\overset{2}{D}$; diese Fläche bildet, an allen Basiskanten wiederholt, einen Drei- und Dreikantner erster Art, wie er beim Kalkspath in der Metastatischen Varietät (var. metastatique) vorkommt.

23. Die Flächen, die durch intermediäre Decrescenzen entstehen, sind nicht so leicht zu bestimmen, als die bisherigen. Es giebt indess keine solche Fläche, für die sich nicht eine andere Kernform finden liesse, an welcher sie durch Decrescenzen an den Kanten oder Ecken entsteht. Haüy ist bei Bestimmung der Kernform (noyeau, forme primitive) einer Substanz dem blättrigen Bruch derselben gefolgt, und er sieht dasjenige Rhomboëder, welches von den Spaltungsebenen des Kalkspaths begrenzt wird, als den wahren Kern desselben an. Aber oft lassen sich gewisse Flächen, welche am eigentlichen Kernrhomboëder als intermediäre Decrescenzen erscheinen, viel einfacher auf andere Formen beziehen, welche durch irgend eine Decrescenz aus dem Kernrhomboëder entstehen. Diese Formen nennt Haüy hypothetische Kernformen (noyeaux hypothétiques); und man kann, wie wir eben gesagt haben, für jede durch eine intermediäre Decrescenz am Kernrhomboëder entstehende Fläche eine solche hypothetische Kernform finden, an welcher die Fläche als Decrescenz an den Kanten oder an den Ecken erscheint. So erscheint zum Beispiel die Fläche $({}^{1}E^{1}B^{1}D^{2})$ an einem schärferen Rhomboëder, das aus dem Kernrhomboëder entsteht, indem man dessen Ecken an der Basis durch Ebenen, die durch Aee, $A'EE$ gehen, abstumpft, als eine Decrescenz von drei Reihen in die Breite, an den Kanten an der Basis dieses schärferen Rhomboëders; das Zeichen dieser Fläche, auf dieses schärfere Rhomboëder als hypothetische Kernform bezogen, ist also $\overset{1}{D}$. Die Fläche $({}^{5}_{5}E^{5}_{5}B^{2}D^{3})$ entsteht an dem stumpferen Rhomboëder, welches durch grade Abstumpfung der Endkanten des Kernrhomboëders entsteht und dessen Zeichen $\underset{1}{B}$ ist, als Decrescenz von fünf Reihen in die Breite, gegen drei Reihen in die Höhe, an den Kanten an der Basis; das

Zeichen dieser Fläche ($^{5}_{6}E^{5}_{6}B^{2}D^{1}$) ist also, auf diese hypothetische Kernform $\overset{4}{\underset{1}{B}}$ bezogen, $\overset{4}{D}$.

24. Man kann die Lage der Krystallflächen, welche durch gewisse Decrescenzen entstehen, auch so angeben, dass man, wie Fig. 23, 25, 27, 29 am Würfel geschehen ist, auf den Seitenflächen der Kerngestalt Linien zieht, welche den Durchschnittslinien der Krystallfläche mit den verlängerten Ebenen der Kernform parallel sind. Man kann die Lage dieser Linien unmittelbar aus dem Zeichen der Krystallfläche ableiten. Die Flächen von der Form $\overset{x}{\underset{x}{B}}$ oder $\overset{x}{D}$ sind Ebenen parallel, welche die Kanten des Kernrhomboëders so schneiden, wie Fig. 38 und 39 zeigen. Wenn man bei den Flächen der ersten Art die ihnen parallele Ebene durch die Kante an der Basis KF (Fig. 38) gehen lässt, so schneidet die Ebene von den Kanten EH, AG den x^{ten} Theil ab.

Die durch KF, GH gehende Ebene ist also der Fläche $\overset{1}{\underset{1}{B}}$ parallel; die Ebene, die durch KF, no geht, ist der Fläche $\overset{1}{\underset{2}{B}}$ parallel, weil $oE = \frac{1}{2}EH$; die Ebene, die durch KF, lm geht, ist der Fläche $\overset{1}{\underset{4}{B}}$ parallel, weil $mE = \frac{1}{4}EH$ und so fort. Eben so ist es mit den Decrescenzen an den Kanten der Basis. Der Fläche $\overset{1}{D}$ geht die Ebene $AFCG$ parallel; der Fläche $\overset{2}{D}$ die Ebene $AmlG$, weil $mE = \frac{1}{2}EF$; der Fläche $\overset{4}{D}$ ist die Ebene $AonG$ parallel, weil $oE = \frac{1}{4}EF$ und so fort.

Eben so ist es mit den Flächen, die aus den Decrescenzen an den Ecken entstehen. In dem Zeichen ^{1}E bedeutet der Exponent 1, dass die Fläche, welche durch eine solche Decrescenz an der Ecke E entsteht, einer Ebene parallel ist, welche, wenn man sie durch die Endpuncte A, H der Kanten EA, EH legt, durch den Endpunct der Kante EF geht (Fig. 40).

Ist der Exponent $= 2$, oder das Zeichen ^2E, so geht die der so bezeichneten Fläche parallele Ebene durch AHo, indess $o = \frac{1}{2}EF$ und so fort. Die Ebene EKC (Fig. 41), hat $\overset{1}{e}$, die Ebene EKm $\overset{2}{e}$ zum Zeichen. Es gilt für die Decrescenzen an den Ecken und Kanten im Allgemeinen folgender Satz: Wenn man eine der bezeichneten Fläche parallele Ebene durch die Endpuncte der der decrescirenden Ecke oder Kante anliegenden Kanten auf der Kernfläche, auf welcher die Decrescenz geschieht, gehen lässt, so wird die dritte Kante, die durch dieselbe Ecke geht, oder die beiden andern Kanten, die sich zu beiden Enden der decrescirenden Kante, auf der benachbarten Kernfläche, befinden, so geschnitten, dass sich das abgeschnittene Stück zur ganzen Kante umgekehrt verhält, wie der Exponent des Zeichens der Fläche.

Die Zeichen für intermediäre Decrescenzen bieten keine grössere Schwierigkeiten. Das Zeichen einer Fläche, welche der Ebene Apn (Fig. 42) parallel geht, ist $(^1EB^2D^1)$.

Man findet die Exponenten des Zeichens einer intermediären Decrescenz auf folgende Weise: Man schreibt erst die Verhältnisse der abgeschnittenen Kantenstücke zu den ganzen Kanten als Exponenten an die respectiven Buchstaben für diese Kanten; den Exponenten des Buchstabens für die Ecke bestimmt man eben so aus dem Abschnitt der dritten Kante EF. Das Zeichen von Apo würde so folgende Gestalt bekommen:

$$^{\frac{1}{4}}EB^1D^{\frac{1}{2}}.$$

Aus diesem Zeichen muss man die gebrochenen Exponenten des Buchstaben für die Kanten wegschaffen, indem man alle Exponenten mit 2 multiplicirt; das Zeichen wird dann zu $(^{\frac{1}{2}}EB^2D^1)$; in diesem muss man

noch den Exponenten von *E* umkehren, um das wahre Zeichen der Fläche, die der Ebene *Apo* parallel geht,

$$(^2EB^2D^1)$$

zu bekommen. Man behält indess zuweilen den Exponenten $\frac{1}{2}$ bei, schreibt ihn dann aber unter dem *E*, so: $(\overset{\frac{1}{2}}{E}B^2D^1)$.

Aus denselben Gründen ist das Zeichen einer Fläche, welche der Ebene *Hnm* parallel geht, $(^1EB^1D^2)$. Eben so ist es mit den intermediären Decrescenzen an den Ecken *e* oder *A*. Alles diess lässt sich unmittelbar auf den Würfel anwenden, den man als ein rechtwinklichtes Rhomboëder ansehen kann.

25. Ist die Kernform ein schiefes oder grades Prisma mit rhombischer oder rectangulärer oder quadratischer Basis, so geschehen die Decrescenzen eben so, wie beim Rhomboëder. Die Ergänzungsatome sind von derselben Gestalt und demselben Verhältniss der Seiten, als die Kernform, und man kann hier, wie beim Rhomboëder, aus der Lage einer secundären Fläche unmittelbar ihr Zeichen, und aus dem Zeichen derselben unmittelbar ihre Lage ableiten. Der einzige Unterschied ist, dass alle Seiten des Rhomboëders einander gleich sind; man braucht nur die Neigungswinkel der Flächen desselben zu wissen, um alle übrigen Winkel des Kernrhomboëders und der secundären Flächen, deren Verhältniss zum Kernrhomboëder bekannt ist, zu bestimmen; bei den schiefen und graden Prismen hingegen muss man auch die Verhältnisse der Seiten kennen.

Beim graden Prisma mit rhombischer Basis Fig. 43 bezeichnet Haüy die Säulenfläche mit *M*, die grade angesetzte Endfläche mit *P*, die Endkanten mit *B*, die Seitenkanten mit *G* und *H*, die Ecken, die über den

Kanten *H* liegen, mit *A*, und die andern, die über den Kanten *G* liegen, mit *E*. Die Gleichheit der Endkanten beim graden Prisma wird dem ersten Blick durch die Gleichheit ihrer Bezeichnung angezeigt, so dass da, wo die perspectivische Zeichnung täuschen sollte, dass grade Prisma schon daran kenntlich ist. In Fig. 44, welche ein eben solches grades rhombisches Prisma (prisme droit rhomboidal) darstellt, wie Fig. 43, ist $\dot{A}$ das Zeichen einer Fläche, die der Ebene *bch* parallel ist; $\mathring{A}$ ist das Zeichen einer Fläche, welche der Ebene *bck* parallel geht; die Ebene *achm* geht der Fläche parallel, dessen Zeichen $\dot{B}$ ist; die Ebene *ackl* geht der Fläche $\ddot{B}$ parallel, die Ebene *bcmn* der Fläche ${}^{1}H^{1}$, die Ebene *cfon* der Fläche $H^{\frac{3}{2}}$; die Ebene *adh* ist der Fläche ${}^{1}G^{1}$, die Ebene *afo* der Fläche ${}^{3}G$ parallel. Die Ebene *adp* geht der Fläche $\hat{E}$ parallel, die Ebene *qdn* der Fläche ${}^{2}E$. Diejenige Fläche endlich, welche der Ebene *afg* parallel ist, kann kein anderes Zeichen als $(E^{\frac{1}{2}}B^{3}B^{1})$ haben, weil $bf = \frac{1}{4}\ bd$, und *bg* zwei Dritttheil des dritten Theils der Kante *bm* beträgt. Das Zeichen $(E^{\frac{2}{3}}G^{3}B^{1})$ gehört einer Fläche, die durch *f*, *m* und durch die Hälfte der Kante *ba* geht.

Beim schiefen Prisma mit rhombischer Basis (Fig. 45) sind die vordern und hintern Endkanten und die vordere und hintere Ecke von einander verschieden. Haüy bezeichnet sie deshalb mit verschiedenen Buchstaben, nämlich die vordere Ecke mit *O*, die hintere mit *A*, die vorderen Kanten mit *D*, die hinteren mit *B*. Die Seitenflächen des Prisma bezeichnet er wieder mit *M*, die schief angesetzte Endfläche mit *P*, die der Ecken an den beiden Seiten des Prisma mit *E*, die beiden Seitenkanten mit *G* und *H*.

In Fig. 46, wo $dk = \frac{1}{3}\,dc$, $aq = \frac{1}{2}\,ac$, $lc = \frac{1}{12}\,ac$, correspondiren folgende Flächen folgenden Zeichen:

Der Fläche *gklm* entspricht das Zeichen $\overset{\frac{1}{3}}{D}$ oder $\underset{3}{D}$.
Der Fläche *gkn* — — — $\overset{\frac{2}{3}}{B}$.
Der Fläche *bhc* — — — $\dot{O}$.

Der Fläche, die durch *bc*, und die der Ecke *d* entgegengesetzte Ecke an der Basis des Prisma geht, entspricht das Zeichen $\dot{A}$.

Der Fläche *adm* entspricht das Zeichen $\dot{E}$.
Der Fläche *mdg* — — — E^{1}.
Der Fläche *qkn* — — — $(^{1\frac{5}{3}}ED^{2}G^{1})$.
Der Fläche *nkl* — — — $(\overset{\frac{5}{3}}{E}D^{2}G^{1})$.
Der Fläche *bcmn* — — — ${}^{1}H^{1}$.
Der Fläche *adh* — — — ${}^{1}G^{1}$.

Beim schiefen Prisma mit rectangulärer Basis (Fig. 47), sind die Seitenkanten von derselben Art, die Endkanten aber nicht: die Kanten *C* nämlich sind rechtwinklicht, die Kante *B* ist scharf, die Kante *D* stumpf; *B* und *D* complementiren sich zu 180°. Die Seitenflächen *M*, *T* machen ebenfalls rechte Winkel mit einander,

Wir wollen uns begnügen, einige intermediäre Decrescenzen an dieser Kernform anzugeben. Eine Fläche, die dem Zeichen $(E^{\frac{1}{3}}G^{5}C^{2})$ entspricht, geht der Ebene *cfg* (Fig. 48) parallel: denn $fh = \frac{2}{3}\,ah$ und $ch = \frac{2}{3}\,bh$. Man kann diese Fläche einfacher durch das Zeichen $\overset{\frac{2}{3}}{E}$ ausdrücken. Das Zeichen $(\overset{\frac{1}{3}}{A}G^{5}C^{2})$ hingegen entspricht der Ebene *lkm*, die man ebenfalls einfacher mit $\underset{\frac{1}{3}}{A}$ (oder $\overset{\frac{5}{3}}{A}$) bezeichnen kann. Die Fläche, die der

Ebene *cdg* parallel geht, hat ($E^{\frac{1}{4}}G^5C^2$), und die Fläche, welche der Ebene *ncm* parallel geht, hat ($^{\frac{1}{4}}AG^5C^2$) zum Zeichen, denn $dh = nb = \frac{1}{3}\ ah = \frac{1}{4}\ ob$.

Es bleiben nur noch zwei Prismen übrig, das grade Prisma mit quadratischer Basis, und das grade Prisma mit rectangulärer Basis, Fig. 49 und 50. Bei diesen Prismen geschehen die Decreszen ganz eben so, wie bei den übrigen, und es wäre unnütz, besondere Fälle anzuführen; die Bezeichnung der Kanten und Ecken sieht man an den Figuren 49 und 50.

Haüy führt noch ein grades Prisma mit rhomboïdischer Basis an; man braucht ein solches Prisma nur auf eine seiner Seitenflächen zu legen, so dass diese zur Basis wird, so wird ein schiefes Prisma mit rectangulärer Basis, wie Fig. 47, daraus. Wir werden indess weiterhin auf einen Unterschied zwischen diesen Formen aufmerksam machen, welcher nicht erlaubt, sie, bei der Berechnung der Winkel, zu verwechseln.

Das irreguläre Parallelepipedon oder das schiefe Prisma mit rhomboïdischer Basis, Fig. 51, und 52, beschliesst die Reihe der Parallelepipeden, welche als Kernformen auftreten, und von welcher der Würfel und das Rhomboëder die einfachste, dieses unsymmetrische Prisma die zusammengesetzteste Form ist. Zwischen diesen Formen liegen das grade und schiefe vierseitige Prisma. Jedes dieser Prismen zerfällt wieder in zwei Formen, je nachdem die Basis ein Rhombus oder Rechteck ist; indessen ist leicht einzusehen, dass man jedes Prisma mit rhombischer Basis leicht zu einem Prisma mit rectangulärer Basis ergänzen kann, durch eine Decrescenz von der Form $^1H^1$ und $^1G^1$; so kann man in derselben Substanz das Prisma mit rhombischer Basis als die wahre, und das correspondirende Prisma

mit rectangulärer Basis als die hypothetische Kernform ansehen und umgekehrt; und es ist nicht nöthig, diese beiden Prismen als besondere Kernformen sorgfältig zu unterscheiden.

Alle diese Parallelepipeden spalten sich nach Ebenen, die ihren Flächen parallel sind; ihre Ergänzungsatome sind also eben solche Parallelepipeden. *)

26. Die octaëdrischen Kerngestalten bilden eine andere Reihe von Formen, die den vierseitigen Prismen oder Parallelepipeden coordinirt sind. Man kann aus jedem Parallelepipedon ein Octaëder machen, indem man dessen Ecken durch Schnitte, die durch die entgegengesetzten Endpuncte je dreier Kanten, die in einer Ecke zusammen kommen, gehen, abstumpft. Andere Octaëder entstehen, wenn man die Endkanten der Prismen abstumpft. So wird aus dem graden Prisma mit rhombischer Basis ein grades Octaëder mit rectangulärer Basis (Rectangulär-octaëder), wenn man die Ecken desselben, ein grades Octaëder mit rhombischer Basis (Rhombenoctaëder), wenn man seine Endkanten abstumpft. Das grade Prisma mit quadratischer Basis wird zum Quadratoctaëder, das grade Prisma mit rectangulärer Basis durch Abstumpfung der Ecken zum Rhombenoctaëder, durch Abstumpfung der Endkanten zum Rectangulär-octaëder. Aus den schiefen Prismen mit rhombischer oder rectangulärer Basis entstehen auf diese Weise schiefe Rhomben- und Rectangulär-octaëder; aus den ganz unsymmetrischen Prismen endlich schiefe Octaëder, deren Basis ein Rhomboïd ist (Rhomboïdoctaëder). Aus dem Würfel wird durch Abstumpfung der

*) Vergl. noch was weiterhin Nr. 31 von den überzähligen Brüchen (joints surnuméraires) gesagt ist.

Ecken ein regelmässiges Octaëder; die Endkanten darf man, dem Gesetz der Symmetrie zufolge, nicht allein abstumpfen; und stumpft man alle Kanten ab, so hat man das Granatoëder, von welchen wir weiterhin sprechen werden.

Aus dem graden Prisma mit rhombischer Basis kann man noch auf eine andere Art ein Octaëder ableiten, indem man nämlich durch die kürzeren oder durch die längeren Diagonalen der beiden parallelen Basen und durch die Mitten der gegenüberliegenden Seitenkanten Ebenen legt; diese vier neuen Ebenen bilden mit den vier übrig gebliebenen Stücken der Seitenflächen des Prisma ein Rectangulär-octaëder.

Man kann also jedes Kernoctaëder (d. h. jedes Octaëder, das von den Spaltungsebenen irgend eines Krystalls gebildet wird) zu einem Prisma ergänzen, indem man seine Ecken oder Kanten decresciren lässt; man erhält so neue hypothetische Kerngestalten, die vielleicht einfachere oder leichter zu übersehende Decrescenzformeln für die übrigen Flächen desselben Krystalls geben; umgekehrt kann man für jedes Kernprisma ein Octaëder als hypothetischen Kern substituiren.

Damit also unsere Darstellung vollständig werde, müssen wir noch von den Decrescenzen der Octaëder und von ihrer Reduction auf die correspondirenden Prismen sprechen.

Das Octaëder als Kerngestalt findet sich bei denjenigen Krystallen, die sich nach vier Spaltungsebenen theilen lassen, welche schiefe Winkel miteinander bilden. Vier Spaltungsebenen geben nämlich acht Begränzungsebenen, von denen je zwei und zwei einer Spaltungsebene parallel gehen. Spaltet man ein solches Octaëder noch weiter, so zerfällt es in

Octaëder und Tetraëder. Legt man nämlich durch irgend ein Octaëder vier Ebenen, die den Octaëderflächen parallel gehen, durch die Mitten der Kanten, so zerfällt es in eben so viele kleinere Octaëder, als es Ecken, und in eben so viel Tetraëder, als es Flächen hat, also in sechs Octaëder und acht Tetraëder (s. Fig. 52). Die kleinen Octaëder sind den grossen durchaus ähnlich; die Tetraëder sind dieselben Octaëder mit der Hälfte der Flächen: wenn man ihre Ecken abschnitte, so erhielte man Octaëder, die den eben erwähnten Octaëdern völlig ähnlich sind und vier neue Tetraëder (s. Fig. 53). Die Spitzen der Tetraëder befinden sich im Mittelpunct des Octaëders. Die Octaëder haben also eigentlich zweierlei Ergänzungsatome. Haüy hat von diesen die Tetraëder, als die einfacheren Formen, gewählt, um seine Decrescenzen aufzubauen; er sieht das Tetraëder als das wahre Ergänzungsatom (molécule intégrante) des Octaëders an.

Man stelle sich ein Octaëder Fig. 54 vor, das auf einer seiner Seitenflächen liegt, so dass also zwei parallele Flächen desselben *AFG*, *CLM* eine horizontale Lage haben. Die Flächen des Octaëders sind alle Spaltungsebenen, die man sich bis ins Unbestimmte verlängert denken kann. Man verlängere erst die drei Octaëderflächen, die die obere horizontale Fläche *AFG* schneiden, nämlich die Flächen *FGC*, *GAM*, *FAL*; es entsteht dadurch offenbar ein Tetraëder über der Fläche *AFG*. Legt man durch dieses Tetraëder und durch den Mittelpunct der Fläche *AFG* noch drei Ebenen, welche den oben erwähnten Octaëderflächen parallel sind, so entsteht ein Körper, welcher von sechs Parallelogrammen begrenzt ist, von denen je zwei und zwei einander parallel sind (oder ein Parallelepipedon), und welche dreien Spaltungsebenen des Octaëders entsprechen. Man kann

kann also das aufgesetzte Tetraëder vermittelst dreier Spaltungsebenen, die den Flächen des Octaëders, die Fläche *AFG* ausgenommen, parallel gehen, in lauter Parallelepipede zerspalten, deren Flächen aneinander liegen, und die mithin den ganzen Raum des Tetraëders ausfüllen. Legt man jetzt noch durch das Tetraëder mehrere der Fläche *AFG* oder der vierten Spaltungsebene parallele Ebenen, so werden die Spitzen der Parallelepipeda abgestumpft; d. h. jedes Parallelepipedon zerfällt in ein Octaëder und zwei Tetraëder, dessen Flächen den Octaëderflächen parallel sind; hier geschieht das Umgekehrte, als wenn man die drei Octaëderflächen *FGC*, *AGM*, *FAL* (Fig. 54) und ihre Parallelen verlängert, wodurch aus dem abgebildeten Octaëder ein Parallelepipedon wird.

In Fig. 55 ist der Durchschnitt eines Aufbaues von solchen Parallelepipeden auf der Octaëderfläche gegeben. Die correspondirenden Buchstaben machen die Lage des Durchschnitts (Fig. 55) im Octaëder Fig. 54 hinlänglich deutlich. *Bsxy* ist der Durchscnitt eines Parallelepipedon, dessen Flächen den drei Spaltungsebenen des Octaëders parallel sind. *Bs*, *xy* sind die Diagonalen zweier parallelen Flächen des Parallelepipedon; *sx*, *By* sind zwei seiner Kanten. Die Linien *zx*, *Bv* repräsentiren zwei Ebenen, die der vierten Spaltungsebene des Octaëders parallel gehen; die kleinen Dreiecke *szx*, *Bvy* repräsentiren die Tetraëder, welche durch diese vierte Spaltungsebene vom Parallelepipedon abgeschnitten werden; *zxvB* endlich repräsentirt das Octaëder, das übrig bleibt. Man sieht also deutlich, wie der ganze Aufbau aus Octaëdern *f*, *g*, *h*, *k* etc. und aus Tetraëdern *a*, *b*, *c*, *d*, *l*, *m*, *n* etc. besteht; je zwei Tetraëder bilden mit einem dazwischen liegenden Octaëder zusammengenommen ein Parallelepipedon $a + f + l$

oder $b + g + m$ etc. In den Octaëdern, wie in den Tetraëdern, sind alle Spaltungsebenen des Kernoctaëders enthalten, in den Parallelepipeden nur drei; man muss also die Octaëder oder die Tetraëder als die wahren Ergänzungsatome erklären: Haüy hat, wie ich schon gesagt habe, das Tetraëder gewählt. Man muss also aus der Fig. 55 alle Octaëder herausfallen lassen, wenn man sich den Aufbau der Tetraëder so denken will, wie Haüy ihn sich denkt; dadurch entstehen allerdings viel leere Räume, und man kann leicht beweisen, dass des leeren Raums doppelt so viel ist, als des erfüllten *); aber diess steht mit den übrigen Erfahrungen der Physiker über die Porosität der Körper, über ihre Durchsichtigkeit, ihre Ausdehnung durch die Wärme etc., nach welchen man vielleicht anzunehmen berechtigt ist, dass die Atome der Körper, in Verhältniss zu ihrem Durchmesser, sehr weit von einander entfernt sind, nicht im Widerspruch.

Was die bei einer solchen Decrescenz wegfallenden Atome betrifft, so haben wir besonders beim Würfel gesehen, dass man an ihnen am besten die Lage der Fläche, die aus der Decrescenz entsteht, bestimmen kann; man erinnere sich nur, was bei Gelegenheit der Decrescenzen, die Fig. 23 — 30 abgebildet sind, gesagt worden ist. Die Fig. 24, 26, 28, 30 stellen

*) Das oft erwähnte Tetraëder, welches sich, wenn man die der Fläche *AFG* (Fig. 54) anliegenden Octaëderflächen verlangert, auf der Flache *AFG* erhebt, hat offenbar eine Linie zur Höhe, die eben so gross ist, als die senkrechte Entfernung zwischen den beiden horizontalen Flächen *AFG*, *CLM*. Denkt man sich nun das Octaëder in acht andere Tetraëder zerlegt, deren Basen die Octaëderflächen sind, deren Spitzen im Mittelpuncte des Octaëders liegen und welche offenbar gleichviel körperlichen Inhalt haben, so sind die Höhen dieser Tetraëder halb so gross, als die senkrechten Entfernungen der parallelen Octaëderflächen; diese Tetraëder haben also einen halb so grossen körperlichen Inhalt, als die grössern Tetraëder, die man sich auf den Flächen *AFG*, *CLM* aufgerichtet denken kann; der kleinen Tetraëder sind acht, der grossen zwei; der Raum, den die beiden grossen Tetraëder zusammen einnehmen, ist also offenbar halb so gross, als derjenige, der von den kleinen Tetraëdern zusammen erfüllt wird. Die kleinen Tetraëder erfüllen aber zusammen den Raum des Octaëders.

diese wegfallenden Atome vor. Bei den Decrescenzen am Octaëder sind diese wegfallenden Atome (molécules soustractives) die eben beschriebenen Parallelepipeden, wie man aus dem Durchschnitt Fig. 55 sehen kann, in welcher *Byxs* das erste wegfallende Atom vorstellt, bei einer einfachen Decrescenz an der Kante *FG* Fig. 54, welche eine Fläche hervorbringt, die diese Kante grade abstumpft. Man sieht hieraus den Unterschied zwischen Ergänzungsatom (molécule intégrante) und wegfallendes Atom (molécule soustractive), welcher übrigens nur bei denjenigen Formen eintritt, bei welchen das Ergänzungsatom der Kernform ebenfalls nicht ähnlich ist.

Um sich eine deutliche Vorstellung von den Decrescenzen am Octaëder zu machen, ist die Fig. 56 entworfen. *ABCD* ist der Durchschnitt eines Octaëders, wie Fig. 55, nur ist das Octaëder aufrecht stehend gedacht; die mit Fig. 54 correspondirenden Buchstaben des Schnitts werden über seine Lage keinen Zweifel übrig lassen. Die Linien *AD*, *DC* und ihre Parallelen correspondiren also zweien Spaltungsebenen des Kernoctaëders; die Linie *aH* und ihre Parallelen correspondiren dagegen der Durchschnittslinie der beiden andern Spaltungsebenen. In dem Atomenaufbau *aAD* sind also die gestrichelten Räume die Durchschnitte der tetraëdrischen Ergänzungsatome, die weissen Stellen dagegen die leeren octaëdrischen Räume. Die Fläche die durch die Linie *Aa* geht und durch eine einfache Decrescenz an der Spitze *A* des Octaëders entsteht, hat $\overset{1}{A}$ zum Zeichen; die Fläche, die durch die Linie *Ab* geht, hat $\overset{3}{A}$ zum Zeichen und ist der Linie *cD* parallel, wobei $Al = \frac{1}{4} AB$. Die Fläche, die der Linie *Ad* correspondirt, hat $\overset{4}{A}$ zum Zeichen und geht der Linie *fD* parallel; es ist

aber $Ah = AB$ die Fläche endlich, die durch Ag geht, wird mit A_2 bezeichnet. Eben so verfährt man mit den Decrescenzen an den Kanten.

Bei den intermediären Decrescenzen hingegen substituirt Haüy jedem Octaëder ein Parallelepiped, welches von sechs hinlänglich verlängerten Octaëderflächen begrenzt ist, und an dessen Ecken (und Kanten) die Decrescenzen geschehen. Er bezieht die Zeichen der intermediären Decrescenzen am Octaëder ebenfalls auf dieses Parallelepiped: und so, da uns die Decrescenzen am Parallelepiped schon bekannt sind, werden wir uns leicht von jedem Zeichen einer intermediären octaëdrischen Decrescenz Rechenschaft geben können.

Es sey also Fig. 5. ein Octaëder, das bei A irgend eine Decrescenz erleidet. Man ergänzt das Octaëder erst zu einem Parallelepiped, indem man die Tetraëder $I.\ I$ auf zwei parallele Flächen desselben aufsetzt. Die Decrescenz sey von der Form $(\overset{\iota}{A}B\overset{\iota}{B}''\overset{\iota}{})$ oder $(\overset{\iota}{A}B\overset{\iota}{B}''\overset{\iota}{})$, welche Zeichen wir als gleichbedeutend ansehen: die dadurch gebildete Fläche gehe der Ebene mpr parallel, so dass also:

$$x = \varphi \frac{Am}{B}$$
$$z = \varphi \frac{Ap}{B''}$$
$$\omega = \varphi \frac{Ar}{AI}$$

wo φ eine so gewählte Zahl ist, dass die Werthe von x und z zwar so klein als möglich ausfallen, aber doch immer ganze Zahlen bleiben. Will man nun finden, wie die beiden andern Kanten B', B''' des Octaëders von der Ebene pmr geschnitten werden, oder die wievielsten Theile An, Aq von den Kanten B' und B'' sind, so ist diess leicht zu finden. Es sey:

$$y = a\,\frac{An}{B'}$$

$$u = a\,\frac{Aq}{B'''}$$

so dass also x, y, z, u sich verhalten, wie $\frac{Am}{B}$, $\frac{An}{B'}$, $\frac{Ap}{B''}$, $\frac{Aq}{B'''}$. Das Parallelogram *AEOI* ist Fig. 58 besonders abgebildet; man hat pg mit EO parallel gezogen. In diesem ist offenbar

$$\frac{Ar}{An} = \frac{pg}{ng};$$

nun ist aber

$$\frac{pg}{EO} = \frac{pg}{AI} = \frac{Ap}{B'}$$

und

$$ng = Ag - An = \frac{Ap \cdot B'}{B''} - An$$

folglich

$$Ar = \frac{Ap \cdot AI \cdot An}{(Ap \cdot B' - An \cdot B'')}$$

oder

$$\frac{Ar}{AI} = \frac{1}{\left(\frac{B'}{An} - \frac{B''}{Ap}\right)}$$

Substituirt man in dieser Gleichung die oben angeführten Buchstaben, so findet man

$$\omega = \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)} = \frac{zy}{z-y}$$

und, umgekehrt

$$y = \frac{\omega z}{\omega + z}$$

$$z = \frac{\omega y}{\omega - y}.$$

Ganz auf dieselbe Art findet man

$$\omega = \frac{xu}{x-u}$$

und umgekehrt

$$u = \frac{\omega x}{\omega + x}$$
$$x = \frac{\omega u}{\omega - u}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$\frac{xy}{x-y} = \frac{xu}{x-u}$$

welches eine Relation zwischen den vier Grössen x, y, z, u giebt.

Man kann nach diesen Formeln leicht berechnen, wie eine irgend einem Zeichen correspondirende Fläche die Kanten des Kernoctaëders schneidet, und umgekehrt, wenn man weiss, wie irgend eine Fläche die Kanten des Kernoctaëders schneidet, kann man leicht ihr Zeichen, auf das zugehörige Parallelepiped bezogen, finden. Delafosse, der den Artikel vom Octaëder in Haüy's Crystallographie bearbeitet hat, führt eine neue Art Zeichen ein, die er technische nennt, und welche unmittelbar angeben, wie die Kanten des Octaëders von der Fläche geschnitten werden.

So ist das technische Zeichen (signe technique) $A(B^x B'^y B''^z B'''^u)$ mit dem Haüyschen oder theoretischen (signe theorique) $(\frac{1}{\omega} A\, B^x B''^z)$ oder $(\frac{A}{\omega} B^x B''^z)$ gleichbedeutend.

Die obigen Formeln geben den Zusammenhang zwischen den Exponenten x, y, z, u, ω dieser Zeichen, und es ist mit denselben leicht, ein Zeichen in das andere zu verwandeln. Ist $x = z$, so ist es eine gewöhnliche Decrescenz an der Ecke, und das theoretische Zeichen wird

$$(\frac{A}{\omega} B^z B''^z).$$

Es sey z. B. $x = z = 1$ und $y = u = \frac{1}{2}$, d. h. die Fläche gehe einer Ebene parallel, die durch die Endpuncte der Kanten B, B'', und

durch den dritten Theil der Kanten B', B''' geht; so ist das technische Zeichen dieser Fläche

$$A(B^1B''^1B'^{\frac{1}{3}}B'''^{\frac{1}{3}})$$

und das theoretische Zeichen

$$(\underset{\frac{1}{2}}{A}B^1B''^1).$$

Wenn $x = y = z = u$ wird, so stumpft die Fläche offenbar die Ecke A des Octaëders grade ab. Die obige Formel giebt, wenn man $x = y = z = u = 1$ macht, $\omega = \frac{1}{0} = \infty$, das theoretische Zeichen dieser Fläche, als eine intermediäre Decrescenz betrachtet, wäre also $(\underset{\infty}{A}B^1B^1)$. Haüy bezieht aber diese Flächen immer unmittelbar aufs Octaëder, so wie es in Fig. 56 geschehen ist, wo die Linie Aa diese Fläche repräsentirt, und schreibt sie $\underset{1}{A}$, welches Zeichen, aufs Parallelepiped bezogen, eigentlich eine Fläche geben würde, die durch die Endpuncte der Kanten B, B'' und durch die Hälfte der Kanten B', B''' (und durch I) gehen würde. Die Flächen $(\underset{\frac{1}{2}}{A}B^1B''^1)$ aber schreibt er $\underset{2}{A}$; man muss sich also beim Octaëder wohl in acht nehmen, die intermediären Decrescenzen mit den Decrescenzen an den Ecken zu verwechseln, da sich die erstern auf ein Parallelepiped, die letztern auf ein Octaëder beziehen.

Es ist übrigens leicht, ein Zeichen, das eine intermediäre Decrescenz an der Ecke A ausdrückt, und auch durch eine einfache Decrescenz ausgedrückt werden kann, in ein anderes Zeichen zu verwandeln, das diese einfache Decrescenz, auf das Octaëder bezogen, unmittelbar giebt. Wenn, in der Fig. 56, irgend eine Fläche, die durch eine Decrescenz an der Ecke A entsteht, durch die Linie Df geht, und $\frac{Af}{AH} = \omega$ gesetzt wird, so ist

das Zeichen dieser Fläche, als intermediäre Decrescenz betrachtet oder auf ein Parallelepipedon bezogen, folgendes:

$$(\overset{A}{\omega} B^1 B''^1)$$

Dieselbe schneidet aber die beiden andern Endkanten des Octaëders so, dass sich die abgeschnittenen Stücke zu den ganzen Kanten verhalten, wie $\frac{Ak}{AB}$. Dieses Verhältniss, welches wir mit $\frac{1}{h}$ bezeichnen wollen, drückt offenbar das Verhältniss aus, nach welchem die kleinen Tetraëder auf der Octaëderfläche decresciren; das Zeichen der Fläche ist nämlich, aufs Octaëder bezogen:

$$\frac{A}{h}.$$

Wenn man nun sich anschickt h aus ω zu berechnen, so findet man, wie im Vorhergehenden:

$$\omega = \frac{1}{h-1}$$

und umgekehrt

$$h = \frac{\omega+1}{\omega}.$$

Diese Umwandlung wird noch einfacher, wenn man, wie Haüy gewöhnlich thut, $\frac{1}{\omega}$ oben für ω unten schreibt ($A^{\frac{1}{\omega}}$ für $\overset{A}{\omega}$); alsdann braucht man nur 1 zu diesem Exponenten hinzuzufügen, um h zu finden. So ist zum Beispiel

$$\overset{A}{\omega}(\overset{A}{\tfrac{1}{2}} B^1 B''^1) = (A^2 B^1 B''^1) = \overset{A}{3}$$

$$(\overset{A}{1} B^1 B''^1) = (A^1 B^1 B''^1) = \overset{A}{2} \text{ etc.}$$

Was die Decrescenzen an den Kanten des Octaëders betrifft, so werden die Kanten des Octaëders von den Ebenen, die den aus den Decrescenzen entstehenden Flächen parallel gehen, offenbar in dieselben Theile

zerschnitten, als die Kanten des ergänzenden Parallelepiped; es ist also gleichviel, ob man sie auf das Octaëder oder aufs Parallelepiped bezieht. Eine Fläche z. B. die aus einer Decrescenz an der Kante B'' entsteht, die ${}^2B''$ zum Zeichen hat, und die folglich (wenn man das Zeichen aufs Parallelepiped bezieht) durch $I'B$ und die Hälfte der Kante AI geht, geht auch durch die Hälfte der Kante AO oder B' und so fort.

27. Man kann, wie wir schon oben gezeigt haben, durch eine einfache Decrescenz jedes Octaëder in ein Prisma und jedes Prisma in ein Octaëder verwandeln; die eine Form kann also für die secundären Flächen der andern als hypothetische Kernform angesehen werden. Wir werden weiterhin eine allgemeine Formel entwickeln, vermöge welcher die Zeichen für die Decrescenzen an der einen Kernform leicht in Zeichen, die sich auf die andere Kernform beziehen, verwandelt werden können. Wir wollen hier nur bemerken, dass die Octaëder den Vortheil vor den Prismen gewähren, dass die Verhältnisse ihrer Kanten unmittelbar aus der Beobachtung, d. h. aus Winkelmessungen, abgeleitet werden können; denn, da alle Kanten des Octaëders in zwei fixen Puncten, nämlich in den beiden Endpuncten der Hauptaxe, zusammen kommen, so hat jede Aenderung in den Winkeln des Octaëders auch eine Aenderung in dem Verhältniss der Kanten desselben zur Folge, und die Verhältnisse der Kanten der octaëdrischen Formen hängen von ihren Winkeln ab; da man hingegen bei den Prismen die Länge der Kanten ändern kann, ohne dass dadurch eine Aenderung in den Winkeln entstände und umgekehrt; so dass man also von den Winkeln auf die Verhältnisse der Kanten nicht schliessen kann, sondern diese Vehältnisse besonders angeben muss, was nur mittelbar,

durch Rechnung, geschehen kann, weil wir nie die Länge der Kanten an einem Krystall beobachten.

Bei den schiefen Prismen mit rhombischer oder rectangulärer Basis nimmt indess Haüy ein gewisses Verhältniss zwischen den Kanten an, welches darin besteht, dass beim schiefen Prisma mit rectangulärer Basis die Diagonale der Seitenfläche *bhgm* (Fig. 48), welche durch *h*, *m* geht, mit der Seitenkante *mb* des Prisma einen rechten Winkel macht; beim schiefen Prisma mit rhombischer Basis (Fig. 46) ist die Diagonale der Ebene *adh*, welche den obern Endpunct *d* der vordern Seitenkante mit dem untern Endpunct der hintern Seitenkante verbindet, auf dieselben Seitenkanten senkrecht; oder das Verhältniss von *bm* zu *bh* (Fig. 48) oder von *dh* zu *ad* (Fig. 46) ist dem Cosinus der Neigung der schiefangesetzten Endfläche gegen die Axe des Prisma gleich. Das ist der Unterschied, der zwischen dem schiefen Prisma mit rectangulärer Basis und dem graden Prisma mit rhomboïdischer Basis statt findet; die letztere Form, die, auf eine Seitenfläche gestellt, zum schiefen Prisma mit rectangulärer Basis wird, befolgt nach Haüy nicht das eben angeführte Gesetz.

28. Das reguläre Tetraëder, das auch zuweilen als Kernform vorkommt, zerfällt durch weitere Theilung wieder in Tetraëder; die Ergänzungsatome des Tetraëders sind also, wie die des Octaëders, Tetraëder. Die Decrescenzen geschehen eben so, wie beim Octaëder; denn man kann an jedes Tetraëder, an die Fläche, welche der Ecke, an welcher die Decrescenz geschieht, gegenüber liegt, ein Octaëder, und an dieses wieder ein eben solches Tetraëder anschliessen, so dass ein Parallelepiped entsteht, wie dasjenige, von dem beim Octaëder die Rede war. Da die Kanten, die in der Ecke des Paral-

lelepipeds, welche zugleich die Tetraëderecke ist, und an welcher die Decrescenzen geschehen, zusammen kommen, ganz im Tetraëder liegen, so werden dieselben Kanten von Ebenen, die den aus den Decrescenzen entstehenden Flächen parallel sind, offenbar in denselben Verhältnissen geschnitten, man mag sich das Parallelepiped ganz dazu denken oder nicht. Eine Fläche also, die $(\underset{2}{A}B^2B'^3)$ zum Zeichen hat, liegt so, dass eine Ebene, die durch A''', durch zwei Drittheil der Kante B und durch einen Drittheil der Kante AA'' oder durch $pA'''q$ gelegt ist (Fig. 59), der bezeichneten Fläche parallel geht. Diese Decrescenz kann sich an allen Ecken wiederholen, z. B. an der Ecke A', wobei sie das Zeichen $(A'^{\frac{1}{2}}B''^2B^3)$ annimmt. Diese Fläche lässt sich indess einfacher durch eine Decrescenz an denselben Ecken A, A' geben, die auf den den Kanten B, B', B'' gegenüberliegenden Flächen des Tetraëders geschieht; sie bekommt, in dieser Ansicht, die Zeichen $\underset{\frac{1}{2}}{A}$, $A'^{\frac{1}{2}}$, $^{\frac{1}{2}}A''$, wobei man sich eigentlich das Tetraëder umgekehrt denken muss, so dass die Kante B' nach hinten gewendet ist. Es ist dieselbe Fläche, die beim Octaëder das Zeichen $\underset{3}{A}$ nimmt, denn wenn man sich an die Fläche des Tetraëders, auf welcher die Decrescenz geschieht, ein Octaëder angesetzt denkt, wie es in Fig. 57 geschehen ist, wo IAO das Tetraëder, AA' das sich anschliessende Octaëder ist; so verhält sich (s. die Formeln in Nr. 26), $Ar : An : Aq' = 1 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3}$; folglich ist $\omega = 1$, $y = \frac{2}{3}$, $u = \frac{2}{3}$, und $x = 2$, $y = 2$; und das Zeichen der Fläche $Ampr$, aufs Parallelepiped II' bezogen, $\underset{2}{A}$; und aufs Octaëder bezogen $\underset{3}{A}$.

29. Drei Spaltungsebenen, die sich in derselben Linie und unter denselben Winkeln schneiden, geben ein regelmässiges sechsseitiges Prisma als Grundgestalt, dessen Seitenflächen den Spaltungsebenen parallel gehen.

Setzt man diese Spaltungen parallel den Seitenflächen des Prisma fort, so zerfällt es in lauter dreiseitige Prismen, deren Basen gleichseitige Dreiecke sind, wie man aus Fig. 60 sieht, welche die Basis eines regulären sechsseitigen Prisma vorstellt. Zwei benachbarte dreiseitige Prismen bilden vereinigt ein vierseitiges Prisma mit rhombischer Basis von 120° und 60°. Das Ergänzungsatom (molécule intégrante) des regulären sechsseitigen Prisma ist also ein dreiseitiges Prisma, das wegfallende Atom (molécule soustractive) dagegen ein Prisma mit rhombischer Basis. Die Decrescenzen am regulären sechsseitigen Prisma befolgen also dasselbe Gesetz, als die Decrescenzen am graden Prisma mit rhombischer Basis. Fig. 61 stellt das sechseitige Prisma mit bezeichneten Flächen Ecken und Kanten vor; Fig. 62 ist das herausgeschnittene Prisma mit rhombischer Basis, in welchem $pq = qr = B$, $qs = G$, $pqr = 120°$. Der Fläche $\overset{2}{A}$ geht also die Ebene ptr parallel, der Fläche $\overset{1}{B}$ die Ebene psz, der Fläche $(A^{\frac{2}{3}}B^{\frac{3}{3}}B^{\frac{1}{3}})$ oder $(\frac{1}{2}AB^{\frac{2}{3}}G^{\frac{1}{3}})$ die Ebene ptv; indem $qu = \frac{1}{3}qr$ und $qt = \frac{1}{4}qs$.

30. Es bleibt uns jetzt nur noch eine Kerngestalt übrig zu betrachten, und das ist das Rhombendodecaëder oder Granatoëder, welches von zwölf gleichen Rhomben begrenzt ist, und aus dem Würfel oder Octaëder durch grade Abstumpfung der Kanten entsteht. Die Spaltungsebenen des Granats, der Blende, gehen den Flächen dieses Körpers parallel. Zerspaltet man ihn weiter durch Ebenen, die den Spaltungsebenen oder den Flächen desselben parallel durch dessen Mittelpunct gehen, so entstehen vier und zwanzig Tetraëder, von denen je zwei eine Granatoëderfläche zur Basis haben und deren Spitzen alle im Mittelpunct des Körpers zusammenfallen. Man erhält diese Tetraëder auch, wenn man die Pyramiden, deren Spitzen

im Mittelpunct des Körpers liegen, und deren Basen die Flächen desselben sind, in zwei Theile theilt, durch einen Schnitt, der durch die kleine Diagonale der Basis der Pyramide und ihre Spitze geht. Man sieht, dass diese Tetraëder nicht regulär sind. Sechs solche benachbarte Tetraëder bilden zusammen ein Rhomboëder, welches auch als von drei in einer stumpfen Ecke des Granatoëders zusammenkommenden Flächen und ihren durch den Mittelpunct gehenden Parallelen gebildet gedacht werden kann.

Die Ergänzungsatome des Rhombendodecaëders sind also diese Tetraëder, seine wegfallenden Atome (molécules soustractives) Rhomboëder. Die Decrescenzen an den Ecken und Kanten geschehen also wie am Rhomboëder; und man darf sich nur das Rhomboëder, welches von der Fläche, auf welcher die Decrescenz geschieht, von den zwei andern, die mit ihr in derselben dreiflächigen Ecke zusammen kommen, und von den Parallelen dieser drei Flächen gebildet wird, ganz allein zu denken, um sich vollkommne Rechenschaft von jedem vorkommenden Zeichen irgend einer Decrescenz ablegen zu können. Was die Bezeichnung der Flächen, Kanten und Ecken betrifft, so kann man die Fig. 63 nachsehen. Tritt ein Unterschied zwischen den Decrescenzen an den Ecken *A* ein, wie bei der Blende, so bezeichnet man sie mit zwei Buchstaben *A* und *e*, wie wir schon beim Rhomboëder gethan haben.

31. Wenn ausser den Spaltungsebenen, welche die bisher angegebenen primitiven Formen bilden, noch andere vorkommen, so gehen sie stets entweder wirklich einer abgeleiteten Fläche parallel, oder einer Fläche, die ihnen parallel ginge, würde wenigstens zu den Flächen gehören, die im Flächensystem des Krystalls möglich sind. Haüy lässt diese überzähligen

Spaltungsebenen (joints surnuméraires), welche er bei der Bildung des Kerns unbeachtet lässt, oft in die Bildung des Ergänzungsatoms als Begrenzungsflächen auftreten, und dann erhält, selbst bei den parallelepipedischen Kernformen, das Ergänzungsatom eine andere Gestalt als der Kern. Beim Schwerspath z. B. gehen drei Brüche den Flächen eines graden vierseitigen Prisma mit rhombischer Basis parallel, und bilden die Haüysche Kernform; zwei andere weniger deutliche Spaltungsebenen gehen durch die Diagonalen der Basen des Prisma und theilen das vierseitige Prisma in vier Prismen, deren Basen rechtwinklichte Dreiecke sind; diese sind die Ergänzungsatome des Schwerspaths; das wegfallende Atom (molécule soustractive) aber bleibt der Kernform völlig ähnlich, und die Decrescenzen geschehen durchaus auf dieselbe Weise, als wenn die Ergänzungsatome auch der Kernform ähnlich wären.

Wichtige Folgerung aus der Haüy'schen Theorie. Erstes Grundgesetz der Krystallbildung.

32. Man mag nun die Haüysche Theorie als den wahren Ausspruch dessen, was in der Natur vorgeht, oder bloss als eine mathematische Darstellung der Phänomene ansehen, so ist sie doch bis jetzt die einzige Hypothese, die den Zusammenhang zwischen den primären und secundären Formen, den sie als nothwendige Folge ihrer Principien aufstellt, und der noch durch keine Beobachtung ist widerlegt worden, wirklich erklärt. Alle anders denkenden Crystallographen nehmen dieses Grundgesetz der Krystallbildung, mit dem wir uns gleich näher beschäftigen werden, als unerklärte Basis ihrer Theorien an.

Dieses Grundgesetz der Krystallbildung, welches unmittelbar aus der Haüyschen Theorie hervorgeht, besteht darin, dass, wenn man mehrere Flächen eines Krystalls, welche den deutlichsten Spaltungsebenen parallel gehen, zu einer Kernform vereinigt, die Kanten dieser Kernform von den übrigen Flächen desselben Krystalls in rationalen Verhältnissen geschnitten werden, oder mit andern Worten, die Exponenten der Zeichen der Flächen sind nie irrationale Grössen. Wir werden im analytischen Theile dieses Werks sehen, dass überhaupt alle Körper von drei oder mehreren Flächen desselben Krystalls gebildet, diese Eigenschaft haben; die Lehre von den hypothetischen Kernformen gab uns schon ein Beispiel hievon; denn hier sieht man schon zwei verschiedene Formen desselben Krystalls als Kernformen auftreten; die Anzahl dieser Formen, auf welche man alle Flächen des Krystalls beziehen kann, ist aber viel grösser.

Es ist klar, dass wenn zwei oder mehrere Kanten der Kernform, die durch denselben Punct gehen, von einer secundären Fläche in einem gewissen Verhältniss geschnitten werden, dieses Verhältniss immer dasselbe bleibt, wenn man die Kanten parallel mit sich selbst fortbewegt, doch so, dass sie sich immer in einem Puncte schneiden. Man kann sich also denken, welchen Punct man will, innerhalb oder ausserhalb des Krystalls, so werden zwei oder mehr Linien, die durch diesen Punct parallel den Kanten der Kernform gehen, von allen secundären Flächen in rationalen Verhältnissen geschnitten, d. h. wenn man auf einer dieser Linien irgend einen Punct nimmt, durch welchen man sich allen secundären Flächen parallele Ebenen gelegt denkt, so sind die Verhältnisse der Längen der von diesen Ebenen abgeschnittenen Linien, vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunct

der Linien an, bis zu ihren Durchschnittspuncten mit den Ebenen, rational.

Denkt man sich nun einen solchen Punct, durch den man mehrere den Kanten der Kernform parallele Linien legt, im Mittelpunct des Krystalls, so kann man die Lage jeder secundären Fläche dadurch bestimmen, dass man angiebt, wie sie diese Linien (oder diese Mittelpunctscoordinaten) schneidet; und diese Angaben werden sich, wegen der Rationalität, die auch hier wieder bei den Verhältnissen der abgeschnittenen Stücke eintritt, eben so einfach darstellen lassen, als die Bestimmungen und Zeichen, die aus der Haüyschen Methode fliessen. Das ist die Methode von Weiss.

Weiss' Methode, die Krystallflächen zu bezeichnen. Verwandlung der Weissischen Zeichen in Haüysche.

33. Weiss denkt sich also drei oder vier Linien durch den Mittelpunct des Krystalls gezogen, welche mit gewissen Kanten der wahren oder hypothetischen Kernform parallel gehen. Diese Linien werden von den Flächen der Kernform in gewissen Puncten geschnitten; die Entfernungen dieser Puncte von Mittelpunct bestimmen die Länge dieser Linien, die er Axen nennt. Beim Würfel z. B. haben die drei Linien, die, den Kanten des Würfels parallel, durch dessen Mittelpunct gehen, und welche von den Würfelflächen, deren Mittelpunct sie treffen, abgeschnitten werden, gleiche Länge, und sind untereinander rechtwinklicht; Weiss bezeichnet sie mit *a*. Legt man Ebenen durch ihre Endpuncte, so entsteht eine

reguläre Octaëderfläche; Weiss bezeichnet deshalb die Fläche des regulären Octaëders so:

$$\overline{|a : a : a|}.$$

Die Fläche des Leucitoëders hingegen, die Haüy mit A bezeichnet, und welche (s. Fig. 56) durch die Kante an der Basis und durch die Hälfte der Halbaxe AM oder durch die Linie Dc geht, bezeichnet er so:

$$\overline{|a : a : \tfrac{1}{2}a|} \text{ oder } \overline{|2a : 2a : a|}.$$

Die eingeklammerten Grössen geben also das Verhältniss der abgeschnittenen Stücke der halben Axen des Octaëders.

Wenn man in der Fig. 56 durch A eine Linie zieht, die mit kD parallel ist, und den Durchschnittspunct dieser Linie und der Verlängerung der Linie BD mit L bezeichnet, so ist, die Linie kD mag liegen wie sie wolle,

$$\frac{BK}{AB} = \frac{BD}{BL}.$$

Nun ist aber auch

$$\frac{MD}{ML} = \frac{Mh}{AM}$$

woraus

$$ML = \frac{MD \cdot AM}{Mh}$$

oder da $BL = MB + ML$, und $MD = MB$

$$BL = MB\,(1 + \frac{AM}{Mh}).$$

Substituirt man diesen Werth von BL in die erste Gleichung, und setzt zugleich $AB - Ak = Bk$, $2MB = BD$, so findet man:

$$1 - \frac{Ak}{AB} = \frac{2}{1 + \frac{AM}{Mh}}$$

oder

$$\frac{Ak}{AB} = \frac{1 - \frac{Mh}{AM}}{1 + \frac{Mh}{AM}}.$$

Nun drückt aber $\frac{AB}{Ak}$ die Haüysche Decrescenzzahl, $\frac{Mh}{AM}$ aber den Coefficienten der dritten Weissischen Axe aus. Bezeichnet man also das erste Verhältniss mit h, dass zweite mit γ, so hat man:

$$h = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

oder

$$\gamma = \frac{h-1}{h+1}$$

und wir haben

$$\overset{h}{A} = \overline{|a : a : \tfrac{h-1}{h+1} \cdot a|}$$

$$\overset{1}{A} = \overline{|a : a : \tfrac{1}{2}a|}$$

$$\overset{4}{A} = \overline{|a : a : \tfrac{1}{3}a|}$$

und so fort.

Die Fläche $\overset{1}{A}$, welche durch die Linie Aa geht, trifft bloss die Axe AM; die andern werden gar nicht von dieser Fläche geschnitten, weil sie mit ihr parallel sind; die Entfernung ihres Durchschnittspuncts vom Mittelpunct ist also unendlich gross. Man kann also die Fläche $\overset{1}{A}$ nicht anders bezeichnen als so:

$$\overline{|\infty a : \infty a : a|}$$

das ist die Würfelfläche.

Eine Fläche hingegen, die durch eine Kante an der Basis des Octaëders geht und mit der Axe parallel ist (die Fläche einer vierseitigen rechtwinklichten Säule, die mit den übrigen graden Abstumpfungen der Octaëderkanten combinirt, das Granatoëder giebt), hat

$$\overline{|a : a : \infty a|}$$

zum Zeichen.

Beim Quadratoctaëder ist die verticale Axe von den beiden horizontalen verschieden, man bezeichnet sie deshalb mit c. So bedeutet

$$|a : a : \infty c|$$

die grade Abstumpfungsfläche der Basiskante, und

$$|\infty a : \infty a : c|$$

die grade Abstumpfung der Endspitze.

34. Beim graden Rhombenoctaëder sind die drei Axen zwar rechtwinklicht, aber nicht einander gleich, man muss sie also mit verschiedenen Buchstaben bezeichnen. Weiss hat für die halbe Hauptaxe das Zeichen c eingeführt; man denkt sie sich immer vertical; die beiden horizontalen Halbaxen werden mit a und b bezeichnet; die Axe $2a$ denkt man sich nach dem Beobachter zugekehrt, so dass die Endpuncte derselben an der vordern und hintern, die Endpuncte der Axe $2b$ hingegen an der rechten und linken Seite des Krystalls sich befinden. Es sey nun irgend eine Decrescenz $(\overset{\omega}{A}B^{r}B'^{r'})$ gegeben, an der Ecke A des Octaëders (s. Fig. 57), so dass die dadurch entstehende Fläche der Ebene mpr parallel geht, indem wieder (siehe Nr. 26):

$$\varphi \cdot \frac{Am}{B} = x$$
$$\varphi \cdot \frac{Ap}{B''} = z$$
$$\varphi \cdot \frac{An}{B'} = y$$
$$\omega \cdot \frac{Aq}{B'''} = u \text{ *)}$$
$$\varphi \cdot \frac{Ar}{AI} = \omega$$

wo φ eine so gewählte Zahl ist, dass die Werthe von x und z zwar so

*) In dieser Formel ist übrigens $B = B'$, $B'' = B'''$.

klein als möglich ausfallen, aber doch immer ganze Zahlen bleiben. Man denke sich eine der Ebene *mpr* parallele Ebene durch *E* gelegt, so wie es in Fig. 64 abgebildet ist. Die Werthe von x, y, z, u, ω werden immer dieselben bleiben. Legt man nun eine Ebene durch ApA', die zugleich durch den Mittelpunct M des Octaëders geht, welche Ebene in Fig. 65 abgebildet ist, so schneidet die Ebene *mpnq* (Fig. 64), welche der Fläche $(\overset{\omega}{A}B\,B'')$ parallel geht, die Axe AM (Fig. 65) offenbar in s. Setzt man also $pM = a$. $AM = c$, so ist offenbar, wenn man At mit qp parallel zieht:

$$\frac{M\cdot}{\cdot} = \frac{a}{Mt}$$

ferner

$$\frac{2a}{a \pm Mt} = \frac{qv}{Ar}:$$

oder da $Ar = B'''$, $qr = Ar - Aq$, und $Aq = \frac{B'''\cdot u}{\varphi}$:

$$\frac{2a}{a + Mt} = \frac{\varphi - u}{\varphi}$$

also

$$Mt = \frac{a(\varphi + u)}{\varphi - u}.$$

Diesen Werth in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$Ms = \frac{c(\varphi - u)}{(\varphi + u)}.$$

Da wir nun in der Fig. 64 die Ebene *mpnq* so gelegt haben, dass $Ap = B''$, so ist offenbar $\frac{Ap}{B''} = 1$, und $\varphi = z$: es ist also jetzt

$$Ms = \frac{(z - u)}{(z + u)} \cdot c.$$

Legt man eine zweite Ebene durch AFA', welche zugleich durch den Mittelpunct M des Octaëders (Fig. 64) geht, so werden die Seiten dieser rhombischen Ebene von der Ebene *mpnq* in den Puncten m, n geschnitten,

wie die Fig. 66 zeigt. Hier ist wieder $AM = c$; FM aber ist gleich b. Verlängert man FM bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung der Linie mn, d. h. bis o, so ist Mo das Stück der Axe b, welches von der Ebene mpn abgeschnitten wird. Man findet auch hier leicht, wenn man durch A eine Linie zieht, die der Linie no parallel ist, und durch eben solche Proportionen, wie im Vorhergehenden, dass:

$$Mo = \frac{\gamma(z-u)}{2zu - zy - uy} \cdot b.$$

Die Werthe von Ms und Mo enthalten aber die Coefficienten von b und c in den Weissischen Zeichen, während der Coefficient von a gleich 1 ist; wir wollen diese drei Coefficienten mit α, β, γ bezeichnen, so dass $Ms = \gamma c$, $Mo = \beta b$, $pM = \alpha a = a$; also:

$$\overline{|\alpha a + \beta b + \gamma c|} = (\tfrac{A}{\omega} B' B'') = (\tfrac{1}{\omega} A B^{x} B'^{z});$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\beta = \frac{\gamma(z-u)}{2zu - zy - uy}$$

$$\gamma = \frac{z-u}{z+u}$$

oder da nach Nr. 26

$$y = \frac{\omega z}{\omega + z}$$

$$u = \frac{\omega x}{\omega + x}$$

so ist:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{xz + \omega z - \omega x}{xz - \omega z + \omega x}$$

$$\gamma = \frac{xz + \omega z - \omega x}{xz + \omega z + \omega x}.$$

Die Coefficienten zeigen die Verhältnisse an, in welchen die von einer gewissen Fläche abgeschnittenen Stücke der Axen des Octaëders zu einan-

der stehen; man kann sie also mit jeder beliebigen Zahl multipliciren, vorausgesetzt, dass man jeden Coefficienten mit derselben Zahl multiplicirt. Man kann also auch eben so gut den Coefficienten $\gamma = 1$ machen, wie wir es mit den Coefficienten α gethan haben; dann bekommen die drei Coefficienten folgende Werthe:

$$\gamma = 1$$
$$\beta = \frac{xz + \omega z + \omega x}{xz - \omega z + \omega x}$$
$$\alpha = \frac{xz + \omega z + \omega z}{xz + \omega z - \omega x}.$$

Will man endlich den Coefficienten $\beta = 1$ machen, so ist

$$\beta = 1$$
$$\gamma = \frac{xz - \omega z + \omega x}{xz + \omega z + \omega x}$$
$$\alpha = \frac{xz - \omega z + \omega x}{xz + \omega z - \omega x}.$$

Wenn man nicht vorher bestimmen kann oder will, welcher Coefficient $= 1$ ist, so giebt man diesen Formeln folgende allgemeine Form, indem man sie (die letzten) durch $xz - \omega z + \omega x$ dividirt (und mit z multiplicirt). Man bekommt:

$$\alpha = \frac{z}{xz + \omega z - \omega x}$$
$$\beta = \frac{z}{xz - \omega z + \omega x}$$
$$\gamma = \frac{z}{xz + \omega z + \omega x}.$$

Diese Formeln reichen hin, um alle Haüyschen Zeichen für Decrescenzen am Rhomben-Octaëder, die sich auf das entsprechende Parallelepiped beziehen, in Weissische zu verwandeln. Denn man kann alle Decrescenzen, von welcher Art sie seyen, als mittlere Decrescenzen ansehen, und sie als solche bezeichnen, indem man den Exponenten die entsprechenden

Werthe giebt; man muss nur nicht vergessen, dass sich alle intermediäre Decrescenzen bei Haüy auf ein Parallelepiped beziehen, die Decrescenzen von der Form $\underset{h}{A}$ hingegen gewöhnlich auf das Octaëder selbst, so dass $h = \frac{1}{\omega} + 1$. So ist zum Beispiel:

$$(A^2B^1B''^1) = \underset{3}{A} = \boxed{a : b : \tfrac{1}{2}c} = \boxed{2a : 2b : c}$$

$$(A^1B^1B''^1) = \underset{2}{A} = \boxed{a : b : \tfrac{1}{3}c} = \boxed{3a : 3b : c}$$

$$(^3AB^1B''^1) = \underset{4}{A} = \boxed{a : b : \tfrac{1}{5}c} = \boxed{5a : 5b : 3c}$$

$$(^1AB^1B''^\infty) = {}^1B'' = \boxed{a : \infty b : c}$$

$$(^2AB^1B''^\infty) = {}^2B'' = \boxed{\tfrac{1}{3}a : b : \tfrac{1}{3}c} = \boxed{a : 3b : c}.$$

Für die Decrescenzen an den Ecken nämlich hat man $x = z = 1$, also

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 1\\ \beta = 1\\ \gamma = \frac{1}{1+2\omega}\end{array}\right\} \text{woraus: } (\overset{1}{A^\omega}B'B''^1) = {}^1\underset{\omega+1}{A} = \boxed{a : b : \frac{1}{1+2\omega}c}$$

$$\text{oder} \qquad \underset{h}{A} = \boxed{a : b : \frac{h-1}{h+1}c}.$$

Und für die Decrescenzen an den Kanten des Octaëders hat man $x = 1$, $z = \infty$, also:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{1+\omega}\\ \beta = \frac{1}{1-\omega}\\ \gamma = \frac{1}{1+\omega}\end{array}\right\} \text{woraus: } {}^1_\omega B = \boxed{\frac{1}{1+\omega}a : \frac{1}{1-\omega}b : \frac{1}{1+\omega}c}$$

$$\text{oder} \qquad {}^h B = \boxed{\frac{h}{h+1}a : \frac{h}{h-1}b : \frac{h}{h+1}c}.$$

Die Fläche A, die man auch mit $\boxed{a : b : \infty c}$ bezeichnen könnte, wird mit $\boxed{\infty a : \infty b : c}$ bezeichnet.

Macht man in diesen Formeln $a = b$ oder $a = b = c$, so passen sie für diejenigen Fälle, wo das Haüysche Kernoctaëder ein Quadratoctaëder oder ein reguläres Octaëder ist; denn beim Quadratoctaëder sind die bei-

den horizontalen Axen, beim regulären Octaëder alle drei Axen untereinander gleich.

35. Beim graden Rectangulär-octaëder legt Weiss die horizontalen Axen nicht durch die gegenüberliegenden Winkel der Basis, sondern durch die Mitten je zweier parallelen Seiten der Basis, so dass sie den Kanten an der Basis parallel zugleich durch den Mittelpunct des Octaëders gehn; die verticale Axe fällt mit der Linie zusammen, die wir bisher immer als Axe angesehen haben. So sind $|\,a : \infty b : c\,|$ und $|\,\infty a : b : c\,|$ die Zeichen für die Flächen des graden Rectangulär-octaëders, und $|\,a : b : c\,|$ die Fläche eines Rhombenoctaëders, aus welchem, durch grade Abstumpfung der Endkanten, dasselbe grade Rectangulär-octaëder entsteht. Um den Zusammenhang der Haüyschen Zeichen, die sich auf diese Grundform beziehen, mit den Weissischen zu finden, nehme man wieder die Fig. 64 vor, welche ein grades Rectangulär-octaëder vorstellen möge. Man bezeichne die Mitte der Kanten an der Basis Fp, $v O$ und $p O$, Fv mit b, b' und a, a', und ziehe Linien durch b, b' und a, a' und AA'; diese Linien gehen offenbar durch den Mittelpunct M; es sind die Weissischen Axen des graden Rectangulär-octaëders, so dass $aM = a$, $bM = b$, $AM = c$.

Legt man nun Ebenen durch die Endpuncte dieser Axen, d. h. durch durch Aba, Aab', $Ab'a'$, $Aa'b$ und $A'ba$, $A'ab'$, $A'b'a'$, $A'a'b$, so entsteht ein Octaëder mit rhombischer Basis, dessen Endkanten Ab, Aa, Ab', Aa' sind. Wenn wir erst wissen, wie diese Endkanten von der Ebene $mpnq$ deren Zeichen $(\underset{\omega}{A}B^{x}B'^{z})$ ist, geschnitten werden, so ist es leicht, vermöge der schon entwickelten Formeln, die das Rhombenoctaëder betreffen, das entsprechende Weissische Zeichen zu finden.

Zu dem Ende zeichne man drei Flächen des Octaëders besonders, nämlich AFp, ApO und AFv; siehe Fig. 67, 68 und 69; in diesen Figuren sind zur Bezeichnung der verschiedenen Puncte dieselben Buchstaben gewählt, wie in Fig. 64; welche man mit Fig. 57 vergleichen muss, um die Bezeichnung der Kanten abzunehmen. In den Fig. 67, 68 und 69 ist nach dem Vorhergehenden:

$$\varphi \cdot \frac{Am}{B} = x$$
$$\varphi \cdot \frac{An}{B'} = y$$
$$\varphi \cdot \frac{Ap}{B''} = z$$
$$\varphi \cdot \frac{Aq}{B'''} = u$$

worin übrigens $B = B' = B'' = B'''$, und $\varphi = z$.

Nun ist aber offenbar:

1°. Wenn man in Fig. 67 eine der Linie pm parallele Linie durch A zieht, und den Durchschnittspunct dieser Linie mit der Verlängerung von Fp mit o bezeichnet, so ist

$$\frac{Ai}{Ab} = \frac{op}{op + bp};$$

nun ist aber auch

$$\frac{op + 2bp}{op} = \frac{AF}{Am}$$

folglich

$$\frac{op + bp}{op} = \frac{AF}{Am} - \frac{bp}{op};$$

oder da $\frac{bp}{op} = \frac{bi}{Ai} = \frac{Ab - Ai}{Ai}$ ist:

$$\frac{op + bp}{op} = \frac{Ai \cdot AF - Ab \cdot Am + Ai \cdot Am}{Ai \cdot Am};$$

diesen Werth in die erste Gleichung gesetzt, giebt endlich;

$$\frac{Ai}{Ab} = \frac{2Am}{AF + Am}.$$

Wir wollen die eine Endkante des vom Rectangulär-octaëder eingeschlossenen Rhombenoctaëders Ab mit C bezeichnen; das durch die Fläche $mpnq$ von ihr abgeschnittene Stück Ai, durch die Kante Ab dividirt, sey gleich x'; aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass $AF = B$ und $Am = \frac{Bx}{z}$. Substituirt man diese Buchstaben in die letzte Gleichung, so hat man:

$$x' = \frac{2x}{z+x}.$$

2°. Man findet eben so für die Octaëderfläche Fig. 68, wenn man $Aa = C''$ setzt und $\frac{Ak}{B''}$ mit z' bezeichnet,

$$z' = \frac{2\gamma}{z+\gamma}.$$

3°. Wenn man in der Fig. 69 mg mit Fv parallel zieht, so ist. wie im Vorhergehenden;

$$\frac{Al}{Af} = \frac{2Aq}{Ag+Aq};$$

nun ist aber

$$Af = \frac{Aa' \cdot Am}{AF}$$

$$Ag = \frac{Av \cdot Am}{AF}$$

also

$$\frac{Al}{Aa'} = \frac{2 \cdot \frac{Aq}{Av}}{1 + \frac{Aq}{Av} \cdot \frac{AF}{Am}} = \frac{2 \cdot Aq \cdot Am}{B''' \cdot Am + B \cdot Aq}.$$

Setzt man in diese Gleichung $Am = \frac{Bx}{z}$ und $Aq = \frac{B''u}{z}$, und setzt man u' für $\frac{Al}{Aa}$, so hat man:

$$u' = \frac{2xu}{z(x+u)}.$$

4°. Ergänzt man endlich das vom Rectangulär-octaëder (Fig. 64) eingeschlossene Rhombenoctaëder zu einem Parallelepiped, indem man ein Tetraëder auf die Fläche setzt, die durch $Aa'b'$ geht, und bezeichnet das

Verhältniss des durch die Ebene *mpnq* von der durch *A* gehenden Tetraëderkante abgeschnittenen Stücks zu dieser Kante selbst mit ω', so hat man, vermöge der in Nr. 26 entwickelten Formeln, welche den Zusammenhang zwischen ω, x und u geben, und welche offenbar auch für ω', x', u' richtig sind:

$$\omega' = \frac{x'u'}{x'-u'}.$$

Hierin die eben gefundenen Werthe von x', u' substituirt, giebt:

$$\omega' = \frac{2u}{z-u}.$$

5°. Setzt man in die bisher gefundenen Werthe von x', z', ω', $y = \frac{\omega z}{\omega+z}$ und $u = \frac{\omega x}{\omega+x}$, so ist:

$$x' = \frac{2x}{z+x}$$
$$z' = \frac{2\omega}{2\omega+z}$$
$$\omega' = \frac{2\omega x}{xz+\omega z-\omega x}.$$

Vermöge dieser Formeln kann man leicht das Haüysche Zeichen $(\underset{\omega}{A}B'B''^{\infty})$, welches sich auf das Rectangulär-octaëder (Fig. 64 und 57) bezieht, in ein andres Zeichen $(\underset{\omega}{A}C^{x'}C''^{z'})$ verwandeln, welches sich auf ein Rhombenoctaëder bezieht, welches im Rectangulär-octaëder eingeschlossen ist, und dessen Endspitzen mit der Endspitze des Rectangulär-octaëders, dessen Ecken an der Basis mit den Mitten der Basiskanten des Rectangulär-octaëders zusammenfallen. Man muss die gefundenen Werthe von x', z', ω' mit einer Zahl multipliciren, die die Exponenten x', z' zu ganzen Zahlen macht, wenn sie es nicht schon sind.

Um nun für die Fläche $(\underset{\omega}{A}C^{x'}C''^{z'})$ das Weissische Zeichen zu finden, bedient man sich der Formeln, die in Nr. 34 fürs Rhombenoctaëder entwickelt worden sind, und nach welchen

$$\alpha' = \frac{z'}{x'z' + \omega'z' - \omega'x'}$$
$$\beta' = \frac{z'}{x'z' - \omega'z' + \omega'x'}$$
$$\gamma' = \frac{z'}{x'z' + \omega'z' + \omega'x'};$$

wenn man die Coefficienten des dem Zeichen $(\underset{\omega}{A} C^{x'} C^{y'z'})$ entsprechenden Weissischen Zeichens mit α', β', γ' bezeichnet

Substituirt man in diese Formeln die eben gefundenen Werthe von x', z', ω', so findet man:

$$\alpha' = \frac{(z+x)}{4x\omega\,(z-x)} \cdot (xz - \omega x + \omega z)$$
$$\beta' = \frac{(z+x)}{4xxz} \cdot (xz - \omega x + \omega z)$$
$$\gamma' = \frac{(z+x)}{4x\,(xz + \omega z + \omega x)} \cdot (xz - \omega x + \omega z).$$

Dividirt man jede dieser Gleichungen durch $\frac{(xz - \omega x + \omega z)\,(z+x)}{4x}$, welches immer erlaubt ist, da die Grössen α', β', γ' nur Verhältnisse anzeigen, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{\omega\,(z-x)} \\ \beta' &= \frac{1}{xz} \\ \gamma' &= \frac{1}{\omega z + \omega x + xz} \end{aligned}\right\} \text{ oder } = \left\{\begin{aligned} &\frac{z}{\omega\,(z-x)} \\ &\frac{1}{x} \\ &\frac{z}{\omega z + \omega x + xz} \end{aligned}\right.$$

Vermöge dieser Formeln ist es leicht, das Haüysche Zeichen $(\underset{\omega}{A} B^{x} B^{y'z'})$, das sich auf Rectangulär-octaëder bezieht, in das Weissische $\boxed{\alpha' a : \beta' b : \gamma' c}$ zu verwandeln; die Axen a, b, gehen den Kanten an der Basis des Rectangulär-octaëders parallel.

Für die Decrescenzen an den Ecken und Kanten hat man folgende particuläre Formeln, die leicht aus den eben entwickelten abzuleiten sind:

$$(\underset{\omega}{A}B^1B''^1) = \underset{\omega+1}{A} = \boxed{\infty a : b : \frac{1}{2\omega+1} \cdot c} \text{ oder } \underset{h}{A} = \boxed{\infty a : b : \frac{h-1}{h+1} \cdot c}$$

$$(\underset{\omega}{A}B'B''^{\infty}) = {}^{\frac{1}{\omega}}B'' = \boxed{\frac{1}{\omega} \cdot a : b : \frac{1}{1+\omega} \cdot c}.$$

Die letzte Gleichung findet man am leichtesten, wenn man diejenigen Werthe, welche $z = \infty$ enthalten, im Zähler und Nenner mit z dividirt und $\frac{\omega x}{z} = o$ setzt.

36. Beim graden Prisma mit rectangulärer Basis legt Weiss die drei Axen durch den Mittelpunct, parallel mit den Kanten des Prisma. Aus dem Parallelismus der Weissischen Axen und der Kanten des Prisma ist klar, dass jede Fläche die Axen in eben denselben Verhältnissen schneiden muss, als die Kanten des Prisma. Wir haben also für die Decrescenz $(\underset{\omega}{A}B^xC^y)$ (Fig. 50.):

$$\alpha = x$$
$$\beta = y$$
$$\gamma = \omega;$$

für die Decrescenz $(\underset{\omega}{A}C''G^z)$

$$\alpha = \omega$$
$$\beta = y$$
$$\gamma = z$$

und so fort, so dass der Exponent von B immer den Werth von α, der Exponent von C den Werth von β, der Exponent von G den Werth von γ ausdrückt; da aber nur immer zwei von diesen Werthen in jedem Zeichen vorkommen, so giebt ω den Werth des dritten Coefficienten.

Dasselbe gilt vom graden Prisma mit quadratischer Basis, wo $a = b$ (s. Fig. 49), und vom Würfel, wo $a = b = c$.

So ist beim graden Prisma mit rectangulärer Basis:

$$\overset{1}{A} = (\underset{1}{A}B^1C^1) = \boxed{a : b : c}$$

$$\overset{2}{A} = (\underset{\frac{1}{2}}{A}B^1C^1) = (A^2B^1C^1) = \boxed{a : b : \tfrac{1}{2}c}$$

$$B = (\underset{1}{A}B^1C^\infty) = \boxed{a : \infty b : c}$$

$$B = (\underset{\frac{1}{2}}{A}B^1C^\infty) = \boxed{a : \infty b : \tfrac{1}{2}c}$$

$${}^1G^1 = (\underset{1}{A}C^1G^\infty) = \boxed{a : b : \infty c}$$

$$(\underset{4}{A}B^2C^3) = \boxed{2a : 3b : 4c}$$

und so fort.

Will man diese Zeichen aufs grade Prisma mit quadratischer Basis beziehen, so braucht man nur in den Haüyschen Zeichen C in B, und in den Weissischen b in a zu verwandeln.

37. Beim Uebergange des graden Prisma mit rectangulärer Basis in ein grades Prisma mit rhombischer Basis durch grade Abstumpfung der Seitenkanten, behalten die Weissischen Axen dieselbe Lage. Die Axen a und b gehen den Diagonalen der Basis, die Axe c den Seitenkanten des rhombischen Prisma parallel.

Ds sey also Fig. 70 ein solches grades Prisma mit rhombischer Basis, wie Fig. 43. Wir wollen wieder AF mit B, Av mit B''', $\varphi \frac{Am}{B}$ mit x, $\varphi \frac{Aq}{B'''}$ mit u bezeichnen; es sey auch $\varphi \frac{Ar}{Al} = \omega$, wo φ eine solche Zahl ist, dass x und u ganze Zahlen sind und so klein als möglich ausfallen. Die Fläche mqr hat offenbar folgendes Zeichen:

$$(\underset{\omega}{A}B^xB'''^u).$$

Man verlängere nun die Ebene $AvA'F$ oder die gradangesetzte Endfläche des Prisma, und ziehe auf dieser verlängerten Ebene AL parallel

mit vM und vL parallel mit AM, so dass $AL = vM$ und $vL = AM$. Da nun die drei Weissischen Axen a, b, c, die durch den Mittelpunct des Prisma gelegt sind, den Linien AM, vM, AI parallel gehen, und $a = AM$, $b = vM$, $c = \frac{1}{2}AI$ ist, so werden die Linien AM, AL und $\frac{1}{2}AI$ in denselben Verhältnissen geschnitten, wie die Axen a, b, c; und wir haben, wenn wir die Coefficienten dieser Axen, wie immer, mit α, β, γ bezeichnen:

$$\alpha = \frac{Al}{AM}$$

$$\beta = \frac{As}{AL}$$

$$\gamma = \frac{Ar}{\frac{1}{2}AI} = \frac{2Ar}{AI}.$$

Wir haben aber, wie im Vorhergehenden (s. Nr. 35),

$$\frac{Al}{AM} = \frac{2 \cdot Aq \cdot Am}{B''' \cdot Am + B \cdot Aq}$$

und eben so

$$\frac{Aq}{\frac{1}{2}Av} = \frac{2Al \cdot As}{AL \cdot Al + AM \cdot As},$$

woraus

$$\frac{As}{AL} = \frac{Aq \cdot Al}{Av \cdot Al - Aq \cdot AM} = \frac{2Aq \cdot Am}{Am \cdot B''' - B \cdot Aq}.$$

Macht man nun in diesen Gleichungen und in der Gleichung $\gamma = \frac{2Av}{AI}$ die gehörigen Substitutionen, und dividirt sie alle mit $\frac{2}{q}$, so findet man:

$$\alpha = \frac{ux}{x + u}$$

$$\beta = \frac{ux}{x - u}$$

$$\gamma = \omega.$$

Vermöge dieser Formeln ist es leicht, das sich auf das grade Prisma mit rhombischer Basis beziehende Zeichen $(\underset{\omega}{A}B^{x}B'''^{u})$ in das Weissische $\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$ zu verwandeln.

Beispiele *):

$$(E^2B^1B^3) = (\underset{\frac{1}{3}}{E}B^1B^3) = \overline{|\,6a : 3b : 2c\,|};$$

$$E^2 = (\underset{\frac{1}{2}}{E}B^1B^1) = \overline{|\,\infty a : b : c\,|};\quad \overset{\frac{1}{3}}{B} = (\underset{\frac{1}{3}}{A}B^1B^\infty) = \overline{|\,a : b : \tfrac{1}{3}c\,|}.$$

39. Bei Haüy's schiefem Prisma mit rhombischer Basis (Fig. 71) legt Weiss die Axen durch die Ecken *a*, *b*, durch die Mitten *c*, *d*, der Kanten *lm*, *np*, und durch die Mitten *f*, *g* der beiden parallelen Basen des Prisma. Diese Axen machen ebenfalls rechte Winkel untereinander; denn Haüy nimmt immer seine schiefen Prismen mit rhombischer Basis so, dass *abh* ein rechter Winkel ist. Will man nun die Haüyschen Decrescenzen durch Weissische Zeichen ausdrücken, so verfährt man auf folgende Weise.

Man ziehe erst von der vordern obern Ecke *O* der Haüyschen schiefen Prismen mit rhombischer Basis (s. Fig. 72) Linien nach den Mitten der Seitenkanten *G*, *G*, und lege durch diese Linien eine Ebene. Diese Ebene ist offenbar auf die Seitenflächen des Prisma senkrecht; man kann also durch einen solchen Schnitt die Ecke *O* in die Ecke eines graden Prisma mit rhombischer Basis verwandeln. Da wir wissen, wie man die Haüyschen Zeichen, die sich auf ein grades Prisma mit rhombischer Basis beziehen, in Weissische Zeichen verwandelt, so brauchen wir nur die Haüyschen Zeichen, die sich auf ein schiefes rhombisches Prisma beziehen, erst in solche umändern, die sich auf ein grades rhombisches Prisma beziehen; die Beziehung der letztern zu den Weissischen ist uns schon gegeben.

Es sey also *rst* (Fig. 74) eine Fläche. deren Haüysches Zeichen

$$(\underset{\omega'}{E}B^{x'}D^{u'})$$

*) Die Ecke *E* ist diejenige Ecke, welche über dem Endpunct der Axe *b* liegt; da hingegen *A* diejenige Ecke ist, welche über dem Endpunkt der Axe *a* liegt. Man muss also *a* mit *β* verwechseln.

ist, auf ein schiefes rhombisches Prisma bezogen. Man lege durch die Ecke O und die ihr entgegengesetzte auf der hinteren Seite, und durch die Mitten der Seitenkanten G, G eine Ebene; diese Ebene macht, nach dem Vorhergehenden, einen rechten Winkel mit der Kante H, so dass die neue Ebene, in Verbindung mit den Seitenflächen des Prisma, ein grades Prisma mit rhombischer Basis macht. Die Endkanten dieses graden Prisma sind OG, $O'G$; diese werden von der secundären Fläche, deren Zeichen wir eben gegeben haben, in o und p geschnitten. Man braucht also nur die Länge der Linien oG, pG und Gt zu kennen, um das Zeichen der Fläche, auf ein grades Prisma mit rhombischer Basis bezogen, construiren zu können.

In dem obigen Zeichen, welches dieselbe Fläche auf das schiefe Prisma bezogen ausdrückt, ist $\omega' = \frac{Et}{Ek}$, $x' = \frac{Er}{EA}$, $u' = \frac{Es}{EO}$; es sey

$$(\underset{\omega}{E}B^{x}D^{u})$$

das Zeichen derselben Fläche auf das grade Prisma bezogen, so ist $\omega = \frac{Gt}{2Gk}$, $u = \frac{Go}{GO}$, $x = \frac{Gp}{GO'}$.

Nun ist aber

$$Gt = Et - EG = Et - \tfrac{1}{2}Ek$$

oder da $Et = Ek \cdot \omega'$ und $Ek = 2Gk$

$$\frac{Gt}{2Gk} = \omega = \frac{2\omega' - 1}{2}.$$

Ferner, wenn man durch O eine Linie mit st parallel zieht und den Durchschnittspunct dieser Linie mit Ek mit L bezeichnet, so ist;

$$\frac{Go}{GO} = \frac{Gt}{GL} = \frac{Et - EG}{EL - EG}$$

oder da auch $\frac{Es}{EO} = \frac{Et}{EL}$:

$$\frac{Go}{GO} = \frac{Et - EG}{\frac{Et \cdot EO}{Es} - EG}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $\frac{Go}{GO} = u$, von $Et = Ek \cdot \omega$, von $EG = \frac{1}{2}Ek$, von $\frac{EO}{Es} = \frac{1}{u'}$, so findet man

$$u = \frac{\omega' - \frac{1}{2}}{\frac{\omega'}{u'} - \frac{1}{2}} = \frac{u'(2\omega' - 1)}{2\omega' - u'}.$$

Endlich findet man für die andere Kante, durch ein ähnliches Verfahren,

$$x = \frac{\omega' - \frac{1}{2}}{\frac{\omega'}{x'} + \frac{1}{2}} = \frac{x'(\omega' - 1)}{2\omega' + x'}.$$

Diese drei Werthe von ω, u, x kann man noch mit $2\omega' - 1$ dividiren. Man findet alsdann

$$\omega = \frac{1}{2}$$
$$u = \frac{u'}{2\omega' - u'}$$
$$x = \frac{x'}{2\omega' + x'}.$$

Aus dem Vorhergehenden (s. Nr. 37) aber wissen wir, dass wenn $(\underset{\omega}{A} B^{r} D^{u})$ das Haüysche Zeichen einer Fläche, auf ein grades Prisma mit rhombischer Basis bezogen, und $\overline{|\, \overline{\alpha a} : \overline{\beta b} : \overline{\gamma c} \,|}$ das Weissische Zeichen derselben Fläche ist, so ist:

$$\alpha = \frac{ux}{x + u}$$
$$\beta = \frac{ux}{x - u}$$
$$\gamma = \omega.$$

Hier haben wir die Decrescenz nicht an der vordern Ecke A, sondern an der Seitenecke E geschehen lassen, man muss also α für β und β für α setzen, wenn man dieselbe Lage der Weissischen Axen beibehalten will. Ueberdiess, wenn man in Fig. 70 (s. Nr. 37) die vordere Ecke A zur Seite stellt, wie in Fig. 72, so ist die vordere Kante mit B, die hintere mit D bezeichnet, da hingegen in Fig. 72 B die hintere und D die vordere Kante

bedeutet; man muss also in den eben angeführten Formeln auch x mit u verwechseln. Substituirt man in den so modificirten Gleichungen die eben gefundenen Werthe von ω, x, u und multiplicirt mit 2, so findet man:

$$\alpha = \frac{u'x'}{\omega'u' + x'u' - x'\omega'}$$

$$\beta = \frac{u'x'}{\omega'(u' + x')}$$

$$\gamma = 1.$$

Diess sind also die Formeln, vermöge welcher man das Haüysche Zeichen $(\underset{\smile}{E}B^{x'}D^{u'})$, welches sich auf ein schiefes Prisma mit rhombischer Basis bezieht, in ein Weissisches, welches sich auf ein grades Rhombenoctaëder bezieht, verwandeln kann.

Da bei diesen Formen oft Flächen, die an der vordern Seite des Krystalls sich finden, an der hintern Seite nicht vorkommen, so hat Weiss die hintere halbe Axe a von der vordern unterschieden durch einen Accent, so: $a_{,}$. Bei den Flächen, die $a_{,}$ in ihren Zeichen haben, ist α negativ, woran man sie gleich erkennt, wenn es auch aus dem Haüyschen Zeichen nicht gleich zu ersehen wäre.

Beispiele (s. Fig. 45): $(E^1B^1D^1) = E^1 = \boxed{a : \tfrac{1}{2}b : c}$

$$E^3 = (\underset{1}{E}B^{\frac{1}{3}}D^1) = \boxed{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}b : c}$$

$$(E^1B^{\infty}D^{\frac{1}{2}}) = \overset{\frac{1}{2}}{B} = \boxed{a_{,} : \tfrac{1}{2}b : c}$$

$$(\tfrac{6}{5}E\,D^2G^3) = (\underset{3}{E}B^{\frac{5}{6}}D^2) = \boxed{\tfrac{12}{31}a : \tfrac{12}{31}b : c}$$

$$E^{\frac{2}{7}}B^2G^1 = (\underset{1}{E}B^2D^{\frac{7}{2}}) = \boxed{\tfrac{14}{17}a : \tfrac{14}{11}b : c}.\ ^{*)}$$

*) Diese beiden letzten Flächen kommen nach Haüy beim Pyroxen vor; da aber ihre Beziehungen auf die Axen so wenig einfach sind und die Haüyschen Zeichen auf sehr ungenauen Messungen beruhen, so kann man wohl für die erste Fläche das Zeichen $\boxed{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{6}b : c}$ als das wahre ansehen und für die andere auch irgend ein einfacheres substituiren.

Wenn die Decrescenz an der vordern Ecke O geschieht oder $(\underset{\omega}{O}\, D^{x'} D^{z'})$ zum Zeichen hat, so ist es eben so leicht, das entsprechende Weissische Zeichen zu finden (s. Fig. 73). Es sey *lmn* eine solche Fläche, so dass also $\frac{On}{OA'} = \omega'$, $\frac{Ol}{OE} = u'$, $\frac{Om}{OE} = x'$. Man ziehe wieder die Linien OG, OG' durch die Ecke O und durch die Mitte der Seitenkanten des Prima, so wird wieder ein grades rhombisches Prisma gebildet, dessen vordere obere Kanten OG, OG' sind. Bezieht man die Fläche auf dieses grade rhombische Prisma, so ist offenbar ihr Zeichen $(\underset{\omega'}{O}\, D^{x} D^{u})$, wenn man $\frac{Oq}{OG'} = x$ und $\frac{O}{OG} = u$ setzt.

Man verlängere jetzt die Linie *mn*, bis sie die ebenfalls verlängerte Kante EG' schneidet; man bezeichne den Durchschnittspunct mit L.

Es ist offenbar

$$\frac{Oq}{OG' - Oq} = \frac{On}{EG' + EL}.$$

Nun ist aber auch

$$\frac{EL}{On} = \frac{OE - Om}{Om}$$

oder

$$EL = \frac{OE \cdot On}{Om} - On.$$

Substituirt man diesen Werth von EL in die obige Gleichung und setzt $EG' = \frac{1}{2}OA'$, $\frac{Oq}{OG'} = x$, $\frac{Om}{OE} = x'$ und $\frac{On}{OA'} = \omega'$, so findet man:

$$\frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2\omega'} + \frac{1}{x'} - 1}$$

woraus

$$x = \frac{2\omega x'}{2\omega' + x'}.$$

Auf eben dieselbe Weise findet man:

$$u = \frac{2\omega' u'}{2\omega' + u'}.$$

Man setze jetzt diese Werthe von u, x in die obigen Formeln, die den Zusammenhang der Weissischen Coefficienten mit den Exponenten der Haüyschen Zeichen, die sich aufs grade rhombische Prisma beziehen, ausdrücken. Man findet so:

$$\alpha = \frac{\omega' u' x'}{\omega' x' + u' x' + \omega' u'}$$
$$\beta = \frac{u' x'}{x' - u'}$$
$$\gamma = \omega'.$$

Diese Focmeln dienen also das Haüysche Zeichen $(\underset{\omega'}{O} D^{x'} D^{u'})$, das sich auf ein schiefes rhombisches Prisma bezieht, in Weissische Zeichen zu verwandeln.

Beispiele:

$$(\underset{1}{O} D^1 D^1) = {}^1O^1 = \overline{|\tfrac{1}{3}a : \infty b : a|}$$
$$(\underset{\frac{1}{2}}{O} D^1 D^\infty) = \hat{D} = \overline{|\tfrac{1}{3}a : b : \tfrac{1}{2}c|}.$$ *)

Geschieht endlich die Decrescenz an der hintern Ecke A, so ist klar, dass eine jede solche Decrescenz als eine Decrescenz an der vordern Ecke O angesehen werden kann, in welcher ω negativ geworden ist, d. h.

$$(\underset{\omega'}{A} B^{x'} B^{u'}) = (\underset{\omega'}{O} D^{x'} D^{u'}).$$

Man braucht also nur in den eben entwickelten Formeln ω negativ zu machen, um den Zusammenhang der Grössen ω', x', u', die sich auf die hintere Ecke A einer schiefen rhombischen Prisma beziehen, mit den Weissischen Coefficienten zu haben. Man findet so:

---

*) Der Werth von β kann in gewissen Fällen negativ werden; d. h. die Fläche kann die der positiv gesetzten Halbaxe b entgegengesetzte Verlängerung derselben schneiden; aber da die Flächen dieser Art immer zu zwei vorkommen, rechts und links, so braucht man diesen Fall nicht zu unterscheiden.

$$\alpha = -\frac{\omega' u' x'}{\omega' x' - u' x' + \omega' x'}$$
$$\beta = \frac{u' x'}{u' - x'}$$
$$\gamma = \omega';$$

z. B.: $(A B^1 B^1) = \overset{1}{A} = \boxed{a : \infty b : c}$

$(\underset{\frac{1}{2}}{A} B^1 B^\infty) = \overset{2}{B} = \boxed{a : b : \tfrac{1}{2}c}$

$({}^1A^1 B^2 H^5) = (\underset{\frac{1}{2}}{A} B^1 B^2) = \boxed{\tfrac{1}{2}a : 2b : \tfrac{1}{2}c}$.

40. Das schiefe Prisma mit rectangulärer Basis entsteht durch grade Abstumpfung der Seitenkanten aus dem schiefen Prisma mit rhombischer Basis, und jede Linie von der obern vordern Kante nach der hintern untern gezogen, macht einen rechten Winkel mit der Axe, welche den Seitenkanten parallel geht. Um das Haüysche Zeichen $(E D'' C')$, das sich aufs schiefe Prisma mit rectangulärer Basis (Fig. 47) bezieht, in ein Weissisches zu verwandeln, sucht man erst das correspondirende Haüysche Zeichen, auf ein schiefes Prisma mit rhombischer Basis bezogen; und hiezu können uns offenbar die Formeln in Nr. 37

$$\alpha = \frac{ux}{x + u}$$
$$\beta = \frac{ux}{x - u}$$
$$\gamma = \omega$$

dienen, welche den Zusammenhang zwischen den Exponenten des Haüyschen auf ein grades Prisma mit rhombischer Basis bezogenen Zeichens und den Coefficienten des entsprechenden Weissischen Zeichens geben. Denn die Weissischen Axen werden offenbar in denselben Verhältnissen geschnitten, als die Kanten des graden Prisma mit rectangulärer Basis, dessen Seitenflächen die Seitenkanten des graden Rhombenprisma grade abstumpfen;

und so lange es nur gilt, von einem Haüyschen Prisma ins andere überzugehen, so bleiben die Formeln immer dieselben, das Prisma mag schief seyn oder grade. Es ist also, wenn $(\underset{\omega}{O}\, D^{x'} D^{u'})$ das Haüysche auf ein schiefes Prisma mit rhombischer Basis bezogene Zeichen derselben Fläche ist,

$$x = \frac{u'x'}{x' + u'}$$
$$u = \frac{u'x'}{x' - u'}$$
$$\omega = \omega'.$$

Um aus diesen Gleichungen u', x' zu eliminiren, kehre man die zweiten Glieder um,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{u'} + \frac{1}{x'}$$
$$\frac{1}{u} = \frac{1}{u'} - \frac{1}{x'};$$

addirt und suhtrahirt man diese beiden Gleichungen nach einander, so bekommt man endlich:

$$u' = \frac{2xu}{x + u}$$
$$x' = \frac{2xu}{u - x}$$
$$\omega' = \omega.$$

Diese Formeln dienen das Haüysche Zeichen $(\underset{\omega}{E} D^{u} C^{x})$ das sich auf ein schiefes Prisma mit rectangulärer Basis (Fig. 47) bezieht, in ein Haüysches Zeichen $(\underset{\omega'}{O} D^{x'} D^{u'})$, das sich auf ein schiefes Prisma mit rhombischer Basis (Fig. 45) bezieht, zu verwandeln.

Wird $u < x$, so wird x' negativ, und es ist nicht die Ecke O des Rhombenprisma, sondern die Ecke E, an welcher die Decrescenz geschieht; man muss also $B^{x'}$ für $D^{x'}$ setzen, indem man x' positiv nimmt; man muss dann α mit β, folglich auch x mit u verwechseln. Geschieht endlich die

Decrescenz nicht an der Ecke E, sondern an der Ecke A des schiefen Rectangulärprisma, so muss man, so lange $u > x$, $(\underset{\omega}{A}B^{x'}B^{u'})$ setzen, und wenn $u < x$, $(\underset{\omega}{E}D^{x'}B^{u'})$.

Hat man so erst das Haüysche Zeichen, das sich auf ein schiefes Rectangulärprisma bezog, in ein Haüysches Zeichen, das einem schiefen Rhombenprisma angehört, umgewandelt, so ist es, vermöge der in Nr. 39 entwickelten Formeln, leicht auch das entsprechende Weissische Zeichen zu finden.

Man findet so:

A. Decrescenzen an der vorden Ecke E des schiefen Rectangulärprisma.

$$\alpha = \frac{u\omega}{u+\omega}$$
$$\beta = x$$
$$\gamma = \omega.$$

Vermöge dieser Formeln verwandelt man $(\underset{\omega}{E}D^{x}C^{u})$.

B. Decrescenzen an der hintern Ecke A des schiefen Rectangulär-octaëders:

$$\alpha = -\frac{x\omega}{\omega - x}$$
$$\beta = u$$
$$\gamma = \omega.$$

Diese Formeln beziehen sich auf $(\underset{\omega}{A}D^{x}C^{u})$.

Beispiele: $^{1}C^{1} = (\underset{1}{E}D^{1}C^{\infty}) = \boxed{a : b : c}$

$(E^{\frac{2}{3}}C^{2}G^{3}) = (\underset{3}{E}C^{2}D^{\frac{3}{2}}) = \boxed{\frac{2}{3}a : \frac{1}{2}b : c}$

$(^{\frac{1}{4}}AG^{5}C^{2}) = (\underset{5}{A}C^{2}D^{4}) = \boxed{\frac{12}{3}a : 4b : 5c}$.

41. Beim Dihexaëder, welches Fig. 81 abgebildet ist, ist die Basis ein regulärer Sechseck (s. Fig. 81 *a*). Die drei Diagonalen dieses Sechsecks

und die horizontalen Axen des Dihexaëders werden von Weiss mit a bezeichnet, die verticale Axe bekommt wieder den Buchstaben c. Zieht man Linien aus dem Mittelpunct nach den Mitten der Basiskanten, so bilden diese wieder drei Axen, die Weiss mit s bezeichnet. Die Fläche des Dihexaëders bekommt nun das Zeichen

$$\boxed{\begin{matrix} c \\ a : a' : \infty a'' \end{matrix}}$$

indem man die Halbaxe c zur bessern Uebersicht über die Halbaxen a schreibt; oder auch

$$\boxed{\begin{matrix} c \\ s : 2s' \end{matrix}}$$

welche beide Zeichen man auch in eines vereinigen kann.

Da die Lage jeder Ebene bestimmt ist, wenn man die Lage von drei Puncten angiebt, durch welche sie geht, so ist es eigentlich hinreichend, den Coefficienten von c und von den beiden ersten a anzugeben; und man kann aus diesen leicht den Coefficienten der dritten Halbxe a und der Halbaxen s, s finden. Es sey $\frac{a}{n}$ der Coefficient der zweiten Halbaxe a, während der Coefficient der ersten a ist, so ist offenbar der der dritten $\frac{a}{n-1}$ und so fort; und wenn man alle diese Coefficienten mit ihren Halbaxen zu einem Zeichen vereinigen will, so bekommt man folgendes:

$$\boxed{\begin{matrix} \infty c \\ a a : \frac{a}{n} a' : \frac{a}{n-1} a'' \\ \frac{2a}{n+1} s : \frac{2a}{2n-1} s' : \frac{2a}{n-2} s'' \end{matrix}}$$

Dieses Zeichen, ungeachtet seiner Weitläuftigkeit, ist doch in vielen Fällen bequem, indem mehrere in demselben angesetzte Axen untereinander

rechtwinklicht sind, das zweite s mit dem ersten a, das dritte s mit dem zweiten a.

Errichtet man über der Basis des Dihexaëders ein Prisma, dessen Höhe der verticalen Halbaxe gleich ist, so erhält man dasjenige reguläre sechsseitige Prisma, auf welches Haüy seine Zeichen bezieht. Wir wollen erst dem Weissischen Zeichen eine einfachere Form geben, indem wir bloss die erste und die dritte Halbaxe a einführen, so:

$$\boxed{\begin{array}{c} \delta c \\ \alpha a : \gamma a' \end{array}}$$

Das Haüysche Zeichen derselben Fläche sey:

$$(\underset{\omega}{A}\,B^{x}B^{y}) \text{ (s. Fig. 61 und 62).}$$

Da die Kanten, auf die sich das Haüysche Zeiche bezieht, parallel und von gleicher Länge mit der Halbaxe c und mit der ersten und dritten Halbaxe a sind, so ist offenbar:

$$\omega = \delta$$
$$x = \alpha$$
$$y = \gamma.$$

Jetzt ist es leicht, auch die Coefficienten der übrigen Halbaxen zu finden, deren Werthe wir schon kennen. Vereinigt man alle diese Coefficienten in ein Zeichen, wie es oben geschehen ist, so hat man:

$$\boxed{\begin{array}{c} \omega c \\ xa : \frac{xy}{x+y}a : ya \\ \frac{2xy}{2y+x}s : \frac{2xy}{2x+y}s : \frac{2xy}{x-y}s \end{array}}$$

Beispiele:

$$^{1}A^{1} = (\underset{1}{A}B^{1}B^{1}) = \left|\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{2}a : a \\ \frac{2}{3}s : \frac{2}{3}s : \infty s \end{matrix}\right|$$

$$\overset{2}{B} = (\underset{\frac{1}{2}}{A}B^{1}B^{\infty}) = \left|\begin{matrix} \frac{1}{2}c \\ a : a : \infty a \end{matrix}\right|$$

$$^{2}A^{2} = (\underset{1}{A}B^{1}B^{\frac{1}{2}}) = \left|\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}s : \frac{2}{3}s : 2s \end{matrix}\right|$$

$$A^{5} = (\underset{1}{A}B^{1}B^{\frac{1}{5}}) = \left|\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{6}a : \frac{1}{5}a \end{matrix}\right|$$

und so fort.

NB. In diesen Zeichen sind die Axen a, a', a'', s, s', s'' nicht von einander unterschieden worden, weil es da, wo sie alle im Zeichen aufgeführt werden, nicht nöthig ist; wenn aber nur zwei von ihnen sich im Zeichen befinden, so muss man diesen Buchstaben die zugehörigen Accente hinzuzufügen nicht unterlassen.

42. Wir haben schon früherhin gesehen, dass ein Rhomboëder aus dem Dihexaëder entsteht, wenn man die abwechselnden Flächen bis zum Durchschnitt verlängert. Die Rhomboëderflächen sind also im Grunde nichts weiter, als Dihexaëderflächen, die nur in halber Anzahl vorkommen, und die dasselbe Zeichen behalten müssen. Es ist ferner klar, dass jedes Dihexaëder auf diese Art zwei untereinander gleiche Rhomboëder geben kann, je nachdem man die einen oder die andern sechs Flächen miteinander verbindet. Man nennt das zweite Rhomboëder wohl Gegenrhomboëder, um es vom ersten zu unterscheiden.

Es sey nun

$$(A\,B'B'')$$

irgend eine intermediäre Decrescenz an der Spitze des Rhomboëders. Die Fläche, de durch diese Decrescenz gebildet wird, sey der Ebene *pqr* Fig. 74 parallel; es sey nämlich $\frac{Ap}{AE} = x$, $\frac{Aq}{AE'} = y$ und $\frac{Ar}{AE''} = \omega$. Man soll dieses Haüysche Zeichen in ein Weissisches von der Form

$$\begin{vmatrix} \delta c \\ \alpha a : \beta a : \gamma a \\ \varepsilon s : \zeta s : \eta s \end{vmatrix}$$

verwandeln. Man ziehe die Diagonale Ae, so ist, wie wir schon oft bewiesen haben

$$\frac{At}{Ae} = \frac{xy}{x+y}.$$

Legt man nun eine Ebene durch die Diagonale Ae und durch die gegenüberliegende Endkante AE'' (s. Fig. 75), so liegen in dieser Ebene die verticale Axe $AC = c$, und eine von den horizontalen Axen $Cl = s$. Da nun eine Linie, von e senkrecht auf die Axe AA' gefällt, diese in ihrem dritten Theil trifft, so ist offenbar $Al = \frac{1}{3}Ae$ und $\frac{At}{Al} = \frac{4}{3} \cdot \frac{At}{Ae} = \frac{4}{3} \cdot \frac{xy}{(x+y)}$. Es ist ferner $\frac{nC}{AC} = \delta$, $\frac{mC}{lC} = \varepsilon$. Zieht man nun die Linie vl senkrecht auf mC, so ist

$$\frac{An}{lv} = \frac{At}{lt}$$

oder da $\frac{lv}{nC} = \frac{ml}{mC}$

$$\frac{An \cdot mC}{ml \cdot nC} = \frac{At}{lt}.$$

Setzt man hierin $An = AC - nC$, $lm = mC - lC$, $lt = Al - At$ und nachher $nC = AC \cdot \delta$, $mC = lC \cdot \varepsilon$ und $At = \frac{4}{3} Al \cdot \frac{xy}{x+y}$, so findet man

$$\frac{(1-\delta)\,\varepsilon}{(\varepsilon - 1)\,\delta} = \frac{\frac{4}{3} \cdot xy}{x + y - \frac{4}{3}xy}.$$

Nun ist aber auch

$$\frac{An}{2AC} = \frac{\frac{At}{Ae} \cdot \frac{Ar}{AE''}}{\frac{At}{Ae} + \frac{Ar}{AE''}}$$

oder da $An = Ac - nC$, und $nC = AC \cdot \delta$, $\frac{At}{Ae} = \frac{xy}{x+y}$, $\frac{Ar}{AE''} = \omega$

$$\frac{1-\delta}{2} = \frac{xy\omega}{xy + x\omega + y\omega}$$

also

$$\delta = \frac{xy + x\omega + y\omega - 2xy\omega}{xy + x\omega + y\omega}.$$

Diesen Werth von δ endlich in die obige Gleichung gesetzt und ε eliminirt, giebt

$$\varepsilon = \frac{2(xy + x\omega + y\omega - 2xy\omega)}{2xy - \omega x - \omega y}.$$

Legt man nun eine Ebene durch die Diagonale Ae (Fig. 74) und durch die gegenüberliegende Endkante AE, so liegt offenbar in dieser Ebene, ausser der Halbaxe c, noch die dritte Halbaxe s, deren Coefficient η ist. Wendet man hier dasselbe Verfahren an, dessen wir uns eben bedient haben, so muss man offenbar eine ganz analoge Formel bekommen; man braucht in der That nur y für x, ω für y, x für ω in den eben gefundenen Werth von ε zu setzen, um den Werth von η zu erhalten. Man findet so

$$\eta = \frac{2(xy + x\omega + y\omega - 2xy\omega)}{2y\omega - xy - x\omega}.$$

Nun ist es leicht, auch die Werthe α, β, γ, ζ zu finden. Es ist nämlich nach dem Vorhergehenden $\varepsilon = \frac{2\alpha}{n+1}$, $\eta = \frac{2\alpha}{n-2}$, also

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{n-2}{n+1} = \frac{2y\omega - xy - x\omega}{2xy - \omega x - \omega y}$$

woraus

$$n = \frac{x(y-\omega)}{y(x-\omega)}$$

und

$$\alpha = (xy + x\omega + y\omega - 2xy\omega).$$

Eben so berechnet man auch die übrigen Coefficienten, die man nachher alle durch $(xy + x\omega + y\omega - 2xy\omega)$ dividiren kann. Man bekommt so:

$$\delta = \frac{1}{xy + x\omega + y\omega}$$
$$\alpha = \frac{1}{y(x-\omega)}$$
$$\beta = \frac{1}{x(y-\omega)}$$
$$\gamma = \frac{1}{\omega(y-x)}$$
$$\varepsilon = \frac{2}{2xy - \omega x - \omega y}$$
$$\zeta = \frac{2}{xy + y\omega + 2x\omega}$$
$$\eta = \frac{2}{2y\omega - xy - x\omega}.$$

Beispiele:

$$\underset{1}{A} = (\underset{1}{A}B^1B^1) = \left|\begin{array}{c} \frac{1}{3}c \text{ oder } c \\ \infty a : \infty a : \infty a \end{array}\right|$$

$$\underset{1}{B} = (\underset{1}{A}B^1B^\infty) = \left|\begin{array}{c} \frac{1}{2}c \\ \infty a : a : a \\ 2s : s : 2s \end{array}\right| \text{ *)}$$

$$\underset{2}{B} = (\underset{2}{A}B^1B^\infty) = \left|\begin{array}{c} \frac{2}{3}c \\ 2a : a : 2a \\ \frac{4}{3}s : \frac{4}{3}s : \infty s \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} c \\ 3a : \frac{1}{2}a : 3a \\ 2s : 2s : \infty s \end{array}\right|$$

$$(\underset{1}{A}B^3B^1) = \left|\begin{array}{c} \frac{1}{7}c \\ \infty a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a \\ s : \frac{1}{2}s : s \end{array}\right|.$$

---

*) Um diesen Ausdsuck zu finden, muss man alle Werthe von δ, α, β, γ etc. mit demjenigen Exponenten des Hallyschen Zeichens multipliciren, welcher unendlich wird, also hier mit $\gamma = \infty$, weil sonst alle Werthe gleich Null werden.

Geschieht die Decrescenz nicht an der Spitze A, sondern an der Ecke an der Basis e, so braucht man offenbar nur in den obigen Formeln $-\omega$ für ω zu setzen, um die Werthe von δ, α, β, γ etc. zu haben. Man findet so:

$$\delta = \frac{1}{xy - x\omega - y\omega}$$

$$\alpha = \frac{1}{y(x+\omega)}$$

$$\beta = \frac{1}{x(y+\omega)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\omega(x-y)}$$

$$\epsilon = \frac{2}{2xy + \omega x + \omega y}$$

$$\zeta = \frac{2}{xy - y\omega + 2x\omega}$$

$$\eta = \frac{2}{x\omega - 2y\omega - xy}.$$

Beispiele:

$$\overset{2}{e} = (\underset{\frac{1}{2}}{e}D^1D^1) = \left|\begin{matrix} \infty C \\ a : a : \infty a \end{matrix}\right|$$

$$\overset{3}{e} = (\underset{3}{e}D^1D^1) = \left|\begin{matrix} C \\ \frac{1}{4}a : \frac{1}{4}a : \infty a \end{matrix}\right|$$

$$\overset{2}{D} = (\underset{\frac{1}{2}}{e}D^\infty D^1) = \left|\begin{matrix} C \\ \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : a \\ \frac{2}{5}S : \frac{1}{2}S : -2S \end{matrix}\right|$$

$$(\underset{\frac{1}{3}}{e}D^3D^1) = \left|\begin{matrix} C \\ \frac{1}{6}a : \frac{1}{8}a : \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{7}S : \frac{1}{5}S : -\frac{1}{2}S \end{matrix}\right|$$

$$\overset{3}{D} = (\underset{\frac{1}{3}}{e}D^\infty D^1) = \left|\begin{matrix} \frac{1}{4}C \\ \frac{1}{6}a : \frac{1}{8}a : \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{7}S : \frac{1}{5}S : -\frac{1}{2}S \end{matrix}\right| \quad *).$$

*) Aus der Aehnlichkeit der Zeichen von $\overset{3}{D}$ und von $(\underset{3}{e}D^3D^1)$ sieht man, dass sich $(\underset{\frac{1}{3}}{e}D^3D^1)$ eben so zu $\overset{2}{e}$ verhält, wie $\overset{3}{D}$ zum Grundrhomboëder, oder dass die Fläche $(\underset{\frac{1}{3}}{e}D^3D^1)$ als eine Decrescenz von der Form $\overset{3}{D}$ am Rhomboëder, welcher von den Flächen $\overset{2}{e}$ gebildet wird, angesehen werden kann.

Geschieht endlich die Decrescenz an der Ecke E, so wird x oder y negativ, je nachdem sie an der Ecke E oder an der Ecke $E^{\vee}$ Fig. 74 geschieht. Setzt man in den erstgefundenen Werthen von ϑ, α, β, γ etc. y negativ und multiplicirt mit -1, so bekommt man:

$$\delta = \frac{1}{y\omega + xy - x\omega}$$
$$\alpha = \frac{1}{y(x-\omega)}$$
$$\beta = \frac{1}{x(y+\omega)}$$
$$\gamma = \frac{1}{\omega(y+x)}$$
$$\varepsilon = \frac{2}{2xy + \omega x - \omega y}$$
$$\zeta = \frac{2}{xy + y\omega + 2x\omega}$$
$$\eta = \frac{2}{2y\omega - xy + x\omega}$$

Beispiele:

$${}^{1}E^{1} = ({}^{1}_{1}E B^{1} D^{1}) = \left[\begin{matrix} c \\ \infty a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a \\ s : \frac{1}{2}s : s \end{matrix}\right]$$

$$\overset{2}{D} = ({}^{2}_{3}E D^{\infty} B^{1}) = \left[\begin{matrix} c \\ \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : a \end{matrix}\right]$$

$$({}^{1}E^{1} B^{1} D^{2}) = \left[\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a \end{matrix}\right] \text{ *)}$$

$$({}^{5}_{4}E^{5}_{4} B^{1} D^{2}) = \left[\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a \end{matrix}\right] \text{ **).}$$

45. In dieser vergleichenden Uebersicht der Weissischen Theorie vermisst man zwei Haüysche Grundformen ***), nämlich das grade Prisma

*) Diese Fläche entsteht aus dem von den Flächen ${}^{1}E^{1}$ gebildeten Rhomboëder, durch eine Decrescenz von der Form $\overset{3}{D}$.

**) Diess ist die Fläche $\overset{2}{D}$ am Gegenrhomboëder.

***) Ich habe vom Rhomboidaldodecaëder und regulären Tetraëder nichts gesagt, weil diese Formen sich aufs Octaëder zurückführen lassen.

mit rhomboïdischer Basis und das unsymmetrische Prisma. Weiss fordert überall Rechtwinklichkeit der Axen, und es ist leicht einzusehen, dass bei den letztgenannten Formen solche Axen kein einfaches in die Augen springendes Verhältniss zur äussern Begrenzung haben können. Bei den graden Octaëdern mit quadratischer oder rhombischer Basis machen Linien, die man aus den Ecken nach dem Mittelpunct zieht, rechte Winkel miteinander, und können als Weissische Axen dienen; das grade Octaëder, mit rectangulärer Basis, lässt sich auf ein Rhombenoctaëder reduciren. Beim Rhomboëder sind nicht nur die horizontalen Axen *a* und *s* senkrecht auf die verticale *c*, sondern es macht auch immer eine horizontale Axe *a* mit einer horizontalen Axe *s* einen rechten Winkel; beim schiefen Rhombenprisma ist eine Linie durch die obere vordere und untere hintere Ecke gezogen, rechtwinklicht mit der Axe; das schiefe Prisma mit rectangulärer Basis verhält sich auf eine ähnliche Art. In allen diesen Formen ist es also leicht rechtwinklichte Axen zu finden. Das grade Prisma mit rhomboïdischer Basis, obgleich es, auf eine seiner Seitenflächen gestellt, viel Aehnlichkeit mit dem schiefen Prisma mit rectangulärer Basis hat, lässt nicht leicht rechtwinklichte Axen zu, denn eine Ebene, durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegt, macht keinen rechten Winkel mit zwei Seitenflächen; und eben so ist es mit dem ganz unregelmässigen Prisma.

Wenn es gleichgültig wäre, was für Linien man zu Axen nimmt, so könnte man irgend drei rechtwinklichte Linien durch den Mittelpunct legen und nun alle Krystallebenen auf diese Coordinatenaxen beziehen; aber solche Axen würden der Eigenschaft entbehren, die den krystallographischen Axen eben die Wichtigkeit giebt, die sie bei der Entwickelung

der primitiven und secundären Formen haben, und welche darin besteht, dass sie von allen Flächen in einfachen Verhältnissen geschnitten werden; alle Coefficienten der Weissischen Zeichen, wie alle Exponenten der Haüyschen, sind einfache rationale Zahlen.

Wir werden im analytischen Theile der Krystallographie sehen, dass alle Linien, welche vom Durchschnitt aller bei einem gewissen Krystall möglichen Flächen entstehen, von diesen Flächen in einfachen Verhältnissen geschnitten werden; alle diese Linien können also als Axen dienen; man wählt drei von ihnen aus, welche man durch den Mittelpunct gehen lässt *); machen sie rechte Winkel miteinander, desto besser; doch ist leicht einzusehen, dass dies nicht immer nothwendig der Fall seyn muss; da es indess der in einem Flächensystem möglichen Linien so viele giebt, so wird man immer welche finden, deren Winkel sehr wenig von rechten entfernt sind.

Man sieht, dass Weiss, indem er überall Rechtwinklichkeit der Axen annimmt, die Anzahl der möglichen Grundformen beschränkt; eine solche Hypothese erleichtert, wie man gleich sehen wird, die Berechnung der Winkel bedeutend; doch wir werden im Folgenden Mittel entdecken, auch ohne diese willkührliche Annahme ziemlich schnell zum Ziele zu gelangen.

Man bezeichne, im System der graden Rhombenoctaëder, die Neigung irgend einer Fläche gegen die Axe mit i, so ist offenbar, wenn man die

*) Wir werden noch oft darauf zurück kommen, dass es bei den Krystallen auf die absolute Lage der Flächen und Linien gar nicht ankommt, sondern nur auf die Winkel, die sie miteinander machen; man ändert deshalb nichts an den krystallographischen Eigenschaften einer Fläche oder Linie, wenn man sie durch einen andern Punct, z. B. durch den Mittelpunct gehen lässt, vorausgesetzt, dass sie sich in allen Lagen parallel bleibe.

Halbaxe = 1 setzt, eine Linie, die in der Ebene der Basis liegt, durch die Axe geht und auf die Durchschnittslinie der Fläche und der verlängerten Basis senkrecht ist, der Tangente von i gleich. Man denke sich nun mehrere solche Flächen, die alle durch denselben Endpunct der (verticalen) Axe gehen, und die die verlängerte Basis in lauter parallelen Linien schneiden, so ist klar, dass jene Linie, die durch den Mittelpunct geht und mit den Durchschnittslinien der Fläche und der verlängerten Basis rechte Winkel macht, in denselben Verhältnissen geschnitten wird, als die horizontalen Axen a, b; die Coefficienten dieser Axen in den Weissischen Zeichen der Flächen werden also zugleich das Maass der Tangenten ihrer Neigungswinkel gegen die Axe abgeben. Da nun diese Coefficienten immer einfache rationale Grössen sind, so werden sich diese Tangenten auch immer einfach und rational zu einander verhalten. Es seyen z. B. i, i', i'' etc. die Tangenten der Neigungen der Flächen $\boxed{a : b : c}$, $\boxed{2a : 2b : c}$, $\boxed{3a : 3b : c}$ etc. gegen die Axe, so ist tg. $i' =$ 2tg. i, tg. $i'' =$ 3tg. i etc.

So ist es mit allen Flächen, die mit einer von den durch je zwei Axen gehenden Ebenen parallele Durchschnittslinien bilden. z. B. $\overline{\boxed{a : b : c}}$, $\underline{\boxed{a : 2b : c}}$, $\underline{\boxed{a : 3b : c}}$ etc.; bezeichnen wir die Tangenten der Neigungen dieser Flächen gegen die Ebene, die durch a und c geht, mit $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}B'$, $\frac{1}{2}B''$, so ist tg. $\frac{1}{2}B' =$ 2tg. $\frac{1}{2}B$, tg. $\frac{1}{2}B'' =$ 3tg. $\frac{1}{2}B$ etc.

Wenn dieser Satz fürs grade Rhombenoctaëder wahr ist, so gilt er offenbar überhaupt für alle Formen mit drei rechtwinklichten Axen.

Man sieht schon jetzt ein, wie leicht es bei diesen Umständen ist, einen Winkel aus dem andern zu berechnen; wir werden weiterhin noch auf viele Beispiele der Art kommen, und uns vielfältig überzeugen, wie einfach

die Rechnung wird, wenn man es mit rechtwinklichten Axen zu thun hat. Hingegen machen schiefwinklichte Axen alles verwickelter.

Man kann diese Eigenschaft der Systeme mit rechtwinklichten Axen Tautometrie nennen, ein Wort, das dem Worte Symmetrie nachgebildet ist. Vollkommen symmetrische Krystalle sind auch immer tautometrisch, es können aber Krystalle nach gewissen Richtungen unsymmetrisch und dabei doch tautometrisch seyn.

Bei Rechtwinklichkeit der Axen hat man auch noch den Vortheil, dass man höchstens zwei Stücke zu wissen braucht, um alle übrigen am Krystall zu berechnen. Es werde z. B. verlangt, die Winkel am graden Rhombenoctaëder $\boxed{a : b : c}$ zu finden. Es ist klar, dass die Lage der Octaëderfläche vollkommen bekannt ist, wenn die Axen a, b, c bekannt sind; und da wir nicht die absolute Länge derselben, sondern nur ihre relative Lage zu wissen brauchen, um ihre Neigungen gegen die übrigen Octaëderflächen zu finden, so ist es genug, zwei von den Verhältnissen $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ oder $\frac{b}{c}$ zu wissen. Weiss man aber die Lage der Octaëderflächen, so weiss man auch die Lage aller übrigen Flächen an demselben Krystall, deren allgemeine Form $\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$ ist, vorausgesetzt, dass die Coefficienten α, β, γ bekannt seyen, oder auch nur zwei von ihren Verhältnissen $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ oder $\frac{\beta}{\gamma}$. Sind aber die Axen rechtwinklicht, so ist klar, dass uns die Winkel der Axen auch bekannt seyn müssen, und da ihrer drei sind, so giebt das, mit den obigen zwei, fünf Stücke, die wir bei der Rechnung als bekannt voraussetzen müssen. *)

*) Oder auch nur drei Stücke, wenn von den drei Winkeln, die die Axen miteinander machen, zwei rechte sind, wie beim schiefen Rhombenoctaëder

Wir haben oben schon darauf aufmerksam gemacht, dass es immer möglich seyn wird, Axen zu finden, deren Winkel wenig vom rechten abweichen; man versucht hin und her, bis die Hypothese der Beobachtung so gut als möglich entspricht. Weiss man von den Messungen, die man zum Grunde legt, dass sie nicht sehr genau sind, z. B. dass sie leicht einen Fehler von 10′ bis 15′ in sich schliessen können, wie die Haüyschen, so wird es desto leichter seyn, solche hypothetische Axen zu finden, indem die kleinen Abweichungen der Theorie vom Resultat der Beobachtungen, auf die man stösst, hier als Beobachtungsfehler erklärt werden können. Wenn aber die Kunst, Krystallwinkel zu messen, volkommner wird, wie sie es durch die Erfindung des Reflexionsgoniometers geworden ist, so wird man sich zuweilen gezwungen sehen, diese Hypothese entweder ganz aufzugeben, oder anzunehmen, dass die rechtwinklichten Axen von den meisten Flächen des Krystalls in sehr complicirten Verhältnissen geschnitten werden. Diess wird an einem Beispiel noch deutlicher werden. Die Grundform des Epidot ist nach Haüy ein grades Prisma mit rhomboïdischer Basis, Fig. 76. Wenn man dieses Prisma auf eine seiner Seitenflächen legt, so ist es zwar ein schiefes Prisma mit rectangulärer Basis; aber bei diesem Prisma ist nicht, wie bei den eigentlichen Prismen dieser Art, eine Linie aus der obern vordern zur hintern untern Ecke gezogen, senkrecht auf die Axe. Wenn man indessen hin und her versucht, so findet man am Ende, dass man die Fläche *n* (s. Fig. 77) als Säulenfläche ansehen kann, wodurch die Flächen *T*, *M* zu Zuschärfungsflächen, auf die vordere und hintere Säulenkante grade aufgesetzt, werden. Man hat durch sehr sorgfältige Messungen mit dem Reflexionsgoniometer die Neigung von *M* zu *r* = 116°

12′,5 und die Neigung von *T* zu *r* = 129° 22′ gefunden. Da nun die Flächen *r* die vordere und hintere Seitenkante der von den Flächen *n* gebildeten Säule grade abstumpfen, so sind die Complemente der gemessenen Winkel zu 180° den Neigungen der Flächen *M* und *T* gegen die Axe der Säule gleich. Die Tangenten dieser Neigungen gegen die Axe müssen nach dem Vorhergehenden, wenn rechtwinklichte Axen möglich sind, ein einfaches rationales Verhältniss zu einander haben. Nun ist aber $\frac{tg.63°-47',5}{tg.50°-3g'} = \frac{5}{3}$; dieses Verhältniss ist einfach genug, um rechtwinklichte Axen annehmbar zu machen. Bezeichnet man die Fläche *M* nach Weiss mit $\boxed{a : \infty b : c}$, so ist das Zeichen der Fläche *T* $\boxed{\frac{1}{3}a : \infty b : c}$, in der Voraussetzung, dass *a*, *b*, *c* rechte Winkel miteinander machen. Das Zeichen der Fläche *n* kann nun $\boxed{a : b : \infty c}$ und das der Fläche *r* $\boxed{a : \infty b : \infty c}$ seyn; und ein grades Rhombenoctaëder, dessen Axen *a*, *b*, *c* sind, kann als Grundform des Epidots gelten.

Durch fernere Messung kann man nun auch das Verhältniss bestimmen, in dem die übrigen Flächen *o*, *u* zu dieser Grundform stehen.

Die Neigung von *u* zu *n* ist 109° — 20′; hieraus, und aus der Neigung von *M* gegen die Axe, kann man die Neigung der Octaëderflächen an der vordern Endkante berechnen, man findet ihre Hälfte gleich 58° — 5′,5.

Die Kante oder Durchschnittslinie der hinlänglich verlängerten Flächen *o*,*o* wird ebenfalls von *M* grade abgestumpft. Man kann also die Flächen *o* ebenfalls als Flächen eines Octaëders ansehen, dessen vordere Endkante mit der vordern Endkante des Grundoctaëders zusammen fällt, dessen Basis aber von der Basis des Grundoctaëders verschieden ist; und die Tangente der halben Neigung von *o* zu *o* muss ein einfaches Verhältniss zur Tan-

gente der halben Neigung der Grundoctaëderflächen an derselben Endkante haben. Man findet wirklich, wenn man die Neigung der Grundoctaëderflächen an der vordern Endkante mit B und die Neigung der Flächen o gegeneinander mit B′ bezeichnet:

$$\frac{\text{tg. } \frac{1}{2}B}{\text{tg. } \frac{1}{2}B'} = \frac{8}{3}.$$

Das Zeichen der Fläche o ist also $\boxed{a : \frac{8}{3}b : c}$.

Eben so verfährt man mit der Fläche u. Das Zeichen der Fläche eines Octaëders, dessen vordere (oder hintere) Endkante von T und dessen Basiskante von n abgestumpft werden, ist offenbar $\boxed{a : b : \frac{4}{5}c}$. Berechnet man die Neigung der Flächen an der vordern Endkante dieses Octaëders, so findet man, dass die Tangente der Hälfte dieser Neigung $\frac{4}{5}$ von der Tangente der halben Neigung von u gegen u beträgt. Das Zeichen der Fläche u ist also:

$$\boxed{a : \tfrac{5}{4}b : \tfrac{5}{3}c} = \boxed{\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}b : \tfrac{1}{3}c}.$$

Am Epidot leidet also die Annahme von rechtwinklichten Axen keine so grosse Schwierigkeit, wie bei andern Fossilien, die sich dieser Hypothese ganz zu entziehen scheinen. Das chromsaure Blei (Rothbleierz) giebt ein Beispiel hievon. Es krystallisirt in rhombischen Prismen durch zwei Flächen schief zugeschärft, s. Fig. 78. Die Flächen t sind also nicht grade auf die Säulenflächen M aufgesetzt. Sehr sorgfältig angestellte Messungen gaben mir die Neigung von M gegen M zu 93° — 44′, die Neigung von $t : t$ zu 118° — 58′ und die Neigung von $t : M$ zu 145° — 57′. Sieht man t, t als die Flächen eines schiefen Rhombenoctaëders an, und M, M als Abstumpfungsflächen der Basiskanten dieses Octaëders, die mit der Axe parallel

laufen, so findet man aus den eben angeführten Messungen die Neigung der vordern Endkante des Octaëders gegen die Axe gleich 40° — 2′, und die Neigung der hintern Endkante gegen die Axe gleich 52° — 33′½. Die Tangenten dieser Winkel verhalten sich nicht einfach zu einander; man müsste denn $\frac{14}{9}$ als ein einfaches Verhältniss ansehen; denn dass ist ungefähr die Verhältnisszahl dieser beiden Tangenten.

Da man jedes Verhältniss annäherungsweise durch den Quotienten von zwei rationalen und ganzen Zahlen ausdrücken kann, so ist klar, dass man mit einigem Zwang alle schiefen Rhombenoctaëder auf grade reduciren kann; man sieht aber zugleich ein, wie willkührlich dieses Verfahren ist. Wenn man also nicht, wie beim Diopsit (siehe hierüber das folgende Kapitel), vordere und hintere Endkanten findet, die dieselbe Neigung gegen die Axe haben, so ist, glaube ich, die scheinbare Einfachheit des Verhältnisses der Tangenten der vordern und hintern Neigungen kein Beweggrund, ein grades Octaëder als Grundform zu erklären.

Dasselbe gilt vom unsymmetrischen Prisma. Wenn man durch die Endpuncte der drei, mit den Seitenflächen desselben parallelen, Axen Ebenen legt, so entsteht ein ganz schiefes Octaëder mit rhomboïdischer Basis oder ein ganz unsymmetrisches Octaëder. Von den drei Winkeln der Axen desselben ist kein einziger ein rechter; aber man kann hier oft eben so, wie beim schiefen Rhombenoctaëder, hypothetische Axen annehmen, die rechtwinklicht sind, und auf welche sich die Flächen des Krystalls zwar nicht in einfachen, aber doch wenigstens in rationalen Verhältnissen beziehen lassen, zumal da hier wenigstens fünf Messungen zur Bestimmung der Form nothwendig sind, und deshalb die möglichen Fehler der Beob-

achtungen dem Hin - und Herversuchen einen grösseren Spielraum gewähren.

Da im folgenden Kapitel, im Abschnitt vom unsymmetrischen Octaëder, weitläuftig Anleitung gegeben wird, wie diese Fälle zu behandeln sind, so verweise ich den Leser dorthin.

44. Ausser der Vereinfachung, die Weiss in die Lehre von den Grundformen gebracht hat, verdanken wir diesem ausgezeichneten Krystallographen noch die Theorie der Zonen, von der es nicht unschicklich seyn wird, hier im Vorbeigehen zu sprechen. Man nennt Zone eine Reihe von Flächen, deren Durchschnittslinien untereinander parallel sind. Eine gewisse Fläche liegt also in der Zone zweier anderer Flächen, wenn die Kanten aller dieser Flächen parallel untereinander sind, oder wenn irgend eine Ebene, durch die Durchschnittslinie der beiden letzten Flächen gelegt, mit der ersten Fläche parallel ist. Wenn man also von einer Fläche sagt, dass sie in der Zone gewisser anderer Flächen liegt, so bestimmt man dadurch die Linie, durch welche man sie gelegt denken kann. Liegt eine Fläche zugleich in zweien verschiedenen Zonen, so weiss man die Lage zweier Linien, durch welche man sie sich gelegt denken kann; die Lage der Fläche ist also dadurch vollkommen bestimmt. Da es nun dem Auge leicht ist, sich vom Parallismus gewisser Linien zu überzeugen, zumal wenn sie nahe aneinander liegen, so sieht man leicht ein, welch' ein schönes Mittel uns die Theorie der Zonen gewährt, die Lage gewisser Flächen zu bestimmen, ohne ihre Neigungen zu schon bekannten Flächen zu messen.

*

Haüy:	Mohs:	Weiss:
IV. Die Grundform ist ein schiefes Rhombenprisma oder ein schiefes Rectangulärprisma.	*a.* Mit hemisprismatischen Combinationen, ohne Abweichung der Axe.	IV. Zwei- und eingliedrig.
V. Die Grundform ist ein grades Prisma mit rhomboïdischer Basis.	*b.* Mit hemiprismatischen Combinationen, mit Abweichung der Axe.	
VI. Die Grundform ist ein unsymmetrisches Octaëder oder Prisma.	*c.* Mit tetartoprismatischen Combinationen.	V. Ein- und eingliedrig.
VII. Die Grundform ist ein quadratisches Prisma oder ein Quadratoctaëder.	IV. Pyramidales System.	VI. Viergliedriges System.

Im prismatischen System mit hemiprismatischen Combinationen nennt Mohs „Abweichung" den Winkel, den die Axe des schiefen Rhombenoctaëders, das hier die Grundform ist, mit einer auf die Basis senkrechten Linie macht. Bei den tetartoprismatischen Combinationen weicht die Axe nach Mohs in zwei Ebnen ab.

Eigne Bezeichnungsart der Krystallflächen, die zur Rechnung bequem ist. Verhältniss derselben zur Haüyschen und Weissischen Bezeichnungsart.

46. Werfen wir einen Blick auf das Vorhergehende zurück, so finden wir, dass die Haüysche, Weissische und Mohsische Theorie, wenige Puncte

ausgenommen, im Grunde nur in der Darstellung der Beziehungen, die zwischen den verschiedenen Krystallflächen statt finden, verschieden sind. Hieraus wird zugleich klar, dass die Bezeichnungsart der Flächen ein wesentlicher Gegenstand ihrer Bearbeitungen seyn musste; denn eine Bezeichnungsart, die mit mathematischer Bestimmtheit die Beziehung einer secundären Fläche zur Grundform giebt, giebt nothwendig zugleich den Gang an, den die Rechnung nehmen soll, wenn man die Winkel der secundären Form aus denen der Grundform berehnen will, und dieser Gang ist nach den verschiedenen Theorien wesentlich verschieden. So legt Haüy immer die Länge gewisser Linien und Richtungen, nach welchen die Decrescenzen geschehen, Weiss hingegen seine rechtwinklichten Axen der Rechnung zum Grunde; beide sind gezwungen, immer auf diese eigentlich imaginären Dinge, die man nie direct messen kann, zurück zu kommen, und gehen so einen indirecten Gang, der sie immer erst auf einem Umwege zum Ziel führt. Da wir dieses Verfahren ganz verwerfen, und in unseren Formeln immer nur wirklich messbare Dinge vereinigt finden wollen, so müssen auch unsere Zeichen mit diesen Dimensionen und Axen nichts zu thun haben, und direct zu den Formeln führen, deren Entwickelung wir den künftigen Abschnitten vorbehalten.

Es sey Fig. 79 ein Rhomboëder. Wir wollen die Rhomboëderfläche mit P bazeichnen; x bedeute die Endkante, z die Basiskante desselben. Schreibt man nun Px für die halbe Tangente der Neigung der Rhomboëderflächen an der Kante x, so kann sehr gut mPx eine Fläche bezeichnen, die ebenfalls durch die Kante x geht, und deren Neigung gegen eine durch x und die Axe gelegte Ebene eine m Mal so grosse Tangente giebt, als

die Tangente der Neigung von P gegen dieselbe Ebene. Diese Fläche gehört offenbar einem ungleichschenklichten Dihexaëder. Eben so werden durch nPz Flächen bezeichnet, die durch die Basiskante z gehen, so dass die Tangente der halben Neigung dieser Flächen an der Kante z, n Mal so gross ist, als die Tangente der halben Neigung der Flächen P an derselben Kante; sie bilden ein ungleichschenklichtes Dihexaëder von den zweiten Art.

Eine Fläche endlich, die die Kante x grade abstumpft, oder die Fläche des nächst stumpferen Rhomboëders, kann man mit ∞Px bezeichnen; was ∞Pz bedeutet, versteht sich schon von selbst, nämlich die grade Abstumpfung der Kante z, oder die Fläche der sechsseitigen Säule. Diese Flächen kann man noch einfacher mit x und z selbst bezeichnen.

Die Flächen der ungleichschenklichten Dihexaëder, die man vom nächst stumpferen Rhomboëder ableitet, kann man $m(\infty Px)x$ und $n(\infty Px)z$ schreiben, oder einfacher mP_1x und nP_1z, wo P_1 die Fläche des nächst stumpferen Rhomboëders bedeutet; wir werden überhaupt alle Stücke, die den nächst stumpferen und nächst schärferen Rhomboëdern gehören, durch die Exponenten 1, 2, 3, 4 etc. und -1, -2, -3, -4 etc. von einander unterscheiden; z. B. mit P_3 die Fläche des dritten stumpfern, mit P_{-3} die Fläche des dritten schärferen Rhomboëders bezeichnen.

Diese Bezeichnungsart giebt nicht nur gleich den einfachsten Zusammenhang der Flächen untereinander, den man immer suchen muss, wenn man einfach rechnen will; sondern sie kann auch leicht gefunden werden durch eine einfache annähernde Messung des Neigungswinkels der neuen Flächen an der Kante, auf die man das Zeichen beziehen will und an der

sie sich finden; das Verhältniss der Tangenten der halben Neigung der neuen Flächen zur Tangente der halben Neigung der Grundflächen an derselben Kante giebt unmittelbar m oder n. So findet man z. B. die Neigung der Flächen beim Kalkspath, die Haüy mit r bezeichnet hat und die seine Varité metastatique bilden, an der Basiskante nahe gleich 133°; die Tangente von 66°½ ist aber 3 Mal so gross als die Tangente von 37° —27′,5, welches die halbe Neigung der Grundrhomboëderflächen an der Basiskante ist: die Fläche hat also $3Pz$ zum Zeichen.

Es kann Fälle geben, wo man die einfachste Ableitung einer Fläche aus der Grundform nicht gleich weiss; man kann alsdann diejenige Form dem Zeichen zum Grunde legen, die sich unmittelbar aus der Ansicht des Krystalls ergiebt, ohne dass man einen Fehler in der Rechnung, die sich auf dieses Zeichen stützt, zu fürchten braucht. Man findet häufig an der oben genannten Varietät des Kalkspaths eine Fläche, die die kürzere Endkante des ungleichschenklichten, von den Flächen $3Pz$ gebildeten, Dihexaëders grade abstumpft; diese Fläche hat offenbar $\infty(3Pz)x$ zum Zeichen *); man findet nachher leicht, dass diese Fläche mit der Fläche P_{-1} oder mit der Fläche des nächst schärferen Rhomboëders identisch ist.

Wenn die Aenderung der Neigung nicht die Neigung zweier benachbarten Flächen, sondern die Neigung der Fläche gegen die Axe betrifft, so schreibt man den Exponenten, der das Verhältniss der Tangenten der Axenneigungen ausdrückt, über dem Zeichen der Grundrhomboëderfläche. So bedeutet P^2 eine Fläche, die eben so wie P liegt (d. h. welche P in

*) Wenn zweierlei Endkanten vorkommen, bezeichnet man die eine kürzere mit x, die andere längere mit y

einer mit der Axe rechtwinklichten Linie durchschneidet), deren Neigung gegen die Axe aber so gross ist, dass ihre Tangente das Doppelte der Tangente der Neigung von P gegen die Axe beträgt. Diejenigen Flächen, die wie die grade Abstumpfungsfläche der Endkante x oder wie P_1 liegen, kann man etweder mit P_1^m oder auch mit x^m bezeichnen; im letztern Fall bedeutet x^1 oder schlechtweg x die grade Abstumpfungsfläche der Kante x selbst. Alle diese Flächen bilden Rhomboëder, von denen die meisten sich in der Reihe der schärfern und stumpfern Rhomboëder befinden, die man also auch mit P_2, P_4, P_6 etc., oder mit P_1, P_3, P_5 etc., oder endlich mit P_{-2}, P_{-4}, P_{-6} und mit P_{-1}, P_{-3}, P_{-5} etc. bezeichnen kann. So ist zum Beispiel P^4 mit P_2, $P^{\frac{1}{4}}$ mit P_{-2}; x^4 mit P_3 und $x^{\frac{1}{4}}$ mit P_{-3} identisch.

Es versteht sich von selbst, dass man alle diese verschiedenen Rhomboëder ebenfalls als Grundrhomboëder einführen, und andere Flächen von ihnen einfacher ableiten kann, als von dem wahren Grundrhomboëder. Um keine Verwirrung in die Exponenten zu bringen, stellt man die Grundformfläche in Parenthese, wie wir schon oben gethan haben; z. B. $3(x^{\frac{1}{2}})z$, welches die Fläche eines ungleichschenklichten Dihexaëders bedeutet, das sich eben so zum nächst schärferen Rhomboëder verhält, wie die Fläche $3Pz$ zum Grundrhomboëder.

Alle Flächen, die rechtwinklicht mit der Axe sind, bekommen den Exponenten ∞; alle Flächen, die ihr parallel sind, den Exponenten 0; z. B. P^∞, P^0, x^0.

Eben so verfährt man beim System der Quadratoctaëder und Dihexaëder; auch hier bezeichnet man die Endkante mit x, die Basiskante mit z, wie es in den Figuren 80 und 81 angegeben ist. Die Fläche

des Quadratoctaëders kann man immer mit Q, die des Dihexaëders immer mit D bezeichnen; alsdann kann man schon am Zeichen erkennen, zu welchem System die Fläche gehört. Beim Rhombenoctaëder Fig. 82, welcher zweierlei Endkanten hat, bezeichnet man die vordere (kürzere) mit x, die längere mit y; die Kante an der Basis hat ebenfalls z; die Fläche bezeichnet man mit R.

Die Flächen des nächst stumpferen Octaëders, welches durch grade Abstumpfung der Endkanten des Rhombenoctaëders entsteht und ein Rectangulär-octaëder ist, werden S und T geschrieben (s. Fig. 83); da alle Endkanten dieses Octaëders einerlei Werth haben, so bekommen sie alle ein x; die Basiskanten aber muss man verschieden bezeichnen, etwa mit v die längere und mit w die kürzere.

Leitet man aus dem Rhombenoctaëder andere Octaëder ab, deren Basen zwar auch Rhomben, aber der Basis des Grundoctaëders nicht ähnlich sind, so dass das Verhältniss der Diagonalen der Basen verändert ist, so bleibt doch derjenigen Endkante, die wie das x des Grundrhomboëders liegt, das Zeichen x, und die andere bekommt das Zeichen y, wenn auch die erstere länger seyn sollte, als die zweite. So bedeutet z. B. $2(3R\!y)x$ immer eine Fläche, die die vordere Endkante des Octaëders $3R\!y$ zuschärft, obgleich diese Kante in den meisten Fällen länger ist, als die andere Endkante.

Die Säulenflächen, welche durch grade Abstumpfung der Kanten an der Basis des Rhombenoctaëders entstehen, kann man R° schreiben. Die anderen Säulenflächen kann man auf ihre Grundoctaëder zurückführen und mit $(mR\!y)^{\circ}$ bezeichnen; oder auch schlechtweg $mR^{\circ}y$ und $mR^{\circ}x$ schreiben; diese bedeuten nämlich, dass die so bezeichnete Säulenfläche so gegen die

unter der Endkante y gelegene horizontale Axe b oder gegen die unter der Endkante x gelegene horizontale Axe a geneigt ist, dass die Tangenten dieser Neigungen sich zu den Tangenten der gleichnamigen Neigungen der Säulenflächen des Grundoctaëders verhalten, wie m.

Bei den schiefen Octaëdern mit rhombischer Basis muss man sorgfältig diejenigen unterscheiden, die man auf ein grades reduciren kann, und diejenigen, bei denen diess unmöglich oder problematisch ist. Bei den ersteren beziehet man alle Flächen auf ein grades Octaëder und bezeichnet die vordern Endflächen dieses Octaëders mit R, die hintern mit S; die vordere Endkante bekommt x, die hintere x', wo eine Unterscheidung nöthig ist; die andern Endkanten und die Kanten an der Basis behalten ihr y und z. So bedeutet mRx eine vordere, mSx eine hintere Zuschärfungsfläche; x^n ist eine vordere schiefangesetzte Endfläche, x'^n eine solche hintere; x° ist die grade Abstumpfung der vordern Kante, welche vom Durchschnitt der Säulenflächen R° entsteht; y° die grade Abstumpfung der Seitenkante der Säule.

Ist das Grundoctaëder ein schiefes, und es ist unmöglich oder problematisch, dasselbe auf ein grades Rhombenoctaëder zurück zu führen, so fügt man den Buchstaben der Flächen ein s hinzu, so: R_s, S_s, x_s, x'_s, y_s. Alsdann bedeutet x_s^∞ oder y_s^∞ eine schiefangesetzte Endfläche, die mit der Basis des Octaëders parallel ist. $mR_s x$, $mS_s x'$ sind vordere und hintere schieflaufende Zuschärfungen, deren Durchschnittslinien mit der vordern oder hintern Endkante (x oder x') zusammen fallen; hat diese Durchschnittslinie eine grössere oder geringere Neigung gegen die Axe, als x oder x', so schreibt man $mR_s^n x$ oder $mR_s x^n$; in dieser zweiten Bezeichnungsart ist die

Bedeutung von R_s allgemeiner genommen, als gehörte sie überhaupt allen schiefen Octaëderflächen mit derselben Basis, so dass die Art dieser Flächen erst durch den Exponenten von x näher bestimmt wird. Es ist von selbst klar, dass nur die Tangenten der halben Neigungswinkel der Octaëderflächen an den Endkanten x sich einfach gegen einander verhalten, nicht aber die Tangenten der Neigungswinkel dieser Endkanten selbst gegen die Axe; die Berechnung dieser Neigungen ist also nicht so einfach, wie die der ersteren; ich verweise hierüber auf die folgenden Abschnitte, in welchen von der krystallographischen Rechnung die Rede ist.

Beim schiefen Octaëder, mit rhomboïdischer Basis, müssen alle vier Flächen verschiedene Zeichen haben. Man kann sie mit T, U, V, W bezeichnen. Man unterscheidet wieder diejenigen, die auf ein grades Octaëder mit rhombischer Basis zurückgeführt werden können, und solche, bei denen dieses unmöglich oder problematisch ist. Die ersteren behalten die obigen Zeichen, bei den letztern hängt man ihnen wieder ein s an, so: T_s, U_s, V_s, W_s.

Da hier keine einzige Dimension rechtwinklicht ist, so verhalten sich die Tangenten der Neigungswinkel auch nirgends einfach zu einander, und die Rechnung nimmt einen andern Gang, als bei den Systemen mit rechtwinklichten Axen. mT_sx bedeutet eine Fläche, die durch die vordere Endkante x geht, und die verlängerte horizontale Axe b (die durch die Kante y geht) so schneidet, dass das zwischen dem Durchschnittspunct und Mittelpunct des Octaëders enthaltene Stück m Mal so gross ist, als die halbe Axe b selbst; x_s bezeichnet eine vordere, x'_s eine hintere schiefangesetzte Endfläche, die der Axe b des Octaëders parallel ist; T^o, U^o, V^o, W^o sind

Säulenflächen, die die Kanten an der Basis des Octaëders abstumpfen und der Axe parallel sind; T° ist V°, U° ist VV° parallel; x°, y° sind die Abstumpfungsflächen der Seitenkanten dieser Säule, die den horizontalen Axen parallel gehen; $nT^{\circ}x$ endlich eine andere Säulenfläche, die durch die vordere Kante der ersten Säule geht und die horizontale Axe b so schneidet, dass das zwischen dem Durchschnittspunct und dem Mittelpunct des Octaëders enthaltene Stück n Mal so gross ist, als die halbe Axe b.

47. Es bleibt uns noch übrig zu zeigen, wie man leicht, wenn man nicht selbst Gelegenheit hat zu messen, die bereits von Haüy oder von Weiss gefundenen Zeichen der Flächen in unsre Zeichen verwandeln kann.

Bei allen Systemen mit rechtwinklichten Axen fallen unsre Zeichen mit den Weissischen zusammen, und sind so leicht, fast ohne Veränderung der Zahlwerthe, aus denselben abzuleiten, dass es nur eines Beispiels bedarf, um die Sache klar zu machen. Beim graden Octaëder mit rhombischer Basis ist nach Weiss' Bezeichnungsart $\boxed{a : b : c}$ die Fläche des Grundoctaëders, bei uns R; erscheint nun an der vordern Endkante eine Zuschärfung, so ist diese Zuschärfungsfläche nach Weiss $\boxed{a : mb : c}$, nach uns mRx. Andere Octaëderflächen, die mit dem Grundoctaëder eine gemeinschaftliche Basis haben, aber stumpfer oder schärfer sind, bezeichnet Weiss mit $\boxed{ma : mb : c}$, wir aber mit $R^{\frac{1}{m}}$ oder mRz.

Alle Säulenflächen sind nach Weiss im Zeichen $\boxed{ma : nb : \infty c}$ enthalten, nach uns im Zeichen $\frac{n}{m}R^{\circ}x$ oder $\frac{m}{n}R^{\circ}y$. Im Allgemeinen wird irgend eine Octaëderfläche $\boxed{ma : nb : oc}$ nach uns durch $\frac{n}{m}R^{\frac{m}{\infty}}x$ ausgedrückt. Eine gradangesetzte Endfläche heisst bei Weiss $\boxed{\infty a : \infty b : c}$, bei uns R^{∞}.

Die Weissischen Zeichen, die sich aufs Dihexaëder beziehen, sind in den meisten Fällen eben so leicht umzugestalten. Da die zweite Halbaxe s einen rechten Winkel mit der ersten Halbaxe a macht, so misst die letztere die Tangenten der halben Neigungen an der Endkante des Dihexaëders. Das Zeichen der Dihexaëderflächen selbst, wenn man bloss auf die zwei erwähnten Axen Rücksicht nimmt, ist, nach dem Vorhergehenden, nach Weiss:

$$\left|\begin{matrix} \delta c \\ a : 2s \end{matrix}\right|$$

und nach unserer Bezeichnung:

$$D^{\frac{1}{2}}.$$

Man findet offenbar den Coefficienten unseres Zeichens, indem man den Coefficienten der zweiten Halbaxe s durch 2 dividirt. Es sey also im Allgemeinen

$$\left|\begin{matrix} \delta c \\ \alpha a : \zeta s \end{matrix}\right|$$

das Weissische Zeichen irgend einer Fläche, die die Endkante irgend eines Dihexaëders zuschärft, so ist unser Zeichen dieser Fläche offenbar:

$$\tfrac{\zeta}{2\alpha} D^{\frac{a}{\delta}} x.$$

Ist das Weissische Zeichen in folgender Form

$$\left|\begin{matrix} \delta c \\ \alpha a : \beta a : \gamma a \end{matrix}\right|,$$

so wissen wir aus dem Vorgehenden, dass

$$\tfrac{\zeta}{2\alpha} = \tfrac{\beta}{2\alpha - \beta}$$

unser Zeichen für diese Fläche ist, also:

$$\tfrac{\beta}{2\alpha - \beta} \cdot D^{\frac{a}{\delta}} x.$$

Wenn $\frac{\xi}{2\alpha} < 1$, so erscheint die Fläche nicht mehr als Zuschärfung der Endkante, sondern als schiefe Abstumpfung der Ecke an der Basis. Die Fläche x, z. B. am Beryll (s. Fig. 106), hat nach Weiss

$$\left|\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a \end{matrix}\right|$$

zum Zeichen, und kann nach unsrer Bezeichnungsart so geschrieben werden:

$$\tfrac{1}{3}Dx.$$

Die Fläche s endlich, an demselben Krystall, hat folgende Zeichen:

$$\left|\begin{matrix} c \\ a : \frac{1}{2}a : a \end{matrix}\right| = x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}Dx.$$

Beim Rhomboëder verfährt man eben so. Die Zeichen für die verschiedenen stumpferen und schärfern Rhomboëder sind zu leicht aus ihren Weissischen Zeichen abzuleiten, als dass sie uns hier besonders beschäftigen sollten. Es bleiben mir also nur noch die Zuschärfungen der End- und Basiskanten übrig, und auch von diesen eigentlich nur die ersten, denn jede Zuschärfung einer Basiskante irgend eines Rhomboëders kann auch als Zuschärfung der Endkante an einem andern, vom erstern ableitbaren Rhomboëder angesehen werden, wie wir weiterhin ausführlich beweisen werden.

Da die erste Halbaxe a mit der zweiten Halbaxe s einen rechten Winkel macht, so misst die erste Halbaxe a die Tangenten der halben Neigungswinkel aller Flächen, die die Rhomboëderkante, die durch die Verlängerung der zweiten Halbaxe s geht, zuschärfen. Die Grundrhomboëder, auf die man die Zuschärfungen beziehen will, können aber zweierlei Art seyn, von der Form

$$\left|\begin{matrix} \partial c \\ a : a : \infty a \end{matrix}\right|$$

oder von der Form

$$\left|\begin{matrix}\delta c\\ \infty a : a : a\end{matrix}\right|;$$

das eine ist das Gegenrhomboëder von dem andern. In den Rhomboëdern erster Art misst das erste a, in den Rhomboëdern zweiter Art das zweite a die Tangenten der halben Zuschärfungswinkel an den Endkanten. Es sey nun eine Zuschärfungsfläche der Endkante irgend eines Rhomboëders gegeben, deren Zeichen:

$$\left|\begin{matrix}\delta c\\ \alpha a : \beta a : \gamma a\\ \varepsilon s : \zeta s : \eta s\end{matrix}\right|.$$

Ist $\gamma > \alpha$, so ist das Grundrhomboëder offenbar von der Form:

$$\left|\begin{matrix}\delta' c\\ a : a : \infty a\\ s : 2s : -2s\end{matrix}\right|.$$

Man sieht also, dass der Coefficient der zweiten Halbaxe s durch 2 dividirt werden muss, um den Coefficienten der ersten Halbaxe, fürs Grundrhomboëder, zu finden. Dieser Coefficient ist also, fürs Grundrhomboëder an dem die obige Zuschärfung erscheint, $\frac{\zeta}{2}$; und da der Coefficient derselben ersten Halbaxe a in dem Zeichen für die Zuschärfungsfläche α ist, so ist die Tangente der halben Neigung der Zuschärfungsflächen offenbar $\frac{2\alpha}{\zeta}$ Mal so gross als die Tangente der halben Neigung der Flächen des Grundrhomboëders an der Endkante. Das Zeichen der obigen Zuschärfungsfläche ist also:

$$\frac{2\alpha}{\zeta}P^{\frac{\zeta}{2\delta}}x, \text{ worin } \frac{2\alpha}{\zeta} = \frac{2\alpha-\beta}{\beta}$$
$$\text{und } \zeta = \frac{2\alpha\beta}{2\alpha-\beta}.$$

Ist dagegen $\alpha > \gamma$, so ist das Grundrhomboëder offenbar von der Form

$$\left|\begin{array}{c} \overset{\delta}{c} \\ \infty a : a : a \\ 2s : s : 2s \end{array}\right|$$

und man findet durch ähnliche Schlüsse das Zeichen der obigen Zuschärfungsfläche

$$\frac{2\gamma}{\iota} \overset{\iota}{P'^{2\delta}} x,$$

in welchem P' die Fläche des Gegenrhomboëders bedeutet; oder da $P' = (\infty P)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{2\gamma}{\iota} ({}_{\infty}P)^{\overset{\iota}{4\delta}} x = \frac{2\gamma}{\iota} (x^{\overset{\iota}{4\delta}}) x, \text{ worin } \frac{2\gamma}{\iota} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\text{und } \varepsilon = \frac{2\cdot(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}.$$

So findet man

$$\left|\begin{array}{c} \overset{\frac{1}{3}c}{} \\ 2a : a : 2a \end{array}\right| = 3Px$$

$$\left|\begin{array}{c} \overset{c}{} \\ \frac{1}{4}a : \frac{1}{3}a : a \end{array}\right| = 2P^{\mathrm{I}}x \text{ *).}$$

Was endlich die schiefen Octaëder mit rhombischer und rhomboïdischer Basis betrifft, so werden sie, wenn sie sich auf grade Octaëder reduciren lassen, wie solche behandelt; ist diess aber nicht möglich, so kann man eigentlich, wie aus der im Vorhergehenden gegebenen Darstellung des Weissischen Systems klar ist, keine Weissische Zeichen für sie entwerfen, da Weiss bei allen Octaëdern rechtwinklichte Dimensionen zum Grunde legt. Hebt man indess diese Restriction auf, wie es wohl mit der Zeit wird geschehen müssen, so fallen die Weissischen Zeichen wieder fast

*) Wir werden nachher sehen, dass $mP''x = \frac{m+1}{3-m} \overset{2mn}{P^{3-m}} z$, also $2P^{\mathrm{I}}x = 3Pz$.

mit den unsrigen zusammen, und es ist zu leicht die einen aus den andern abzuleiten, als dass wir nöthig hätten, uns besonders damit zu beschäftigen.

Wir haben also nur noch eine Vergleichung unserer Bezeichnungart mit der Haüyschen vorzunehmen. Diese wird nun durch unsere Vorarbeiten sehr erleichtert. Wir kennen schon, aus dem Vorhergehenden, den Zusammenhang zwischen den Haüyschen und Weissischen Zeichen; wir können mittelbar durch diese von den unsern zu den Haüyschen übergehen.

Es sey also ganz allgemein, um mit dem Rhombenoctaëder anzufangen,

$$(A^{\lambda}B^{\varepsilon}B''^{\varepsilon'})$$

das Haüysehe Zeichen irgend einer Fläche, welches wir schon in ein Weissisches

$$\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$$

zu verwandeln gelernt haben, vermöge der Formeln

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{x\varepsilon + \omega\varepsilon - \omega x} = \frac{1}{x + \omega - \frac{\omega x}{\varepsilon}}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{x\varepsilon - \omega\varepsilon + \omega x} = \frac{1}{x - \omega + \frac{\omega x}{\varepsilon}}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{x\varepsilon + \omega\varepsilon + \omega x} = \frac{1}{x + \omega + \frac{\omega x}{\varepsilon}}.$$

Da nun unsere Zeichen verschieden ausfallen, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\beta = \gamma$ oder $\alpha = \gamma$ etc. oder keines von diesen dreien, so müssen wir diese Fälle besonders betrachten.

Ist $\alpha = \beta$, so ist die Fläche von der Ordnung

$$R^{m}.$$

Alsdann ist auch im Haüyschen Zeichen $x = \varepsilon = 1$, und Haüy schreibt einfacher so:

$$\overset{1}{\underset{h+1}{A}} \text{ oder } \overset{1}{\underset{h}{A}},$$

indem er die Fläche direct aufs Octaëder, und nicht aufs zugehörige Parallelepiped, bezieht.

Setzt man aber in die obigen Gleichungen $x = z = 1$, und $\omega = \frac{1}{h-1}$, so findet man:

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 1$$
$$\gamma = \frac{h-1}{h+1}.$$

Wir haben aber nach dem Vorhergehenden $m = \frac{1}{\gamma}$, also:

$$m = \frac{h+1}{h-1} \text{ und } \overset{1}{\underset{h}{A}} = R^{\frac{h+1}{h-1}}.$$

Diess gilt eben sowohl vom Quadratoctaëder und regulären Octaëder; ja überhaupt von allen Octaëdern auf die sich die Weissischen Zeichen beziehen lassen; man muss nur immer dabei bezeichnen, auf welches Octaëder man das Zeichen beziehen soll, ob auf ein grades (O^m, R^m, Q^m) oder ein schiefes (R^m_s).

Bleibt immer $\alpha = \gamma$, so sind die bezeichneten Flächen Zuschärfungsflächen der vordern Endkante, von der Form mRx; Haüy schreibt diese Flächen ${}^hB''$; auf die allgemeine Art müssten sie aber so geschrieben werden:

$$({}^{\frac{1}{h}}AB^1B''^{\infty}).$$

Man muss also in den obigen Gleichungen $\omega = \frac{1}{h}$, $x = 1$, $z = \infty$ setzen, wenn man die Werthe von α, β, γ wissen will. Man findet, nachdem man alle drei Werthe von α, β, γ durch $\frac{h}{1+h}$ dividirt, um $\alpha = \gamma = 1$ zu machen:

$$\alpha = 1$$
$$\beta = \frac{h+1}{h-1}$$
$$\gamma = 1;$$

folglich, da hier $m = \beta$

$$^{h}B^{h} = \frac{h+1}{h-1} Rx.$$

Dasselbe gilt offenbar auch von den Decrescenzen an der Endkante y.

Sind endlich α, β, γ alle drei von einander verschieden und leidet das Haüysche Zeichen $(\overset{\omega}{A}B^{x}B'^{z})$ gar keine Vereinfachung, so ist es eine Fläche von der Form $mR^{n}x$, worin $m = \frac{\beta}{\alpha}$ und $n = \frac{\alpha}{\gamma}$, oder von der Form $m'R^{n'}y$, worin $m' = \frac{\alpha}{\beta}$ und $n' = \frac{\beta}{\gamma}$. Setzt man für α, β, γ ihre Werthe, so hat man:

$$m = \frac{xz + \omega z - \omega x}{xz - \omega z + \omega x}$$
$$m' = \frac{xz - \omega z + \omega x}{xz + \omega z - \omega x}$$
$$n = \frac{xz + \omega z + \omega x}{xz + \omega z - \omega x}; \quad n' = \frac{xz + \omega z + \omega x}{xz - \omega z + \omega x}.$$

Man muss hier nicht vergessen, dass wenn sich die Decrescenz nicht auf die Ecke A, d. h. auf die Endspitze, sondern auf eine andere Ecke bezieht, man sowohl die Weissischen als auch unsere Zeichen so erklären muss, als ob die Hauptaxe durch diese Ecke gehe; es ist nachher leicht, das Zeichen so umzuändern, dass man es auf eine andere Hauptaxe beziehen könne.

Da Haüy unter seinen Grundformen auch Rectangulär-octaëder hat, auf die sich die Weissischen Zeichen nicht beziehen lassen, so erfordern diese eine andre Behandlung. Man verwandelt, wie wir schon im Vorhergehenden (s. Nr. 35) gethan haben, das Haüysche Zeichen erst in ein solches,

das sich auf das dem Rectangulär-octaëder eingeschriebene Rhombenoctaëder bezieht; dieses letztere wird dann, nach den ebenfalls oben entwickelten Formeln, in ein Weissisches verwandelt, aus dem man endlich unser Zeichen unmittelbar ableitet. In Nr. 35 haben wir so gefunden, dass wenn man das Haüysche Zeichen $(\underset{\sim}{A}B^{x}B'^{z})$, das sich auf ein Rectangulär-octaëder bezieht, in ein Weissisches $\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$ verwandeln will, man

$$\alpha' = \frac{z}{\omega(z-x)}$$
$$\beta' = \frac{1}{x}$$
$$\gamma' = \frac{z}{\omega z + \omega x + xz}$$

setzen muss. Nun ist wieder $m = \frac{\beta'}{\alpha'}$, $m' = \frac{\alpha'}{\beta'}$, $n = \frac{\alpha'}{\gamma'}$, $n' = \frac{\beta'}{\gamma'}$, wenn man die Fläche im allgemeinen mit $mR^{n}x$ oder $m'R^{n'}y$ bezeichnen und auf ein Rhombenoctaëder beziehen will. Ist die neue Fläche ebenfalls die Fläche eines Rectangulär-octaëders, so ist $x = z = 1$, und Haüy bezeichnet eine solche Fläche $\underset{h}{A}$, wo $h = \frac{1}{\omega} + 1$. Alsdann ist

$$m = 0$$
$$m' = \infty$$
$$n = \infty$$
$$n' = \frac{h+1}{h-1}$$

also

$$\underset{h}{A} = \infty R^{\frac{h+1}{h-1}}y.$$

Es versteht sich von selbst, dass wenn die Decrescenz auf dem andern ebenen Winkel an der Spitze geschieht, die der Endkante x des eingeschriebenen Rhombenoctaëders entspricht, man y in x verwandeln muss.

Man kann das Zeichen $\infty R^{\frac{h+1}{h-1}}y$ auch $y^{\frac{h+1}{h-1}}$ schreiben.

Hier ist A immer diejenige Ecke des Rectangulär-octaëders, durch welche die Axe des eingeschriebenen Rhombenoctaëders geht. Will man eine andere Axe des Rhombenoctaëders als Hauptaxe einführen, so ist es leicht das Zeichen darnach umzuändern. Im Arragonit z. B. stellt Haüy die Basis des Grundoctaëders (welches ein Rectangulär-octaëder ist) vertical, und bezeichnet eine Zuschärfungsfläche (*o* in seinen Tafeln) mit $\overset{3}{E}$, wo E die Spitze des Rectangulär-octaëders, die aber zur Seite gekehrt ist, bedeutet. Setzt man in die obigen Gleichungen $h = 3$, so bekommt man unser Zeichen für diese Fläche, auf ein Rhombenoctaëder bezogen, dessen Hauptaxe durch die Ecke E geht, nämlich

$$y^2.$$

Will man nun die andere verticale Axe des Rhombenoctaëders zur Hauptaxe machen, so braucht man offenbar nur den Exponenten umzukehren, und

$$y^{\frac{1}{2}}$$

zu schreiben. Auf die dritte Axe bezogen wird diese Fläche zur Seitenfläche und bekommt $2R^{\circ}x$ zum Zeichen.

Es wäre unnütz, hier eine ausführliche Anleitung zu geben, wie man die Haüyschen Zeichen, die sich auf Prismen beziehen, umwandeln soll. Da wir oben gelernt haben, die Weissischen Zeichen für die Flächen dieser Abstammung zu finden, so kann man erst diese suchen und dann zu den unsrigen übergehen. Dasselbe gilt von den Haüyschen Zeichen, die sich aufs Rhomboëder beziehen. In der folgenden Zusammenstellung der bisher entwickelten Formeln wird man alle Fälle aufgezeichnet finden.

48. Vergleichende Zusammenstellung der Zeichen der Krystallflächen nach Haüy, nach Weiss und nach uns.

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Quadrat-octaëder (Fig. 84).	P	$a : b : c$	Q
	$A^{\frac{h}{1}}$	$a : a : \frac{h-1}{h+1}c$	$Q^{\frac{h+1}{h-1}}$
	E^h	$\frac{h-1}{h+1}a : a : c$	$\frac{h-1}{h+1}Qx$
	B^h	$\frac{h+1}{h-1}a : a : c$	$\frac{h+1}{h-1}Qx$
	D^h	$a : a : \frac{h+1}{h-1}c$	$Q^{\frac{h-1}{h+1}}$
	$(A^{\frac{h}{1}}B^{\infty}B^{-})=(A^{\frac{1}{h}}B^{\infty}B^{-})$	$\alpha a : \beta a : \gamma a$	$mQ^n x$
		worin:	worin:
		$\alpha = \frac{1}{x+\omega-\frac{\omega x}{z}}$	$m = \frac{\beta}{\alpha}$
		$\beta = \frac{1}{x-\omega+\frac{\omega x}{z}}$	$n = \frac{\alpha}{\gamma}$
		$\gamma = \frac{1}{x+\omega+\frac{\omega x}{z}}$	
	$(E^{\frac{1}{h}}B^{\infty}D^{-})$	$\alpha a : \gamma a : \beta c$	$\frac{1}{n}Q^{\frac{1}{m}}x$
Grades Rhomben-octaëder (Fig. 85).	P	$a : b : c$	R
	$A^{\frac{h}{1}}$	$a : b : \frac{h-1}{h+1}c$	$R^{\frac{h+1}{h-1}}$
	E^h	$a : \frac{h-1}{h+1}b : c$	$\frac{h-1}{h+1}Rx$
	I^h	$\frac{h-1}{h+1}a : b : c$	$\frac{h-1}{h+1}Ry$
	B^h	$\frac{h+1}{h-1}a : b : c$	$\frac{h+1}{h-1}Ry$

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Grades Rhomben-octaëder (Fig. 85).	C^h	$a : \frac{h+1}{h-1} b : c$	$\frac{h+1}{h-1} Rx$
	D^h	$a : b : \frac{h+1}{h-1} c$	$R^{\frac{h-1}{h+1}}$
	$(A^1 B^m C^n)$	$\alpha a : \beta b : \gamma c$	$mR^n x$ oder $\frac{1}{m} R^{mn} y$
	$(E^1 B^z D^m)$	$\beta a : \gamma b : \alpha c$	$\frac{1}{mn} R^m x$
	oder	oder	oder
	$(l^1 C^z D^m)$	$\gamma a : \beta b : \alpha c$	$mnR^{\frac{1}{n}} y$
		Hierin haben α, β, γ, angegebenen Werthe.	m, n die schon oben
Rectangulär-octaëder (Fig. 86).	I	$a : \infty b : c$	x
	und	und	und
	N	$\infty a : b : c$	y
	$\frac{A}{h}$ (Fig. 86)	$a : \infty b : \frac{h-1}{h+1} c$	$x^{\frac{h+1}{h-1}}$
	${}_h A$ (Fig. 86)	$\infty a : b : \frac{h-1}{h+1} c$	$y^{\frac{h+1}{h-1}}$
	$\frac{e}{h}$ (Fig. 89)	$a : \infty b : \frac{h}{2+h} c$	$x^{\frac{h+2}{h}}$
	$\frac{A}{h}$ (Fig. 87)	$\infty a : b : \frac{h}{h+1} c$	$y^{\frac{h+2}{h}}$
	${}^h B$ (Fig. 86)	$ha : b : \frac{h}{h+1} c$	$hR^{\frac{h+1}{h}} y$
	B^h (Fig. 86)	$a : hb : \frac{h}{h+1} c$	$hR^{\frac{h+1}{h}} x$
	$\frac{h}{C}$ (Fig. 86)	$\infty a : b : \frac{h+1}{h-1} c$	$y^{\frac{h-1}{h+1}}$
	$\frac{h}{D}$ (Fig. 86)	$a : \infty b : \frac{h+1}{h-1} c$	$x^{\frac{h-1}{h+1}}$

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Rectangulär-octaëder (Fig. 86).	E^h (Fig. 86)	$\boxed{a : hb : \frac{h}{h-1}c}$	$hR^{\frac{h-1}{h}}x$
	${}^hE$ (Fig. 86)	$\boxed{ha : b : \frac{h}{h-1}c}$	$hR^{\frac{h-1}{1}}y$
	${}^hE$ (Fig. 87)	$\boxed{\frac{h}{2}a : b : c}$	$\frac{h}{2}Ry$
	E^h (Fig. 87)	$\boxed{(h+1)a : b : \frac{h+1}{h}c}$	$(h+1)R^{\frac{h}{h+1}}y$
	$\overset{h}{E}$ (Fig. 88)	$\boxed{a : \frac{1}{h+1}b : \frac{1}{h-2}c}$	$\frac{1}{h+1}R^{h-2}x$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B'^{x}B^{z})$ (Fig. 87)	$\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$	$mR^{n}x$ oder $\frac{1}{m}R^{mn}y$
		worin: $\alpha = \frac{z}{\omega(z-x)}$	worin: $m = \frac{\beta}{\alpha}$
		$\beta = \frac{1}{x}$	$n = \frac{\alpha}{\gamma}$
		$\gamma = \frac{z}{\omega z+\omega x+xz}$	
	$(c^{\frac{1}{\omega}}B^{x}B'^{z})$ (Fig. 89)	$\boxed{\beta a : \alpha b : \gamma c}$	$\frac{1}{m}R^{mn}x$ oder $mR^{n}y$
		worin α, β, γ, m, n Werthe haben.	die eben angeführten
	$(\overset{1}{E}B^{x}C^{z})$	$\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$	$mR^{n}x$ oder $\frac{1}{m}R^{mn}y$
		worin: $\beta = \frac{\omega}{z(x+\omega)}$	worin: $m = \frac{\beta}{\alpha}$
		$\alpha = \frac{1}{x}$	$n = \frac{\alpha}{\gamma}$
		$\gamma = \frac{\omega}{x\omega+xz-z\omega}$	
	und	so	fort.
Quadratisches Prisma (Fig. 31)	P	$\boxed{\infty a : \infty a : c}$	Q^{∞}
	M	$\boxed{a\infty : a : \infty c}$	x^{0}
	$\overset{h}{A}$	$\boxed{a : a : \frac{1}{h}c}$	Q^{h}

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Quadratisches Prisma (Fig. 31).	${}_{h}A$	$\left\|\frac{1}{h}a : a : c\right\|$	$\frac{1}{h}Qx$
	$\overset{h}{B}$	$\left\|\infty a : a : \frac{1}{h}c\right\|$	x^{h}
	${}^{h}G^{h}$	$\left\|ha : a : \infty c\right\|$	hQ°
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^{x}B^{z})$	$\left\|xa : za : \omega c\right\|$	$\frac{z}{x}Q^{\frac{x}{\omega}}x$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^{x}G^{z})$	$\left\|\omega a : xa : zc\right\|$	$\frac{\omega}{x}Q^{\frac{x}{z}}x$
Rectanguläres Prisma (Fig. 32).	P	$\left\|\infty a : \infty b : c\right\|$	R^{∞}
	M	$\left\|a : \infty b : \infty c\right\|$	x°
	T	$\left\|\infty a : b : \infty c\right\|$	y°
	$\overset{h}{A}$	$\left\|a : b : \frac{1}{h}c\right\|$	R^{h}
	hA	$\left\|\frac{1}{h}a : b : c\right\|$	$\frac{1}{h}Ry$
	$\overset{h}{C}$	$\left\|a : \infty b : \frac{1}{h}c\right\|$	x^{h}
	$\overset{h}{B}$	$\left\|\infty a : b : \frac{1}{h}c\right\|$	y^{h}
	${}^{h}G^{h}$	$\left\|ha : b : \infty c\right\|$	$hR^{\circ}y$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^{x}C^{y})$	$\left\|xa : yb : \omega c\right\|$	$\frac{y}{x}R^{\frac{x}{\omega}}x$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}C^{y}G^{z})$	$\left\|\omega a : yb : zc\right\|$	$\frac{\omega}{y}R^{\frac{y}{z}}y$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^{y}G^{z})$	$\left\|ya : \omega b : zc\right\|$	$\frac{y}{\omega}R^{\frac{\omega}{z}}y$
Grades Rhombenprisma (F. 43)	$\overset{h}{A}$	$\left\|\frac{1}{2}a : \infty b : \frac{1}{h}c\right\|$	x^{2h}

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Grades Rhomben-prisma (Fig. 43).	E^h	$\infty a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{h}c$	γ^{2h}
	${}^hA_h$	$\frac{1}{h+1}a : \frac{1}{h-1}b : c$	$\frac{h+1}{h-1}R^{\frac{1}{h+1}}x$ oder $\frac{h-1}{h+1}R^{\frac{1}{h-1}}y$
	${}^hE_h$	$\frac{1}{h-1}a : \frac{1}{h+1}b : c$	$\frac{h-1}{h+1}R^{\frac{1}{h-1}}x$ oder $\frac{h+1}{h-1}R^{\frac{1}{h+1}}y$
	${}^hH^h$	$\frac{1}{h}a : b : \infty c$	$hR^{\circ}x$ oder $\frac{1}{h}R^{\circ}y$
	${}^hG^h$	$a : \frac{1}{h}b : \infty c$	$\frac{1}{h}R^{\circ}x$ oder $hR^{\circ}y$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^xB'')$	$\frac{ux}{x+u}a : \frac{ux}{x-u}b : \omega c$	$\frac{x+u}{x-u}R^{\frac{xu}{(x+u)}}x$ oder $\frac{x-u}{x+u}R^{\frac{xu}{(x-u)}}y$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^xH'')$	$\frac{\omega x}{x+\omega}a : \frac{x\omega}{x-\omega}b : uc$	$\frac{x+\omega}{x-\omega}R^{\frac{x\omega}{u(x+\omega)}}x$ oder $\frac{x-\omega}{x+\omega}R^{\frac{x\omega}{u(x-\omega)}}y$
	$(E^{\frac{1}{\omega}}B^xB'')$	$\frac{ux}{x-u}a : \frac{ux}{x+u}b : \omega c$	$\frac{x-u}{x+u}R^{\frac{xu}{\omega(x-u)}}x$ oder $\frac{x+u}{x-u}R^{\frac{xu}{\omega(x+u)}}y$
	$(E^{\frac{1}{\omega}}B^xH'')$	$\frac{x\omega}{x-\omega}a : \frac{x\omega}{x+\omega}b : uc$	$\frac{x-\omega}{x+\omega}R^{\frac{x\omega}{u(x-\omega)}}x$ oder $\frac{x+\omega}{x-\omega}R^{\frac{x\omega}{u(x+\omega)}}y$

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Schiefes Rhomben-prisma (Fig. 45).	$\dot{E}$	$\left\|a : \frac{h}{2}b : c\right\|$	$\frac{h}{2}Rx$
	E^{h} *)	$\left\|\frac{1}{h}a : \frac{1}{h+1}b : c\right\|$	$\frac{h}{h+1}R^{\frac{1}{h}}x$ od. $\frac{h+1}{h}R^{\frac{1}{h+1}}y$
	${}^{h}E$ **)	$\left\|\frac{1}{2-h}a : \frac{1}{h+1}b : c\right\|$	(wenn $h<2$): $\frac{2-h}{h+1}R^{\frac{1}{2-h}}x$
			(wenn $h>2$): $\frac{h-2}{h+1}S^{\frac{1}{h-2}}x$
	$\dot{O}$	$\left\|\frac{1}{h+2}a : \infty b : \frac{1}{h}c\right\|$	$x^{\frac{h}{h+2}}$
	O_{h}	$\left\|\frac{1}{h+2}a : \frac{1}{h-1}b : c\right\|$	$\frac{h+2}{h-1}R^{\frac{1}{h+2}}x$ oder $\frac{h-1}{h+2}R^{\frac{1}{h-1}}y$
	$\dot{D}$	$\left\|\frac{1}{h+1}a : b : \frac{1}{h}c\right\|$	$\frac{1}{h+1}R^{h}y$ oder $(h+1)R^{\frac{h+1}{h}}x$
	$\dot{B}$	$\left\|\frac{h}{h-1}a : hb : c\right\|$	$(h-1)R^{\frac{h}{h-1}}x$ oder $\frac{1}{h-1}R^{h}y$
		NB. Wenn $h<1$, so S für R setzen.	muss man $a_{,}$ für a und
	A_{h}	$\left\|\frac{1}{2-h}a_{,} : \infty b : \frac{1}{h}c\right\|$	$x^{\frac{h}{2-h}}$
	A_{h}	$\left\|\frac{1}{h}a_{,} : \frac{1}{1-h}b : c\right\|$	$\frac{h}{1-h}S^{\frac{1}{h}}x'$ oder $\frac{1-h}{h}S^{\frac{1}{1-h}}y$

*) oder $(\underset{h}{E}D^{1}G^{1})$.

**) oder $(\underset{h}{E}B^{1}G^{1})$.

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Schiefes Rhomben-prisma (Fig. 45).	$(E^{\frac{1}{\omega}}B^{x}D^{u})$	$\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$ worin: $\alpha = \frac{ux}{\omega u + xu - x\omega}$, $\beta = \frac{ux}{\omega(u+x)}$, $\gamma = 1$	$\frac{\beta}{a}R^{\frac{a}{\gamma}}x$ oder $\frac{a}{\beta}R^{\frac{\beta}{\gamma}}y$. worin: $m = \frac{\beta}{a}$, $n = \frac{a}{\gamma}$
	$(O^{\frac{1}{\omega}}D^{x}D^{u})$	$\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$ worin: $\alpha = \frac{\omega ux}{\omega x + ux - \omega u}$, $\beta = \frac{ux}{x-u}$, $\gamma = \omega$	$\frac{\beta}{a}R^{\frac{a}{\gamma}}x$ oder $\frac{a}{\beta}R^{\frac{\beta}{\gamma}}y$
	$(A^{\frac{1}{\omega}}B^{x}B^{u})$	$\boxed{\alpha a : \beta b : \gamma c}$ worin: $\alpha = \frac{\omega ux}{\omega x - ux + \omega u}$, $\beta = \frac{ux}{u-x}$, $\gamma = \omega$	$\frac{\beta}{a}S^{\frac{a}{\gamma}}x$ oder $\frac{a}{\beta}S^{\frac{\beta}{\gamma}}y$
Schiefes Rectangulärprisma (Fig. 47).	$\overset{h}{E}$	$\boxed{\frac{1}{h+1}a : b : \frac{1}{h}c}$	$(h+1)R^{\frac{h}{h+1}}x$ oder $\frac{1}{h+1}R^{h}y$ $\frac{1}{h+1}Rx$
	E_{h} *)	$\boxed{\frac{1}{h+1}a : b : c}$	
	${}^{h}E$ **)	$\boxed{\frac{1}{2}a : \frac{1}{h}b : c}$	$\frac{h}{2}R^{\frac{1}{h}}y$ oder $\frac{2}{h}R^{\frac{1}{2}}x$
	$\overset{h}{A}$	$\boxed{\frac{h}{h-1}a : b : \frac{1}{h}c}$	$\frac{1}{h-1}R^{h}y$ wenn $h > 1$ $\frac{1}{1-h}S^{h}y$ wenn $h < 1$ $(h-1)R^{\frac{h}{h-1}}x$ wenn $h > 1$ $(1-h)S^{\frac{h}{1-h}}x$ wenn $h < 1$

*) oder $(\underset{h}{E}D^{1}G^{1})$.

**) oder $(\underset{h}{E}C^{1}G^{1})$.

Haüysche Grundform	Haüysches Zeichen.	Zeichen nach Weiss.	Nach uns.
Reguläres sechsseitiges Prisma (Fig. 61 und 62).	$A^{\frac{1}{\omega}}B^{x}B^{y}$	$\boxed{\begin{matrix}\omega c \\ xa : ya''\end{matrix}}$ oder vollständiger $\boxed{\begin{matrix}\delta c \\ \alpha a : \beta a : \gamma a \\ \varepsilon s : \zeta s : \eta s\end{matrix}}$ worin: $\delta = \omega$, $\alpha = x$, $\beta = \frac{xy}{x+y}$, $\gamma = y$, $\varepsilon = \frac{2xy}{2y+x}$, $\zeta = \frac{2xy}{2x+y}$, $\eta = \frac{2xy}{x-y}$	$\frac{\xi}{2\alpha}D^{\frac{a}{\delta}}x$ oder $\frac{\beta}{2\alpha-\beta}D^{\frac{a}{\delta}}x$
Rhomboëder.	$(\underset{\omega}{A}B^{x}B^{y})$ oder $(\underset{\omega}{e}D^{x}D^{y})$ oder $(\underset{\omega}{E}B^{-x}D^{y})$	$\boxed{\begin{matrix}\delta c \\ \alpha a : \beta a : \gamma a \\ \varepsilon s : \zeta s : \eta s\end{matrix}}$ worin $\delta = \frac{1}{xy+x\omega+y\omega}$, $\alpha = \frac{1}{y(x-\omega)}$, $\beta = \frac{1}{x(y-\omega)}$, $\gamma = \frac{1}{\omega(y-x)}$, $\varepsilon = \frac{2}{2xy-\omega x-\omega y}$, $\zeta = \frac{2}{xy+y\omega-2x\omega}$, $\eta = \frac{2}{2y\omega-xy-x\omega}$	$\frac{2\alpha}{\zeta}P^{\frac{\xi}{2\delta}}x$ worin $\frac{2\alpha}{\zeta} = \frac{2\alpha-\beta}{\beta}$ oder $\frac{2\gamma}{\varepsilon}(x^{\frac{\zeta}{h\delta}})x$ worin $\frac{2\gamma}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon+\beta}{\alpha-\beta}$

NB. Die Formeln für das reguläre System findet man aus denen des quadratischen Prisma und Octaëders, indem man alle Axen untereinander gleich setzt. Das Haüysche grade Prisma mit rhomboïdischer Basis, und die übrigen Formen mit schiefen Axen, werden, wenn man ihre Flächen nach unserer Art bezeichnen will, eben so behandelt, wie die ähnlichen Formen mit rechtwinklichten Axen, nur muss man nachher bei der Rechnung nicht vergessen, dass die Axen keine rechte Winkel untereinander machen; die Weissischen Zeichen dieser Formen, die immer rechtwinklichte Axen voraussetzen, kann man nur nach gewissen Suppositionen finden, die zu speciell sind, um in eine allgemeine Formel gefasst werden zu können.

ZWEITES CAPITEL.

Berechnung der Winkel, des Volumens, der Oberfläche der Krystalle.

49. Nachdem wir das Gesetz kennen gelernt, nach welchem die Flächen desselben Krystalls unter einander zusammen hängen, und eine auf dieses Gesetz gegründete Bezeichnung derselben eingeführt haben, wollen wir uns an die Entwickelung der Formeln machen, welche den Zusammenhang der Krystallwinkel unter einander geben.

Diese Formeln können auf zwei verschiedenen Wegen gefunden werden. Am einfachsten ist es, sich zu ihrer Auffindung der sphärischen Trigonometrie zu bedienen (trigonometrische Krystallonomie); viel allgemeiner wird aber die Behandlung, wenn man sie auf die analytische Geometrie der Ebenen gründet (analytische Krystallonomie).

Zuerst wird uns der Zusammenhang der Winkel, die den Grundformen gehören, beschäftigen; aus diesen lassen sich nach den obigen Prinzipien die Winkel der abgeleiteten Formen leicht berechnen.

Man kann die Grundformen unter zwei Abtheilungen bringen; es giebt nämlich einige, bei welchen man nur einen Winkel zu wissen braucht, um alle übrigen berechnen zu können; bei andern ist die Kenntniss zweier und mehrerer Winkel nothwendig. Zu den erstern gehören

das Rhomboëder, das Dihexaëder, das Quadratoctaëder; in der zweiten Abtheilung stehen die Rhombenoctaëder und Rhomboïdoctaëder.

Trigonometrische Krystallonomie.

Die sphärische Trigonometrie giebt uns den Zusammenhang zwischen den ebenen Winkeln und den Neigungen der Flächen, die in einer Ecke zusammen kommen. Es sey *E*, Fig. 90, eine solche Ecke; man denke sie sich in den Mittelpunct einer Kugel gelegt, so dass also $EB = EC = EA$ die Radien der Kugel vorstellen, und *BC*, *AB*, *BC* Bogen grösster Kreise sind, welche durch den Durchschnitt der Ebenen, die durch die Linien *EB*, *EC*, *EA* gehen, mit der Oberfläche der Kugel gebildet werden.

Es ist aus dem, was in der Einleitung (s. sphärische Trigonometrie) gesagt worden ist, klar, dass das sphärische Dreieck *ABC* die Ecke *E* repräsentirt, d. h. dass die Winkel dieses sphärischen Dreiecks den Neigungswinkeln und dass die Seiten desselben den ebnen Winkeln an der Ecke gleich sind; und dass die Neigungswinkel und ebenen Winkel der Ecke denselben Zusammenhang untereinander haben, als die Winkel und Seiten dieses sphärischen Dreiecks.

Die in der Einleitung angegebenen Formeln der sphärischen Trigonometrie lassen sich also auch bei den Krystallen anwenden.

Vom Rhomboëder, Dihexaëder und Quadratoctaëder.

Man denke sich eine Ecke, in die *n* Kanten zusammen kommen; die Neigungswinkel der *n* Flächen und die Winkel zwischen den Kanten seyen

einander respective gleich; wir wollen die Neigungswinkel der Flächen mit A, die Winkel zwischen den Kanten oder die ebenen Winkel an der Ecke mit a bezeichnen. Das sphärische Vieleck Fig. 91 repräsentirt eine solche Ecke; die Auflösung desselben wird uns mit Leichtigkeit zu den nöthigen Formeln für die erste Abtheilung der Grundformen führen.

Es sey D der Mittelpunct des sphärischen Vielecks; durch diesen Punct und zwei benachbarte Winkel lege man zwei Kreisbögen, mit demselben Halbmesser und aus demselben Mittelpunct beschrieben, als die Seiten a des Vielecks. Man bekommt dadurch ein sphärisches Dreieck, das Fig. 92 besonders abgebildet ist, und dessen drei Winkel offenbar $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A$ und $\frac{360°}{n}$ sind. Die eine Seite, nämlich die, welche dem Winkel an D gegenüber liegt, ist a; die beiden andern Seiten wollen wir mit r bezeichnen; sie sind offenbar dem Neigungswinkel der Kanten gegen eine Linie, die durch den Punct D und durch die Spitze der Ecke geht, und welche in allen Grundformen mit der Axe zusammen fällt, gleich. Das Perpendikel i endlich, aus D auf die Seite a gefällt, repräsentirt die Neigung der Flächen, die sich in der Ecke schneiden, gegen dieselbe Axe. Es halbirt die Seite a und den Winkel bei D. Die Stücke dieses Dreiecks hängen durch folgende Formeln zusammen, die leicht aus den in der Einleitung gegebenen Formeln für das rechtwinklichte sphärische Dreieck abzuleiten sind.

(1) $\cos. \frac{1}{2}a \sin. \frac{1}{2}A = \cos. \frac{180°}{n}$.

(2) $\text{tang.} \frac{1}{2}A \cos. r = \cot. \frac{180°}{n}$.

(3) $\frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\cos. i} = \sin. \frac{180°}{n}$.

(4) $\frac{tgi}{tgr} = \cos. \frac{180°}{n}$.

(5) $\frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\sin. r} = \sin. \frac{180°}{n}$.

(6) $\frac{\text{sin. } i}{\text{tg. } \frac{1}{2}a} = \text{cot. } \frac{180°}{n}$.

(7) cos. r = cos. $\frac{1}{2}a$ cos. i.

(8) sin. r sin. $\frac{1}{2}A$ = sin. i.

(9) tg. r cos. $\frac{1}{2}A$ = tg. $\frac{1}{2}a$.

(10) tg. $\frac{1}{2}A$ sin. $\frac{1}{2}a$ = tg. i.

Da nun beim Rhomboëder drei Kanten in der Spitze zusammen kommen, beim Quadratoctaëder vier, beim Dihexaëder sechs; so ist beim Rhomboëder $n = 3$, beim Quadratoctaëder $n = 4$ und beim Dihexaëder $n = 6$; und die obigen Gleichungen bekommen für diese drei Körper folgende Gestalt.

NB. In dieser Tabelle bedeutet A die Neigung zweier benachbarten Flächen an der Endkante, a ist der ebene Winkel an der Spitze, i die Neigung der Fläche, r die Neigung der Endkante gegen die Axe.

Rhomboëder.		Quadratoctaëder.	Dihexaëder.
I. cos. $\frac{1}{2}a$ sin. $\frac{1}{2}A$ II. $\frac{tgi}{tgr}$	$= \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
III. cos. r tg. $\frac{1}{2}A$ IV. $\frac{\text{sin. } i}{\text{tg. } \frac{1}{2}a}$	$= \sqrt{\frac{1}{3}}$	1	$\sqrt{3}$
V. $\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}A}{\text{cos. } i}$ VI. $\frac{\text{sin. } \frac{1}{2}a}{\text{sin. } r}$	$= \sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$

Es ist merkwürdig, dass die Werthe von $\frac{tgi}{tgr}$ beim Rhomboëder, Quadratoctaëder und Dihexëder eine Reihe bilden, deren allgemeines Glied $\sqrt{\frac{x}{4}}$ ist, in welchem x nacheinander die Werthe 1, 2, 3 annimmt. Es kommen

keine Krystallformen vor, bei welchen der Werth von x zwischen diese Zahlen fiele. Eben so wenig kann $x = 4$ werden, weil alsdann $\text{tg}, r = \text{tg}. i$ würde, was unmöglich ist.

50. Der körperliche Inhalt dieser drei Grundformen ist eben so leicht zu finden. Es sey Fig. 93 die Basis einer graden $n$seitigen Doppelpyramide, deren Winkel an den Endkanten untereinander gleich sind, so dass also die Dreiecke DCC gleichschenklicht und einander gleich sind. Die Höhe dieser Pyramide oder die halbe Axe der Doppelpyramide sey der Einheit gleich gesetzt; so ist offenbar $DC = \text{tg}. r$, und der Inhalt des Dreiecks DCC gleich $\frac{1}{2}\ \text{tg}.^2 r\ \sin.\frac{360°}{n}$. Dieser Inhalt mit n multiplicirt giebt den Inhalt der Basis der $n$seitigen Pyramide; und dieser, mit der Höhe der Pyramide, d. h. mit Eins multiplicirt und durch Drei dividirt, den Inhalt der Pyramide oder die Hälfte des Inhalts der Doppelpyramide. Bezeichnen wir den Inhalt der Doppelpyramide, die halbe Axe $= 1$ gesetzt, mit K, so ist:

$$K = \frac{n \cdot \text{tg}.^2 r \cdot \sin.\frac{360°}{n}}{3}.$$

Setzt man in dieser Formel nacheinander $n = 4$, $n = 6$, so hat man die körperlichen Inhalte des Quadratoctaëders und Dihexaëders.

Inhalt des Quadratoctaëders, die halbe Axe $= 1$ gesetzt, $= \frac{4 \cdot \text{tg}.^2 r}{3}$.

Inhalt des Dihexaëders, die halbe Axe $= 1$ gesetzt, $= \text{tg}.^2 r \sqrt{3}$.

Dieses Verfahren kann beim Rhomboëder nicht angewendet werden, weil seine Kanten an der Basis im Zikzak liegen. Hier sucht man erst die Länge der Kanten, welche offenbar gleich $\frac{2}{3 \cdot \cos. r}$ ist, wenn man die halbe Axe des Rhomboëders gleich 1 setzt; denn eine Linie, die aus dem

der Spitze entgegengesetzten Endpuncte einer Endkante senkrecht auf die Axe gefällt wird, schneidet von der ganzen Axe ein Dritttheil, von der halben also zwei Dritttheil ab.

Hieraus folgt, dass der Flächeninhalt der Seitenfläche des Rhomboëders gleich $\frac{4}{9}\frac{\sin. a}{\cos.^2 r}$ ist. Betrachtet man nun das Rhomboëder als ein Parallelepiped, dessen Basis eine Seitenfläche ist, so ist dessen Höhe offenbar eine Linie, welche der senkrechten Entfernung zweier parallelen Seitenflächen gleich ist; diese senkrechte Entfernung ist aber gleich einer Seitenkante, multiplicirt mit dem Sinus des Neigungswinkels der Seitenkante gegen eine anliegende Seitenfläche, also gleich $\frac{2 \cdot \sin.(i+r)}{3 \cdot \cos. r}$. Diese Höhe des Parallelepipeds mit der Basis multiplicirt, giebt den Inhalt des Rhomboëders, den wir mit K bezeichnen wollen; nämlich:

$$K = \frac{8}{27} \cdot \frac{\sin. a \cdot \sin.(i+r)}{\cos.^3 r}.$$

Man kann aus dieser Formel i und a mit Hülfe der eben gefundenen Gleichungen $\frac{tg. i}{tg. r} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\sin. r} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ fortschaffen; sie bekommt alsdann folgende Gestalt:

$$K = \frac{4 \cdot tg.^3 r}{3\sqrt{3}}.$$

Die Oberfläche des Rhomboëders ist sechs Mal so gross, als der Flächeninhalt einer Seitenfläche, also, wenn man diese Oberfläche mit O bezeichnet,

$$O = \frac{8}{3}\frac{\sin. a}{\cos.^2 r} = \frac{8 \sin. a}{1+2 \cos. a}.$$

Beim Quadratoctaëder und Dihexaëder ist offenbar die Endkante gleich $\frac{1}{\cos. r}$; die Seitenfläche also gleich $\frac{1}{2}\frac{\sin. a}{\cos.^2 r}$; die ganze Oberfläche also:

$$O = \frac{n \cdot \sin. a}{\cos.^2 r}.$$

Beim Quadratoctaëder, wo $\cos.^2 r = \cos. a$ ist, ist auch

$$O = 4 \text{ tg. } a.$$

Der Flächeninhalt des sphärischen Vielecks Fig. 91 ist nach der in der Einleitung gegebenen allgemeinen Formel fürs Dreieck ebenfalls leicht zu finden. Dieser Flächeninhalt drückt das Verhältniss aus, das zwischen dem Raum, den die Ecke annimmt, und dem ganzen Raum, der um einen Punct her liegt, statt findet; wenn wir also die Oberfläche der Kugel, in deren Mittelpuncte die Spitze der Ecke liegt, in 360 Theile theilen, so geben wir, indem wir den Flächeninhalt des sphärischen Vielecks anzeigen, eben so den Werth der Ecke, als soliden Winkel betrachtet, an, wie wir den Werth eines ebenen Winkels angeben, wenn wir anzeigen, wie viel Grade er von der Peripherie eines Kreises, die ebenfalls in 360 Theile getheilt worden ist, abschneidet.

Um den Flächeninhalt des sphärischen Vielecks Fig. 91 zu finden, theilt man es, wie oben, von seinem Mittelpuncte aus, in n gleiche Dreiecke. Die Winkel jedes dieser Dreiecke sind offenbar $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A$ und $\frac{360^\circ}{n}$; der Flächeninhalt jedes Dreiecks also, die Oberfläche der Kugel gleich 360° gesetzt, ist:

$$\frac{A + \frac{360^\circ}{n} - 180^\circ}{2}.$$

Dieser Ausdruck mit n multiplicirt giebt den Flächeninhalt des ganzen nEcks, welcher also ist:

$$\frac{nA - (n-2)\,180^\circ}{2}.$$

Da dieser Flächeninhalt, wie wir eben gesehen haben, den Werth der aus den Neigungswinkeln A gebildeten Ecke, als soliden Winkels, in Graden ausgedrückt, giebt, so wollen wir ihn Eckenwerth nennen oder Spitzenwerth, wenn es die Spitze irgend eines Körpers ist, und ihn mit E bezeichnen.

So ist also:

Der Spitzenwerth des Rhomboïders gleich $\frac{3A - 180°}{2}$.

Der Spitzenwerth des Quadratoctaëders gleich $\frac{4A - 360°}{2}$.

Der Spitzenwerth des Dihexaëders gleich $\frac{6A - 720°}{2}$.

Will man die Oberfläche der Kugel nicht $= 360°$, sondern $= 1$ setzen, so müssen die obigen Ausdrücke der Spitzenwerthe durch $360°$ dividirt werden.

Beim Rhomboëder ist, nach dem Obigen,

$$E = \tfrac{1}{2}A - 90°,$$

also

$$\sin. E = -\cos. \tfrac{1}{2}A = -\cos. (A + \tfrac{1}{2}A);$$

oder da $\cos. (A + \frac{1}{2}A) = \cos. A \cos. \frac{1}{2}A - \sin. A \sin. \frac{1}{2}A$, und $\sin. A = 2 \sin. \frac{1}{2}A \cos. \frac{1}{2}A$, und $2 \sin.^2 \frac{1}{2}A = 1 - \cos. A$

$$\sin. E = \cos. \tfrac{1}{2}A \,(1 - 2 \cos. A).$$

Nach dem Obigen ist beim Rhomboëder

$$K = \frac{4 \text{ tg.}^2 r}{3\sqrt{3}};$$

substituirt man in diesem Ausdrucke den aus der Gleichung

$$\cos. r = \frac{1}{\sqrt{3 \text{ tg. } \frac{1}{2}A}}$$

hervorgehenden Werth von $\text{tg.}^2 r$, so findet man:

$$K = \frac{4 (1 - 2 \cos. A)}{3\sqrt{3} \cos.^4 \frac{1}{2}A}.$$

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden:

$$1 - 2 \cos. A = \frac{\sin. E}{\cos. \frac{1}{2}A};$$

also

$$K = \frac{4 \sin. E}{3\sqrt{3} \cos.^3 \frac{1}{2}A}.$$

Auf ähnliche Art findet man, dass die Formel für die Oberfläche des Rhomboëders:

$$O = \frac{8 \sin. a}{3 \cos.^2 r},$$

indem man $\sin. a = 2 \sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a$, $\cos. \frac{1}{2}a = \frac{1}{2 \sin. \frac{1}{2}A}$ und $\cos. r = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg}. \frac{1}{2}A}$ setzt, folgende Form annimmt:

$$O = \frac{4\sqrt{1-2 \cos. A}}{\cos.^2 \frac{1}{2}A};$$

oder da nach dem Obigen $1 - 2 \cos. A = \frac{\sin. E}{\cos. \frac{1}{2}A}$ ist:

$$O = \frac{4\sqrt{\sin. E}}{\sqrt{\cos.^6 \frac{1}{2}A}}.$$

und

$$O^2 = 16 \cdot \frac{\sin. E}{\cos.^6 \frac{1}{2}A}.$$

Aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke für K und O folgt:

$$O^2 = \frac{12 \cdot \sqrt{3} \cdot K}{\cos.^2 \frac{1}{2}A}.$$

Beim Quadratoctaëder ist

$$\sin. E = \sin. (2A - 180^\circ) = - \sin. 2A$$

$$= - 2 \sin. A \cos. A = - 4 \cos. A \sin. \tfrac{1}{2}A \cos. \tfrac{1}{2}A.$$

Da nun

$$\cos. r = \cot. \tfrac{1}{2}A,$$

also

$$\operatorname{tg}.^2 r = \frac{1 - \cot.^2 \frac{1}{2}A}{\cot.^2 \frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{- \cos. A}{\cos.^2 \frac{1}{2}A};$$

so ist, wenn man für $- \cos. A$ den eben gefundenen Werth $\frac{\sin. E}{4 \sin. \frac{1}{2}A \cos. \frac{1}{2}A}$ substituirt,

$$\operatorname{tg}.^2 r = \frac{\sin. E}{4 \sin. \frac{1}{2}A \cos.^3 \frac{1}{2}A},$$

also

$$K = \frac{\sin. E}{3 \sin. \frac{1}{2}A \cos.^3 \frac{1}{2}A}.$$

Auf ähnliche Weise, wie beim Rhomboëder, findet man auch die Oberfläche des Quadratoctaëders in einer trigonometrischen Function von A ausgedrückt. Es ist nämlich beim Quadratoctaëder

$$O = \frac{4 \sin. a}{\cos.^2 r} = \frac{8 \sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a}{\cos.^2 r}.$$

Nun ist aber

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1}{2 \sin.^2 \frac{1}{2}A},$$

also

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2}A - 1}{2 \sin.^2 \frac{1}{2}A}$$

und

$$\sin. a = 2 \cos. \tfrac{1}{2}a \sin. \tfrac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2 \sin.^2 \frac{1}{2}A - 1}}{\sin.^2 \frac{1}{2}A}$$
$$= \frac{\sqrt{-\cos. A}}{\sin.^2 \frac{1}{2}A}.$$

Es ist ferner

$$\cos.^2 r = \cot.^2 \tfrac{1}{2}A;$$

substituirt man diese Werthe in der ersten Formel für O, so hat man:

$$O = \frac{4\sqrt{-\cos. A}}{\cos.^2 \frac{1}{2}A};$$

und hierin den oben gefundenen Werth von $-\cos. A$ gesetzt, giebt endlich:

$$O = \frac{2}{\cos. \frac{1}{2}A} \cdot \sqrt{\frac{\sin. E}{\sin. \frac{1}{2}A \cos.^3 \frac{1}{2}A}}.$$

Aus der Vergleichung der Werthe von O und K ergiebt sich für's Quadratoctaëder:

$$O^2 = \frac{12 \cdot K}{\cos.^2 \frac{1}{2}A}.$$

Beim Dihexaëder ist:

$$\sin. E = \sin. (3A - 360°);$$

also

$$\sin. \tfrac{1}{2}E = \sin. (\tfrac{3}{2}A - 180°) = -\sin. (A + \tfrac{1}{2}A)$$
$$= \sin. \tfrac{1}{2}A \,(1 - 4 \cos.^2 \tfrac{1}{2}A).$$

Da nun

$$\cos.\ ^2r = 3\ \cot.\ ^2\tfrac{1}{2}A,$$

so ist

$$\text{tg.}\ ^2r = \frac{1 - 3\ \cot.\ ^2\frac{1}{2}A}{3\ \cot.\ ^2\frac{1}{2}A} = \frac{1 - 4\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A}{3\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A}.$$

Für $1 - 4\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A$ den oben gefundenen Werth dieses Ausdrucks substituirt, giebt

$$\text{tg.}\ ^2r = \frac{\sin.\ \frac{1}{2}E}{3\ \sin.\ \frac{1}{2}A\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A},$$

mithin

$$K = \frac{\sin.\ \frac{1}{2}E}{\sqrt{3}\ \sin.\ \frac{1}{2}A\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A}.$$

Was die Oberfläche des Dihexaëders betrifft, so ist, wie wir gesehen haben

$$O = \frac{6\ \sin.\ a}{\cos.\ ^2r}.$$

Nun ist aber

$$\cos.\ ^2\tfrac{1}{2}a = \frac{3}{4\ \sin.\ ^2\frac{1}{2}A},$$

also

$$\sin.\ ^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1 - 4\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A}{4\ \sin.\ ^2\frac{1}{2}A}$$

und

$$\sin.\ a = 2\ \sin.\ \tfrac{1}{2}a\ \cos.\ \tfrac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}\ \sqrt{1 - 4\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A}}{2\ \sin.\ ^2\frac{1}{2}A}.$$

Ferner ist

$$\cos.\ ^2r = 3\ \cot.\ ^2\tfrac{1}{2}A.$$

Diese Werthe von sin. a und cos. ^2r in die Formel für O substituirt, giebt

$$O = \frac{\sqrt{3}\ \sqrt{1 - 4\ \cos.\ ^2\frac{1}{2}A}}{\cos.\ ^2\frac{1}{2}A};$$

und hierin den eben gefundenen Werth von $1 - \frac{1}{4}\cos.^2\frac{1}{2}A$ substituirt:

$$O = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\sin. A}}{\sqrt{\sin.\frac{1}{2}A\cos.^2\frac{1}{2}A}}.$$

Aus der Vergleichung der Werthe von O und K ergiebt sich:

$$O^2 = \frac{3\sqrt{3}\cdot K}{\cos.^2\frac{1}{2}A}.$$

Der Nutzen der eben entwickelten Formeln besteht besonders darin, dass sie uns in den Stand setzen, aus den Neigungswinkeln A der Flächen an den Endkanten gleich den körperlichen Inhalt und die Oberfläche des Körpers zu berechnen, vermittelst einer Formel, die zur logarithmischen Rechnung sehr bequem ist.

Zusammenstellung der eben entwickelten Formeln.

Die halbe Axe ist gleich 1 gesetzt.

Beim Rhomboëder.	Beim Quadratoctaëder.	Beim Dihexaëder.
$K = \frac{4\,\text{tg.}^2 r}{3\sqrt{3}}$	$= \frac{4\,\text{tg.}^2 r}{3}$	$= \sqrt{3}\cdot\text{tg.}^2 r$
$= \frac{4\sin.(\frac{3}{2}A - 90°)}{3\sqrt{3}\cos.^3\frac{1}{2}A}$	$= \frac{\sin.(2A - 180°)}{3\sin.\frac{1}{2}A\cos.^3\frac{1}{2}A}$	$= \frac{\sin.(\frac{3}{2}A - 180°)}{\sqrt{3}\sin.\frac{1}{2}A\cos.^2\frac{1}{2}A}$
$O = \frac{8\sin.a}{3\cos.^2 r}$	$= \frac{4\sin.a}{\cos.^2 r} = 4\,\text{tg.}\,a$	$= \frac{6\sin.a}{\cos.^2 r}$
$= 4\sqrt{\frac{\sin.(\frac{3}{2}A - 90°)}{\cos.^6\frac{1}{2}A}}$	$= 2\sqrt{\frac{\sin.(2A - 180°)}{\sin.\frac{1}{2}A\cos.^6\frac{1}{2}A}}$	$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\sin.(\frac{3}{2}A - 180°)}{\sin.\frac{1}{2}A\cos.^4\frac{1}{2}A}}$
$O^2 = \frac{12\sqrt{3}K}{\cos.^2\frac{1}{2}A}$	$= \frac{12K}{\cos.^2\frac{1}{2}A}$	$= \frac{3\sqrt{3}\cdot K}{\cos.^2\frac{1}{2}A}$
$O = \frac{4\,\text{tg.}\,r}{\cos.\frac{1}{2}A}$	$= \frac{4\,\text{tg.}\,r}{\cos.\frac{1}{2}A}$	$= \frac{3\,\text{tg.}\,r}{\cos.\frac{1}{2}A}$

Einiges über die Axen der bisher besprochenen Körper.

51. Ausser der Hauptaxe, welche von der obern zur untern Spitze der oftgenannten Körper geht, giebt es noch viele andere Axen, welche andere entgegengesetzte Ecken derselben Körper mit einander verbinden. Man kann überhaupt jede Linie, die durch den Mittelpunct des Körpers nach irgend einem ausgezeichneten Punct auf der Oberfläche desselben geht, eine Axe nennen. So kann man Axen unterscheiden, die aus dem Mittelpunct durch die Ecken gehen; andere, die aus dem Mittelpunct senkrecht auf die Kanten, noch andere, die aus dem Mittelpunct senkrecht auf die Flächen gefällt sind; wir wollen die Axen erster Art Eckenaxen, diejenigen zweiter Art Kantenaxen und die Axen dritter Art Flächenaxen nennen.

Man sieht leicht ein, dass die Flächenaxen der drei Körper, die wir bisher betrachtet haben, in jedem derselben alle untereinander gleich sind.

Die Axen, welche rechte Winkel mit den Endkanten machen, sind ebenfalls gleich untereinander, aber verschieden von den Axen, die auf die Kanten an der Basis fallen; man kann sie durch die Benennung: Endkantenaxen und Basiskantenaxen von einander unterscheiden; sie können ebenfalls als Radien von zwei verschiedenen Kugeln betrachtet werden.

Die Eckenaxen endlich, wenn man die Hauptaxe ausnimmt, die auch eine Eckenaxe ist, sind ebenfalls untereinander gleich; man kann durch ihre Endpuncte und die beiden Endpuncte der Hauptaxe die Oberfläche eines Ellipsoïds legen, eines Körpers, der bekanntlich durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre längere oder kürzere Axe entsteht; diese Umdrehungsaxe fällt mit der Hauptaxe des Körpers zusammen.

Man sieht leicht ein, dass diese verschiedenen Kugeln und Ellipsoïde von den Axen bestimmt werden, und dass man aus der Länge und Lage der Axen die Gleichungen, die körperlichen Inhalte und die Oberflächen derselben finden kann.

Beim Quadratoctaëder und Dihexaëder, deren Kanten an der Basis in einer Ebene liegen, machen die Eckenaxen, die man sich aus den Ecken an der Basis nach dem Mittelpunct gezogen denken kann, rechte Winkel mit der Axe. Ihre Länge ist also gleich tg. r, wenn man die halbe Hauptaxe der Einheit gleich setzt. Beim Rhomboëder ist diess nicht der Fall; die sechs Eckenaxen, die von den sechs Ecken an der Basis des Rhomboëders nach dem Mittelpunct gehen, bilden mit der Hauptaxe abwechselnd scharfe und stumpfe Winkel, die sich gegenseitig zu 180° complementiren. Um sich einen deutlichen Begriff davon zu machen, lege man durch eine Endkante des Rhomboëders und die Axe eine Ebene, Fig. 102. AB ist die Hauptaxe, AD, FB sind die beiden parallelen Endkanten, AF, DB die Diagonalen zweier Seitenflächen des Rhomboëders; die ganze Figur ist ein Rhomboïd, dessen Winkel $FAD = i + r$.

Macht man $AK = FK$, $BL = LD$, so ist, wie in allen Rhomboïden, offenbar $AG = GH = HB = \frac{1}{3}AB$, und $KG = \frac{1}{2}GD$. Dass aber bei G ein rechter Winkel ist, zeigt sich schon daraus, dass die Tangenten von FAB und DAB oder tg. i und tg. r sich zu einander verhalten, wie die Linien KG und DG, nämlich wie 1 : 2 welches nur in dem Falle möglich ist, wenn der Winkel KGA ein rechter ist.

Die blosse Ansicht der Figur zeigt uns, dass, wenn man die halbe Hauptaxe = 1 oder die ganze Hauptaxe $AB = 2$ setzt,

Diese halbe Diagonale, oder BF, ist aber offenbar gleich der mit sin. $\frac{1}{2}a$ multiplicirten Endkante des Rhomboëders oder gleich $\frac{2 \sin. \frac{1}{2}a}{3 \cos. r}$, oder, da sin. $\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin. r}{2}$, gleich tg. $r \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$; das ist also der Werth der Basiskantenaxe des Rhomboëders.

Was die Winkel betrifft, die die Axen untereinander bilden, so haben wir schon oben gesehen, dass der Winkel α, den die Basiseckenaxen mit der Hauptaxe machen, so beschaffen ist, dass dessen Tangente doppelt so gross ist, als die Tangente der Neigung der Endkante des Rhomboëders gegen die Axe. Aus dem Vorhergehenden sehen wir aber, dass

$$2 \text{ tg. } r = \text{tg. } r_1,$$

wo r_1 die Neigung der Endkante des nächst stumpferen Rhomboëders gegen die Axe bedeutet. Wenn man also Ebenen durch die Basiseckenaxen des Rhomboëders legt, so sind diese eben so gegen einander geneigt, wie die Flächen des nächststumpferen Rhomboëders.

Die Basiseckenaxen des Quadratoctaëders und Dihexaëders liegen in einer Ebene, und machen einen rechten Winkel mit der Hauptaxe; eben so die Basiskantenaxen dieser Körper.

Die Basiskantenaxen des Rhomboëders machen ebenfalls rechte Winkel mit der Hauptaxe; sie liegen alle in einer Ebene und machen Winkel von 60° untereinander.

Die Winkel, die die Endkanten- und Flächenaxen mit der Hauptaxe machen, sind offenbar gleich $90° - r$ und $90° - i$. Bezeichnet man diese beiden Winkel mit β und γ, so hat man

$$\text{tg. } \beta = \cot. r$$

$$\text{tg. } \gamma = \cot. i.$$

Legt man beim Rhomboëder durch drei, beim Quadratoctaëder durch vier, beim Dihexaëder durch sechs benachbarte, nach oben gerichtete Endkanten- oder Flächenaxen Ebenen, so bilden diese eine Ecke am Mittelpunct, die der Spitze des Körpers ähnlich ist, aber andere Winkel hat. Die Flächen dieser Ecke am Mittelpunct können so gegen einander geneigt seyn, dass sie einem Körper aus der Reihe der abgeleiteten Körper gehören; so wie z. B. die Flächen, die man sich durch die Basiseckenaxen des Rhomboëders gehend denken kann, dem nächst stumpferen Rhomboëder gehören. Nach den im Anfange entwickelten Gesetzen des Krystallbaues müssen dann $\frac{tg.r}{tg.\beta}$ oder $\frac{tg.i}{tg.\gamma}$ einfache rationale Grössen seyn. Macht man diese Bedingung in den obigen Gleichungen geltend, so findet man, dass tg. ^2r oder tg. ^2i einfache Grössen seyn müssen. So oft also beim Quadratoctaëder und Dihexaëder das Verhältniss einer Basiseckenaxe zur Hauptaxe einer einfachen Zahl oder der Quadratwurzel einer einfachen Zahl entspricht, so oft werden die Neigungswinkel der Ebenen, die man sich durch die benachbarten Endkanten- oder Flächenaxen gelegt denken kann, einem Körper aus der Reihe der abgeleiteten Körper gehören können.

Man kann sich noch eine eigene Art Axen denken, die aus dem Mittelpunct in die Mitte der Endkanten oder Flächen fallen; die Ebenen, die man durch diese Axen legt, sind offenbar den Flächen des Körpers parallel, in dessen Innern sie sich befinden.

Da die Flächenaxen alle einander gleich sind, so kann man eine Kugeloberfläche durch ihre Endpuncte legen; diese Kugeloberfläche wird von den Flächen des Körpers berührt; man kann sie die eingeschriebene Kugeloberfläche nennen; ihr Radius ist gleich sin. i, die halbe Axe des Körpers

$= 1$ gesetzt; ihr körperlicher Inhalt also $\frac{4}{3}\pi$ sin. ^3i, und ihre Oberfläche 4π sin. ^2i.

Von den Formen die durch grade Abstumpfung der Endkanten aus dem Rhomboëder, Quadratoctaëder und Dihexaëder abgeleitet werden können.

52. Die abgeleiteten Formen dieser Art sind den Grundformen durchaus ähnlich und dürfen oft als solche angesehen werden, indem die Wahl zwischen mehreren solchen Formen, welche sich durch grade Abstumpfung der Endkanten auseinander bilden können, zuweilen ganz der Willkühr überlassen bleibt; ja unsere eingeführte Bezeichnung, wenn sie zur Rechnung einfach genug seyn soll, erfordert die Annahme mehrerer von diesen Formen als Grundformen.

Folgende zwei Grundsätze werden uns den Zusammenhang aller Stücke der abgeleiteten Form untereinander und mit den Stücken der Grundform an die Hand geben:

1°. Die Stücke der abgeleiteten Form verhalten sich untereinander eben so, wie die Stücke der Grundform.

2°. Die Neigung der Endflächen der abgeleiteten Form gegen die Axe ist der Neigung der Endkanten der Grundform gegen die Axe gleich.

Bezeichnen wir also alle Stücke der abgeleiteten Form mit denselben Buchstaben, als die Stücke der Grundform, nur dass wir ihnen eine Eins hinzufügen, so:

$$A_1,\ a_1,\ r_1,\ i_1 \text{ etc.}$$

so giebt der zweite Satz folgende Gleichung

$$i_1 = r.$$

Vermöge des ersten Satzes gelten die oben entwickelten Formeln auch für die abgeleiteten Formen und wir haben:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}a_1 \sin.\ \tfrac{1}{2}A_1 = \cos.\ \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{\cos.\ \frac{1}{2}A_1}{\cos.\ i_1} = \sin.\ \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{\text{tg.}\ i}{\text{tg.}\ r} = \frac{\text{tg.}\ i_1}{\text{tg.}\ r_1} = \cos.\ \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{\sin.\ \frac{1}{2}a}{\sin. r} = \frac{\sin.\ \frac{1}{2}a_1}{\sin.\ r_1} = \sin.\ \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{\sin.\ i_1}{\text{tg.}\ \frac{1}{2}a_1} = \cot.\ \frac{180^\circ}{n} \quad \ldots\ldots\ (a)$$

$$\cos.\ r_1 = \cos.\ \tfrac{1}{2}a_1 \cos.\ i_1 \quad \ldots\ (d)$$

$$\sin.\ r_1 \sin.\ \tfrac{1}{2}A_1 = \sin.\ i_1 \quad \ldots\ldots\ (f).$$

Da nun $i_1 = r$, so haben wir auch:

$$\frac{\text{tg.}\ i}{\text{tg.}\ i_1} = \frac{\text{tg.}\ r}{\text{tg.}\ r_1} = \cos.\ \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{\cos.\ \frac{1}{2}A_1}{\cos.\ r} = \sin.\ \frac{180^\circ}{n} \quad \ldots\ldots\ (b)$$

$$\frac{\sin.\ \frac{1}{2}a}{\sin.\ i_1} = \sin.\ \frac{180^\circ}{n} \quad \ldots\ldots\ (c).$$

Die Gleichung (*b*) ändert sich in

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}A \cos.\ \tfrac{1}{2}A_1 = \cos.\ \frac{180^\circ}{n},$$

wenn man für cos. r seinen oben gefundenen Werth

$$\cos.\ r = \frac{\cot.\ \frac{180^\circ}{n}}{\text{tg.}\ \frac{1}{2}A}$$

substituirt.

Die Combination der Gleichungen (*a*) und (*c*) giebt folgende Gleichung

$$\frac{\sin.\ \frac{1}{2}a}{\text{tg.}\ \frac{1}{2}a_1} = \cos.\ \frac{180^\circ}{n}.$$

Die Gleichungen (*d*) und (*f*) gehen, wenn man r für i_1 substituirt:

$$\frac{\cos. r_1}{\cos. r} = \cos. \tfrac{1}{2}a_1$$

$$\frac{\sin. r}{\sin. r_1} = \sin. \tfrac{1}{2}A_1.$$

Wenn man endlich in den Gleichungen (7) und (8) der 5osten Nummer i_1 für r setzt, so findet man:

$$\frac{\cos. i_1}{\cos. i} = \cos. \tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{\sin. i}{\sin. i_1} = \sin. \tfrac{1}{2}A.$$

Was die Oberfläche und den körperlichen Inhalt der abgeleiteten Form betrifft, so haben wir beim nächst stumpferen Rhomboëder

$$K_1 = \frac{4 \text{ tg. } ^2r_1}{3\sqrt{3}},$$

also da $K = \frac{4 \text{ tg. } ^2r}{3\sqrt{3}}$

$$\frac{K_1}{K} = \frac{\text{tg. } ^2r_1}{\text{tg. } ^2r} = 4.$$

Beim Quadratoctaëder findet man auf dieselbe Weise

$$\frac{K_1}{K} = 2;$$

und beim Dihexaëder

$$\frac{K_1}{K} = \frac{4}{3}.$$

Das Verhältniss der Oberflächen ist nicht so einfach. Wir haben für das Rhomboëder:

$$O = \frac{4\sqrt{3 - 4 \cos. ^2 \tfrac{1}{2}A}}{\cos. ^2 \tfrac{1}{2}A},$$

folglich aueh

$$O_1 = \frac{4\sqrt{3 - 4 \cos. ^2 \tfrac{1}{2}A_1}}{\cos. ^2 \tfrac{1}{2}A_1};$$

oder da

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_1 = \tfrac{1}{2} \cot. \tfrac{1}{2}A:$$

$$O_1 = \frac{16\sqrt{3 - \cot. ^2 \tfrac{1}{2}A}}{\cot. ^2 \tfrac{1}{2}A}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{O_1}{O} = 4 \sin. \tfrac{1}{2}A = \frac{2}{\cos. \frac{1}{2}a}.$$

Auf ähnliche Art findet man beim Quadratoctaëder, da

$$O = \frac{4\sqrt{1-2\cos.^2 \frac{1}{2}A}}{\cos.^2 \frac{1}{2}A}$$

und

$$O_1 = \frac{4\sqrt{1-2\cos.^2 \frac{1}{2}A_1}}{\cos.^2 \frac{1}{2}A_1},$$

und da ferner

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_1 = \frac{\cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{2}}:$$

$$O_1 = \frac{8\sqrt{1-\cot.^2 \frac{1}{2}A}}{\cot.^2 \frac{1}{2}A}:$$

folglich

$$\frac{O_1}{O} = 2 \sin. \tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{2}}{\cos. \frac{1}{2}a}.$$

Beim Dihexaëder ist

$$O = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{1}{4}\cos.^2 \frac{1}{2}A}}{\cos.^2 \frac{1}{2}A}$$

$$O_1 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{1}{4}\cos.^2 \frac{1}{2}A_1}}{\cos.^2 \frac{1}{2}A_1};$$

oder da

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_1 = \sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot \cot. \tfrac{1}{2}A:$$

$$O_1 = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{1-3\cot.^2 \frac{1}{2}A}}{3\cot.^2 \frac{1}{2}A};$$

folglich

$$\frac{O_1}{O} = \tfrac{4}{3} \sin. \tfrac{1}{2}A = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \cos. \frac{1}{2}a}.$$

Der allgemeine Ausdruck für diese drei Formeln ist folgender:

$$\frac{O_1}{O} = \frac{\sin. \frac{1}{2}A}{\cos.^2 \frac{180°}{n}} = \frac{1}{\cos. \frac{180°}{n} \cdot \cos. \frac{1}{2}a} = \frac{\sin. i}{\sin. i_1 \cos.^2 \frac{1}{2}\frac{180°}{n}}.$$

Zusammenstellund der eben entwickelten Formeln.

Beim Rhomboëder.		BeimQuadratoctaëder	Beim Dihexaëder.
$\frac{\text{tg. } r}{\text{tg. } r_1} = \frac{\text{tg. } i}{\text{tg. } i_1}$	$= \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$\frac{\cos. \frac{1}{2}A_1}{\cos. r}$	$= \sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg. } \frac{1}{2}A \cos. \frac{1}{2}A_1$	$= \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$\sin. \frac{1}{2}a \cot. \frac{1}{2}a_1$	$= \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$\frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\sin. i_1}$	$= \sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{K_1}{K}$	$= 4$	2	$\frac{1}{3}$
$\frac{O_1}{O}$	$= 4 \sin. \frac{1}{2}A$	$2 \sin. \frac{1}{2}A$	$\frac{1}{3} \cdot \sin. \frac{1}{2}A$

53. Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, wie sich eine ganze Reihe von Rhomboëdern, Octaëdern und Dihexaëdern, einer aus dem andern, entwickelt, wie die nächst stumpferen durch Abstumpfung der Kanten der Grundform, die nächst schärferen durch Abstumpfung ihrer Ecken entstehen. Wir haben eben gesehen, wie man die Stücke der nächst stumpferen Körper aus den Stücken der Grundform berechnen kann; die umgekehrte Operation giebt die Formeln zur Berechnung der nächst schärferen Körper. Bezeichnen wir die Stücke des nächst schärferen Körpers durch den Exponenten — 1 am Fusse der gewählten Buchstaben, so brauchen wir nur in den Formeln der obigen Tafel den Exponenten 1 weg zu lassen, und an diejenigen Buchstaben, die keinen Exponenten haben, den Exponenten — 1 anzuhängen; so haben wir die Formeln, die den Zusammenhang der Stücke der Grundform und des nächstschärferen Körpers geben. So ist z. B. fürs Rhomboëder $\frac{\text{tg. } r_{-1}}{\text{tg. } r} = \frac{1}{2}$, $\frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\cos. r_{-1}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ und so fort.

Jetzt wollen wir das Verhältniss der Grundform zum 2ten, 3ten, 4ten . . . . m^{ten} stumpferen Körper kennen lernen. So wie wir dem ersten stumpferen Körper den Exponenten 1 gaben, so wollen wir den nachfolgenden stumpferen Körpern die Exponenten 2, 3, 4 . . . . m geben.

Es ist klar, dass sich A_2 zu A_1, a_2 zu a_1, r_2 zu r_1 etc. eben so verhält, wie A_1 zu A, a_1 zu a, r_1 zu r etc. Im Allgemeinen, es werden die in der obigen Tafel angegebenen Formeln immer wahr bleiben, wenn man die Exponenten der Buchstaben alle um dieselbe Zahl vermehrt; also:

$$\frac{tg.\,r}{tg.r_1} = \frac{tg.r_1}{tg.r_2} = \frac{tg.r_2}{tg.r_3} = \frac{tg.r_n}{tg.r_{n+1}}$$

und so fort mit allen übrigen Gleichungen, welche in der Tafel enthalten sind.

Wir haben also:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A_2 = \cos.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.\tfrac{1}{2}A_1;$$

da $\cos.\frac{1}{2}A_1 = \cos.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.\frac{1}{2}A$, und folglich

$$\cot.\tfrac{1}{2}A_1 = \frac{\cos.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.\frac{1}{2}A}{\sqrt{(1-\cos.^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.^2\tfrac{1}{2}A)}};$$

so haben wir:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A_2 = \frac{\cos.^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.\frac{1}{2}A}{\sqrt{(1-\cos.^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.^2\tfrac{1}{2}A)}}.$$

Man kann so immer weiter hinaufsteigen. Man findet durch Erhöhung der Exponenten in der eben entwickelten Gleichung:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A_3 = \frac{\cos.^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.\frac{1}{2}A_1}{\sqrt{(1-\cos.^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \cot.^2\tfrac{1}{2}A_1)}};$$

hierin den Werth von $\cot. \frac{1}{2}A_1 =$ gesetzt, giebt:

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_3 = \frac{\cos.^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(1 - \cos.^2 \frac{180^\circ}{n} \cot.^2 \frac{1}{2}A\left(1 + \cos.^2 \frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}.$$

Geht man so immer weiter hinauf, so findet man:

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_4 = \frac{\cos.^4 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(1 - \cos.^2 \frac{180^\circ}{n} \cot.^2 \frac{1}{2}A\left(1 + \cos.^2 \frac{180^\circ}{n} + \cos.^4 \frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}$$

und endlich

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_m = \frac{\cos.^m \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(1 - \cos.^2 \frac{180^\circ}{n} \cot.^2 \frac{1}{2}A\left(1 + \cos.^2 \frac{180^\circ}{n} + \cos.^4 \frac{180^\circ}{n} + \cdots + \cos.^{2(m-2)} \frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}$$

oder da

$$1 + \cos.^2 \frac{180^\circ}{n} + \cos.^4 \frac{180^\circ}{n} + \cos.^6 \frac{180^\circ}{n} + \cdots + \cos.^{2(m-2)} \frac{180^\circ}{n} = \frac{1 - \cos.^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n}}{1 - \cos.^2 \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_m = \frac{\cos.^m \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(1 - \cot.^2 \frac{180^\circ}{n} \cot.^2 \frac{1}{2}A\left(1 - \cos.^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}.$$

Man findet hieraus auch

$$\cot. \tfrac{1}{2}A = \frac{\cos. \frac{1}{2}A_m}{\sqrt{\left(\cos.^{2m} \frac{180^\circ}{n} + \cot.^2 \frac{180^\circ}{n}\left(1 - \cos.^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n}\right) \cos.^2 \tfrac{1}{2}A_m\right)}}.$$

Man kann dieser Gleichung auch folgende Form geben:

$$\cot. \tfrac{1}{2}A_{-m} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(\cos.^{2m} \frac{180^\circ}{n} + \cot.^2 \frac{180^\circ}{n} \cos.^2 \tfrac{1}{2}A_m \left(1 - \cos.^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}.$$

Man findet auf dieselbe Art den Zusammenhang zwischen den Werthen der ebenen Winkel an der Spitze der abgeleiteten Formen und dem Werthe des ebenen Winkels an der primären Form. Wir wissen nämlich schon, dass

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_1 = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\text{cos. } \frac{180^\circ}{n}}$$

folglich

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}a_1 = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a + \text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n}}};$$

und eben so:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_2 = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a_1}{\text{cos. } \frac{180^\circ}{n}}.$$

Aus der Combination dieser beiden Gleichungen findet man:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_2 = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\text{cos. } \frac{180^\circ}{n}\sqrt{\text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n} + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a}}.$$

In dieser Gleichung kann man wieder a_3 statt a_2 und a_1 statt a setzen, und hat alsdann

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_3 = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a_1}{\text{cos. } \frac{180^\circ}{n}\sqrt{\text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n} + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a_1}}$$

$$= \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\text{cos. } \frac{180^\circ}{n}\sqrt{(\text{cos.}^4 \frac{180^\circ}{n} + \text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a)}}$$

Eben so findet man

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_4 = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\text{cos. } \frac{180^\circ}{n}\sqrt{(\text{cos.}^6 \frac{180^\circ}{n} + \text{cos.}^4 \frac{180^\circ}{n} \text{ sin.}^2 \tfrac{1}{2}a + \text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n} \text{ sin.}^2 \tfrac{1}{2}a + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a)}}$$

und im Allgemeinen

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_m = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\text{cs. } \frac{180^\circ}{n}\sqrt{\left(\text{cs.}^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n} + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a(\text{cs.}^{2(m-2)} \frac{180^\circ}{n} + \text{cs.}^{2(m-3)} \frac{180^\circ}{n} + \cdots + 1)\right)}}$$

oder weil

$$1 + \text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n} + \text{cos.}^4 \frac{180^\circ}{n} + \text{cos.}^6 \frac{180^\circ}{n} + \cdots + \text{cos.}^{2(m-2)} \frac{180^\circ}{n} = \frac{1 - \text{cos.}^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n}}{1 - \text{cos.}^2 \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}a_m = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}a}{\text{cot. } \frac{180^\circ}{n}\sqrt{\left(\text{cos.}^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n} \cdot \text{sin.}^2 \frac{180^\circ}{n} + \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}a\left(1 - \text{cos.}^{2(m-1)} \frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}.$$

[illegible] Weise, durch ein umgekehrtes Verfahren, findet man

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}A_{-n} = \frac{\cos.^{m}\frac{180^\circ}{n} \cdot \text{tg. } \tfrac{1}{2}a}{1 - \text{tg.}^2\tfrac{1}{2}a \cot.^2\frac{180^\circ}{n}\left(1 - \cos.^{2}\frac{180^\circ}{n} + \cos.^{4}\frac{180^\circ}{n} - \cos.^{6}\frac{180^\circ}{n} + \cdots + \cos.^{2(m-1)}\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

$$= \frac{\cos.^{m}\frac{180^\circ}{n} \cdot \text{tg. } \tfrac{1}{2}a}{1 - \text{tg.}^2\tfrac{1}{2}a \cot.^2\frac{180^\circ}{n}\left(1 - \cos.^{2(m-1)}\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Einfacher ist das Verhältniss von tg. r zu tg. r_m und von tg.

Wir hatten oben

$$\frac{\text{tg. } i}{\text{tg. } i_1} = \frac{\text{tg. } r}{\text{tg. } r_1} = \cos.\frac{180^\circ}{n}$$

also auch

$$\frac{\text{tg. } i_1}{\text{tg. } i_2} = \frac{\text{tg. } r_1}{\text{tg. } r_2} = \cos.\frac{180^\circ}{n}$$

folglich

$$\frac{\text{tg. } i}{\text{tg. } i_2} = \frac{\text{tg. } r}{\text{tg. } r_2} = \cos.^2\frac{180^\circ}{n}$$

und allgemein

$$\frac{\text{tg. } i}{\text{tg. } i_m} = \frac{\text{tg. } r}{\text{tg. } r_m} = \cos.^m\frac{180^\circ}{n}$$

und eben so

$$\frac{\text{tg. } i_{-m}}{\text{tg. } i} = \frac{\text{tg. } r_{-m}}{\text{tg. } r} = \cos.^m\frac{180^\circ}{n}.$$

Vermöge dieser Formel lassen sich aus A und a die Werthe von A_m, a_m, A_{-m}, a_{-m} viel leichter mittelbar berechnen, als durch die directen Formeln.

Die Gleichung (g), in der 50sten Nummer, giebt uns

$$\text{tg. } r \cdot \cos.\tfrac{1}{2}A = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a$$

$$\text{tg. } r_m \cdot \cos.\tfrac{1}{2}A_m = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a_m.$$

Hieraus folgt, da $\frac{\text{tg. } r}{\text{tg. } r_m} = \cos.^m \frac{180°}{n}$:

$$\frac{\text{tg. } \frac{1}{2}a_m}{\text{tg. } \frac{1}{2}a} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A_m}{\cos. \frac{1}{2}A \cdot \cos.^m \frac{180°}{n}}.$$

Eben so findet man aus der Gleichung (10) derselben Nummer

$$\frac{\text{tg. } \frac{1}{2}A_m}{\text{tg. } \frac{1}{2}A} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A_m}{\sin. \frac{1}{2}a \cos.^m \frac{180°}{n}}.$$

Wir haben oben (am Ende der 50sten Nummer) folgende Gleichung gehabt

$$\frac{\sin. i}{\sin. i_1} = \sin. \tfrac{1}{2}A$$

also auch

$$\frac{\sin. i_1}{\sin. i_2} = \sin. \tfrac{1}{2}A_1, \quad \frac{\sin. i_2}{\sin. i_3} = \sin. \tfrac{1}{2}A_2 \text{ und so fort.}$$

Eben so findet man

$$\frac{\cos. i_m}{\cos. i} = \cos. \tfrac{1}{2}a \cdot \cos. \tfrac{1}{2}a_1 \cdot \cos. \tfrac{1}{2}a_2 \cdot \cos. \tfrac{1}{2}a_3 \cdots \cos. \tfrac{1}{2}a_{m-1}.$$

Zusammenstellung der eben entwickelten Formeln.

$$\cos. \tfrac{1}{2}A_m \begin{cases} = \dfrac{\cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{2\left(4^{m-1} - \cot.^2 \frac{1}{2}A\left(\frac{4^{m-1}-1}{3}\right)\right)}} & \text{beim Rhomboëder.} \\ = \dfrac{\cot. \frac{1}{2}A}{\sqrt{2}\sqrt{\left(2^{m-1} - \cot.^2 \frac{1}{2}A(2^{m-1}-1)\right)}} & \text{beim Quadratoctaëder.} \\ = \dfrac{3^{\frac{m}{2}} \cot.^1 A}{2\sqrt{\left(4^{m-1} - 3\cot.^2 \frac{1}{2}A\,(4^{m-1}-3^{m-1})\right)}} & \text{beim Dihexaëder.} \end{cases}$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}A_m \begin{cases} = \dfrac{2^m \sqrt{3} \cos. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(3+4\left(2^{2(m-1)}-1\right)\cos.^2 \frac{1}{2}A\right)}} & \text{beim Rhomboëder.} \\ = \dfrac{2^{\frac{m}{2}} \cos. \frac{1}{2}A}{\sqrt{\left(1+2\left(2^{m-1}-1\right)\cos.^2 \frac{1}{2}A\right)}} & \text{beim Quadratoctaëder.} \\ = \dfrac{2^m \cdot \cos. \frac{1}{2}A}{\sqrt{3}\sqrt{\left(3^{m-1}+4(4^{m-1}-3^{m-1})\cos.^2 \frac{1}{2}A\right)}} & \text{beim Dihexaëder.} \end{cases}$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a_m \begin{cases} = \dfrac{2^m \sqrt{3} \cdot \sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(3+4(2^{2(m-1)}-1)\sin.^2\tfrac{1}{2}a}} & \text{beim Rhomboëder.} \\ = \dfrac{2^{\frac{m}{2}} \sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(1+2(2^{m-1}-1)\sin.^2\tfrac{1}{2}a)}} & \text{beim Quadratoctaëder.} \\ = \dfrac{2^m \sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{3}\sqrt{(3^{m-1}+4(4^{m-1}-3^{m-1})\sin.^2\tfrac{1}{2}a}} & \text{beim Dihexaëder.} \end{cases}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}a_{-m} \begin{cases} = \dfrac{\text{tg.}\tfrac{1}{2}a}{2\sqrt{(4^{m-1} - \text{tg.}^2\tfrac{1}{2}a(\frac{4^{m-1}-1}{3}))}} & \text{beim Rhomboëder.} \\ = \dfrac{\text{tg.}\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{2}\sqrt{(2^{m-1} - \text{tg.}^2\tfrac{1}{2}A(2^{m-1}-1))}} & \text{beim Quadratoctaëder.} \\ = \dfrac{3^{\frac{m}{2}} \text{tg.}\tfrac{1}{2}a}{2\sqrt{(4^{m-1} - 3\,\text{tg.}^2\tfrac{1}{2}a(4^{m-1}-3^{m-1}))}} & \text{beim Dihexaëder.} \end{cases}$$

$$\frac{\text{tg.}\,i}{\text{tg.}\,i_m} = \frac{\text{tg.}\,r}{\text{tg.}\,r_m} = \frac{\text{tg.}\,i_{-m}}{\text{tg.}\,i} = \frac{\text{tg.}\,r_{-m}}{\text{tg.}\,r} \begin{cases} (\tfrac{1}{2})^m & \text{beim Rhomboëder.} \\ (\tfrac{1}{2})^{\frac{m}{2}} & \text{beim Quadratoctaëder.} \\ (\tfrac{3}{4})^{\frac{m}{2}} & \text{beim Dihexaëder.} \end{cases}$$

Aus diesen Werthen von tg. r und tg. r_m, lässt sich das Verhältniss von K und K_m, d. h. von den körperlichen Inhalten der Grundform und des m^{ten} stumpferen Körpers, die halbe Axe gleich 1 gesetzt, leicht finden. Man hat

$$\frac{K}{K_m} = \frac{K_{-m}}{K} = \cos.^{2m}\frac{180^\circ}{n} \quad \cdots\cdots (\alpha).$$

Das Verhältniss der Oberflächen der von einander abgeleiteten Körper ist nicht so einfach. Wir haben aus dem Vorigen

$$\frac{O_1}{O} = \frac{1}{\cos.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\tfrac{1}{2}a}$$

und eben so

$$\frac{O_2}{O_1} = \frac{1}{\cos.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\tfrac{1}{2}a_1}$$

oder da $\text{tg.}\frac{1}{2}a_1 = \frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$, also $\cos.^2\frac{1}{2}a_1 = \frac{\cos.^2\frac{180^\circ}{n}}{\cos.^2\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a}$:

$$\frac{O_2^2}{O_1^2} = \frac{\cos.^2\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a}{\cos.^4\frac{180^\circ}{n}}$$

und

$$\frac{O_2}{O} = \frac{\sqrt{(\cos.^2\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a)}}{\cos.^3\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\frac{1}{2}a}.$$

Aus dieser letzten Formel folgt:

$$\frac{O_3}{O_1} = \frac{\sqrt{(\cos.^2\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a_1)}}{\cos.^3\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\frac{1}{2}a}$$

$$= \frac{\sqrt{(\cos.^4\frac{180^\circ}{n} + \cos.^2\frac{180^\circ}{n}\sin.^2\frac{1}{2}a + \sin.^2\frac{1}{2}a)}}{\cos.^4\frac{180^\circ}{n}},$$

folglich

$$\frac{O_3}{O} = \frac{\sqrt{(\cos.^4\frac{180^\circ}{n} + \cos.^2\frac{180^\circ}{n}\sin.^2\frac{1}{2}a + \sin.^2\frac{1}{2}a)}}{\cos.^5\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\frac{1}{2}a}.$$

Und wir haben im Allgemeinen

$$\frac{O_m}{O} = \frac{\sqrt{\left(\cos.^{2(m-1)}\frac{180^\circ}{n} \cdot \sin.^2\frac{1}{2}a\left(\cos.^{2(m-2)}\frac{180^\circ}{n} + \cos.^{2(m-3)}\frac{180^\circ}{n} + \cdots + 1\right)\right)}}{\cos.^{2m-1}\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\frac{1}{2}a}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\cos.^{2(m-1)}\frac{180^\circ}{n} \cdot \sin.^2\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a\left(1 - \cos.^{2(m-1)}\frac{180^\circ}{n}\right)\right)}}{\sin.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.^{2m-1}\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\frac{1}{2}a}.$$

Vergleicht man den Werth von $\frac{O_m}{O}$ mit dem oben entwickelten Werthe von $\text{tg.}\frac{1}{2}a_m$, so findet man

$$(\beta)\quad \frac{O_m}{O} = \frac{\text{tg. } \frac{1}{2}a}{\cos.^{2m}\frac{180^\circ}{n} \cdot \text{tg. } \frac{1}{2}a_m} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\cos.^{m}\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos. \frac{1}{2}A_m} = \frac{\sin. i}{\cos.^{2m}\frac{180^\circ}{n} \cdot \sin. i_m}.$$

Es giebt noch eine Formel, die den Zusammenhang der Oberflächen mehrerer aufeinander folgenden Körper giebt. Man kann sie auf folgende Weise entwickeln.

Wir hatten

$$\frac{O^2}{O^2_m} = \frac{\cos.^{2(m-1)}\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a\left(\cos.^{2(m-2)}\frac{180^\circ}{n} + \cos.^{2(m-3)}\frac{180^\circ}{n} + \cdots + 1\right)}{\cos.^{4m-2}\frac{180^\circ}{n}\cos.^2\frac{1}{2}a}$$

und eben so

$$\frac{O^2}{O^2_{m-1}} = \frac{\cos.^{2(m-2)}\frac{180^\circ}{n} + \sin.^2\frac{1}{2}a\left(\cos.^{2(m-3)}\frac{180^\circ}{n} + \cos.^{2(m-4)}\frac{180^\circ}{n} + \cdots + 1\right)}{\cos.^{4m-6}\frac{180^\circ}{n}\cos.^2\frac{1}{2}a}$$

Substituirt man in diesen beiden Gleichungen die aus der Gleichung

$$\frac{O_1}{O} = \frac{1}{\cos.\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos.\frac{1}{2}a}$$

hervorgehenden Werthe von $\cos.^2\frac{1}{2}a$ und $\sin.^2\frac{1}{2}a$, und combinirt sie alsdann, so findet man leicht

$$O^2_m = \frac{O^2_{m-1}\cos.^{4(m-1)}\frac{180^\circ}{n} + O^2_1\cos.^2\frac{180^\circ}{n} - O^2}{\cos.^{4m-2}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Aus der Combination der Gleichungen (α) und (β) erhält man die merkwürdige Proportion

$$\frac{A}{O} : \frac{A_m}{O_m} = \sin. i : \sin. i_m.$$

Wir wollen jetzt noch das Verhältniss der Spitzenwerthe mehrerer aufeinander folgender Formen untersuchen.

Beim Rhomboëder ist

$$\sin. E_1 = \frac{3\sqrt{3} \cdot K \cdot \cos.^{\frac{1}{2}} A}{4}$$

und eben so

$$\sin. E_1 = \frac{3\sqrt{3} \cdot K_1 \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A_1}{4}$$

also

$$\frac{\sin. E_1}{\sin. E} = \frac{K_1 \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A_1}{K \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A}$$

oder da

$$\frac{K_1}{K} = 4 :$$

$$\frac{\sin. E_1}{\sin. E} = \frac{4 \cos.^{\frac{3}{2}} A_1}{\cos.^{\frac{3}{2}} A}.$$

Dieser Gleichung kann man, da $\frac{\cos.^{\frac{1}{2}} A_1}{\cos.^{\frac{1}{2}} A} = \frac{2 \cdot O}{O_1}$, auch folgende Form geben:

$$\frac{\sin. E_1}{\sin. E} = 32 \cdot \frac{O^3}{O_1^3}.$$

Man findet überhaupt ganz allgemein

$$\frac{\sin. E_m}{\sin. E} = \frac{K_m \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A_m}{K \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A},$$

oder da $\frac{K_m}{K} = 4^m$

$$\frac{\sin. E_m}{\sin. E} = 4^m \cdot \frac{\cos.^{\frac{3}{2}} A_m}{\cos.^{\frac{3}{2}} A} = 2^{5m} \cdot \frac{O^3}{O_m^3}.$$

Da ferner fürs Rhomboëder

$$\frac{O}{O_m} = \frac{\sin. i_m}{2^{2m} \sin. i}$$

so ist auch

$$\frac{\sin. E_m}{\sin. E} = \frac{\sin.^3 i_m}{2^m \cdot \sin.^3 i}.$$

Beim Quadratoctaëder ist eben so:

$$\frac{\sin. E_m}{\sin. E} = \frac{K_m \cdot \sin.^{\frac{1}{2}} A_m \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A_m}{K \cdot \sin.^{\frac{1}{2}} A \cdot \cos.^{\frac{3}{2}} A}$$

$$= 2^{5m} \cdot \frac{\sin.^{\frac{1}{2}} A_m \cdot O^3}{\sin.^{\frac{1}{2}} A \cdot O_m^3}$$

oder da

$$\frac{O}{O_m} = \frac{\sin.i_m}{2^m \cdot \sin.i}$$

$$\frac{\sin.E_m}{\sin.E} = \frac{\sin.\frac{1}{2}A_m \cdot \sin.^2 i_m}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \sin.\frac{1}{2}A \cdot \sin.^3 i}.$$

Beim Dihexaëder ist

$$\frac{\text{ssn.}\frac{1}{2}E_m}{\sin.\frac{1}{2}E} = \frac{K_m \cdot \sin.\frac{1}{2}A_m \cdot \cos.^2\frac{1}{2}A_m}{K \cdot \sin.\frac{1}{2}A \cdot \cos.^2\frac{1}{2}A}$$

$$= \left(\tfrac{4}{3}\right)^{2m} \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}A_m \cdot O^2}{\sin.\frac{1}{2}A \cdot O_m^2}$$

oder da $\frac{O}{O_m} = \frac{\sin.i_m}{(\frac{4}{3})^m \cdot \sin.i}$,

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}E_m}{\sin.\frac{1}{2}E} = \frac{\sin.\frac{1}{2}A_m \cdot \sin.^2 i_m}{\text{siu.}\frac{1}{2}A \cdot \sin.^2 i}$$

$$= \frac{\sin.r \cdot \sin.^3 i_m}{\sin.r_m \cdot \sin.^3 i}.$$

Zusammemstellung der entwickelten Formeln.

	Beim Rhomboëder.	BeimQuadratoctaëder	Beim Dihexaëder.
$\frac{K_m}{K} =$	4^m	2^m	$\left(\frac{4}{3}\right)^m$
$\frac{O_m}{O} =$	$\frac{4^m \cdot \sin.i}{\sin.i_m}$	$\frac{2^m \cdot \sin.i}{\sin.i_m}$	$\frac{4^m \cdot \sin.i}{3^m \cdot \sin.i_m}$
$O_2^2 =$	$4(3O_1^2 - 16O^2)$	$2(3O_1^2 - 4O^2)$	$\frac{4}{27}(21O_1^2 - 16O^2)$
$\frac{\sin.E_m}{\sin.E} =$	$\frac{\sin.^3 i_m}{2^m \cdot \sin.^3 i}$	$\frac{\sin.^3 i_m \cdot \sin.\frac{1}{2}A_m}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \sin.^3 i \cdot \sin.\frac{1}{2}A}$	——
$\frac{\sin.\frac{1}{2}E_m}{\sin.\frac{1}{2}E} =$	——	——	$\frac{\sin.^2 i_m \cdot \sin.\frac{1}{2}A_m}{\sin.^2 i \cdot \sin.\frac{1}{2}A}$

Vom Rhomboëder insbesondere.

54. Ausser den Flächen, welche durch die grade Abstumpfung der Endkanten des Rhomboëders entstehen, giebt es noch andere, welche als Zuschärfungen der Endkanten und der Basiskanten desselben erscheinen.

Es sey *t*, Fig. 94, eine solche Fläche, die die Endkante des Rhomboëders zuschärft. Es ist klar, dass wenn diese Zusehärfungen an allen Endkanten wiederholt werden, zwölf Flächen entstehen, die, bis zum Durchschnitt verlängert, einen Körper begrenzen, den man, in Bezug auf seine zwölf Flächen, Dihexaëder nennen kann, der sich aber gewöhnlich von dem eigentlichen (gleichschenklichten) Dihexaëder, von dem bisher die Rede gewesen ist, dadurch unterscheidet, dass die Neigungen der Flächen nur an den abwechselnden Endkanten, nicht an den benachbarten, einander gleich sind, und dass die Kanten an der Basis im Zikzak liegen. Es ist der Drei- und Dreikantner zweiter Art nach Weiss's Benennung, oder das ungleichschenklichte Dihexaëder. Man erkennt die rhomboëdrische Abstammung dieses Körpers leicht daran, dass, wenn man ihn so hinstellt, dass die Axe horizontal liegt, das Rechts und Links einander nicht gleich ist; von der Ecke an der Basis, von welcher rechts hin eine stumpfere Endkante ausläuft, läuft links eine schärfere hin und umgekehrt; diese Regel findet nur bei einem Körper eine Ausnahme, bei welchem alle Endkanten einander gleich sind und der nur der Abstammung nach zu diesen Körpern gehört.

In der Fig. 94 ist ein solches ungleichschenklichtes Dihexaëder so abgebildet, wie es mit dem Grundrhomboëder zusammen hängt; die Flächen

des Grundrhomboëders sind gestrichelt, die des Dihexaëders hat man weiss gelassen. Wir wissen aus den vorigen Abschnitten, dass die Fläche t von der Form $\overset{B}{x}$ nach Haüys Bezeichnung, oder mPx nach der meinigen, oder $\left|\begin{matrix}\delta c \\ \alpha a : \beta a : \gamma a\end{matrix}\right|$ nach der Weissischen Bezeichnung ist; wir wissen ferner, dass die Tangente der halben Neigung von t zu t m Mal oder $\frac{x+1}{x-1}$ Mal so gross ist, als die Tangente der halben Neigung der Grundrhomboëderflächen P an den Endkanten.

Man bezeiche also den Neigungswinkel t zu t mit B, den Neigungswinkel von t zu t' mit C; den ebenen Winkel an der Spitze des ungleichschenklichten Dihexaëders mit b, die beiden ebnen Winkel an der Basis mit c und d, nämlich mit c denjenigen, der an der Verlängerung der Endkante des Grundrhomboëders liegt, und mit d den andern, so wie es in der Figur angegeben ist; der Neigungswinkel von t zu t'' endlich sey D; aus dem Vorhergehenden kennen wir schon die Bedeutung von A und a, von welchen A den Neigungswinkel der Flächen des Grundrhomboëders an den Endkanten, und a den ebenen Winkel an der Spitze desselben bezeichnet. Es ist leicht, den Zusammenhang aller dieser Stücke zu finden.

1°. Aus dem eben angedeuteten Zusammenhang dieses ungleichschenklichten Dihexaëders mit dem Grundrhomboëder haben wir:

$$(1) \quad \text{tg. } \tfrac{1}{2}B = m \text{ tg. } \tfrac{1}{2}A.$$

2°. Wenn man durch die Endkante k des ungleichschenklichten Dihexaëders, die nicht mit der Endkante des Grundrhomboëders zusammenfällt, und durch die Axe des Grundrhomboëders eine Ebene legt, so steht

diese auf der Rhomboëderfläche senkrecht und halbirt ihren ebenen Winkel a an der Spitze.

Mit der Fläche t und der Fläche P (P ist die darunter liegende Fläche des Grundrhomboëders) bildet diese Ebene eine Ecke oder ein sphärisches Dreieck, an der Spitze des Rhomboëders, welches rechtwinklicht ist: es ist Fig. 95 abgebildet; r' bedeutet die Neigung der Endkante des ungleichschenklichten Dihexaëders, die nicht mit der Endkante des Grundrhomboëders zusammenfällt, gegen die Axe, $r' - i$ also die Neigung derselben Endkante gegen die Fläche des Grundrhomboëders; denn i ist, nach der in den vorigen Abschnitten angenommenen Bezeichnung, die Neigung der Rhomboëderfläche gegen die Axe.

Wenn man dieses sphärische Dreieck der Rechnung zum Grunde legt, so findet man, nach den in der Einleitung (Nr. 10) gegebenen Formeln, fürs rechtwinklichte sphärische Dreieck:

(2) $\cos. b = \cos. (r' - i) \cos. \frac{1}{2}a.$

(3) $\cos. b \operatorname{tg}. \frac{1}{2}(B - A) \operatorname{tg}. \frac{1}{2}C = 1.$

(4) $\sin. b \sin. \frac{1}{2}(B - A) = \sin. (r' - i).$

(5) $\sin. b \sin. \frac{1}{2}C = \sin. \frac{1}{2}a.$

(6) $\operatorname{tg}. b \cos. \frac{1}{2}(B - A) = \operatorname{tg}. \frac{1}{2}a.$

(7) $\operatorname{tg}. b \cos. \frac{1}{2}C = \operatorname{tg}. (r' - i).$

(8) $\operatorname{tg}. \frac{1}{2}(B - A) \sin. \frac{1}{2}a = \operatorname{tg}. (r' - i).$

(9) $\operatorname{tg}. \frac{1}{2}C \sin. (r' - i) = \operatorname{tg}. \frac{1}{2}a.$

(10) $\sin. \frac{1}{2}(B - A) \cos. \frac{1}{2}a = \cos. \frac{1}{2}C,$

(11) $\sin. \frac{1}{2}C \cos. (r' - i) = \cos. \frac{1}{2}(B - A).$

Diese Formeln enthalten alle möglichen Fälle, und bedürfen nur einer gehörigen Umformung für unsern Zweck.

Wenn man in der Gleichung (10)

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}a = \frac{1}{2\sin.\frac{1}{2}A}$$

setzt, wie aus dem Vorhergehenden bekannt ist, so hat man

$$(12)\quad \cos.\ \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-A)}{2\sin.\frac{1}{2}A}.$$

Diese Formel ist bequem, C aus B und A zu berechnen; weiss man bloss A, so berechnet man erst vermöge der Formel (1) B aus A. Will man umgekehrt A aus C berechnen, so hat man, wenn man das zweite Glied der Gleichung (12) entwickelt

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(\sin.\ \tfrac{1}{2}B \cdot \cot.\ \tfrac{1}{2}A - \cos.\ \tfrac{1}{2}B)$$

oder da nach (1) $\cot.\ \frac{1}{2}A = m \cot.\ \frac{1}{2}B$

$$(13)\quad \cos.\ \tfrac{1}{2}C = \cos.\ \tfrac{1}{2}B \cdot \frac{(m-1)}{2}.$$

Will man sich der Haüyschen Bestimmungen bedienen, so hat man, da $m = \frac{x+1}{x-1}$ ist:

$$(13_a)\quad \cos.\ \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{x-1} \cdot \cos.\ \tfrac{1}{2}B.$$

Es ist nachher leicht, vermöge der Formel (1) aus B den Winkel A zu berechnen.

Die beiden letzten Formeln offenbaren uns ein merkwürdiges Gesetz; dass nämlich die Cosinusse der halben Neigungswinkeln der Flächen des ungleichschenklichten Dihexaëders, an den Endkanten, in einem rationalen Verhältniss zu einander stehen.

Setzt man ferner in denselben $B = C$, so hat man

$$m = 3$$

oder $x = 2$;

diese Werthe von m oder x geben also ein Dihexaëder, dessen Neigungswinkel an den Endkanten einander gleich sind, oder ein wahres gleichschenklichtes Dihexaëder.

Ehe wir uns an die Formeln wenden, die $r' - i$ enthalten, wollen wir untersuchen, wie diese beiden Grössen untereinander zusammen hängen. Ebenen, die man durch zwei benachbarte Endkanten des ungleichschenklichten Dihexaëders und durch die Axe legt, machen an der Axe einen Winkel von 60° mit einander. Dieser Winkel bildet mit den Winkeln $\frac{1}{2}B$ und $\frac{1}{2}C$ ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel eben diese 60°, $\frac{1}{2}B$ und $\frac{1}{2}C$, dessen Seiten aber r *), b und r' sind, und in welchem offenbar (s. Fig. 96) nach der IV^ten allgemeinen Formel für die sphärischen Dreiecke, die in der Einleitung gegeben ist:

$$\cos. {}^{1}C = -\cos. 60° \cdot \cos. \tfrac{1}{2}B + \sin. 60° \cdot \sin. \tfrac{1}{2}B \cdot \cos. r$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}B = -\cos. 60° \cdot \cos. \tfrac{1}{2}C + \sin. 60° \cdot \sin. \tfrac{1}{2}C \cdot \cos. r'.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\cos. 60° = \frac{1}{2}$, $\cos. \frac{1}{2}C = \frac{m-1}{2} \cos. \frac{1}{2}B$, und endlich $\sin. \frac{1}{2}B = \sin. \frac{1}{2}C \cdot \frac{\sin. r'}{\sin. r}$ (vermöge der I^sten allgemeinen Formel für sphärische Dreiecke), so findet man zwei neue Gleichungen, aus denen man $\sin. \frac{1}{2}C$ eliminiren kann. So findet man endlich

$$\frac{\cot. r'}{\cot. r} = \frac{m+3}{2m}$$

oder wenn man sich der Haüyschen Bezeichnung bedienen will

$$\frac{\cot. r'}{\cot. r} = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Da $\cot. r = \frac{1}{2} \cot. i$, so hat man auch

$$(14) \quad \cot. r' = \frac{(m+3)}{4m} \cdot \cot. i.$$

---

*) r ist die Neigung der Endkante des Grundrhomboëders gegen die Axe.

Wir kehren jetzt zu unsern ersten Formeln zurück. Die 9te kann man auf folgende Weise umformen.

Da beim Rhomboëder tg. $\frac{1}{2}a = \sqrt{3}$ sin. i, so hat man erst

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}C \cdot \text{sin. } (r' - i) = \sqrt{3} \text{ sin. } i.$$

Entwickelt man das erste Glied dieser Gleichung und setzt für cot. i seinen eben gefundenen Werth, so findet man:

$$(15)\quad \text{cos. } r' = \frac{(m+3)}{\sqrt{3}(m-1)} \cdot \text{cot. } \tfrac{1}{2}C.$$

Diese Formeln sind hinreichend, um alle Stücke des ungleichschenklichten Dihexaëders aus den Stücken des Kernrhomboëders, und umgekehrt, direct oder indirect, zu finden. Es bleibt uns noch übrig, den Zusammenhang der übrigen Stücke des ungleichschenklichten Dihexaëders unter einander zu finden. Wir können dazu wieder die Fig. 96 brauchen. Wir haben offenbar, nach den in der Einleitung gegebenen Formeln, für alle sphärische Dreiecke:

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(120^\circ + B - C) \text{ cos. } \frac{1}{2}(120^\circ + C - B)}{\text{sin. } \frac{1}{2}B \text{ sin. } \frac{1}{2}C}\right)}.$$

Vermöge dieser Formeln kann man b aus B oder C berechnen, nachdem man vorher, je nachdem B oder C allein gegeben ist, die eine Grösse aus der andern vermöge der Formel (13) gefunden hat.

Um die Neigung der Fläche des ungleichschenklichten Dihexaëders gegen die Axe zu finden, fälle man in dem sphärischen Dreieck Fig. 96 ein Perpendikel aus dem Winkel 60° auf die Seite b; dieses Perpendikel ist offenbar das Maass dieser Neigung.

Bezeichnet man sie mit i', so ist offenbar, nach den Formeln, die das rechtwinklichte sphärische Dreieck betreffen,

$$\sin, i' = \sin. r' \sin. \tfrac{1}{2}C$$
$$= \sin. r \sin. \tfrac{1}{2}B.$$

Um die Winkel an der Basis des ungleichseitigen Dihexaëders zu finden, theilt man eine Ecke an der Basis in zwei Theile, indem man eine Ebene durch die beiden Endkanten des Dihexaëders, die in dieser Ecke zusammen kommen, und durch die Axe legt. Diese Ebene bildet mit den Flächen t, t'' (Fig. 94) eine dreiflächige Ecke oder ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ und D (die Neigung von t zu t''), und dessen Seiten c, d und $180° - (r + r')$ sind. Es ist Fig. 97 besonders vorgestellt. Man kann diese Stücke zugleich finden, wenn man sich der Gaussischen Formeln bedienen will, die in Nr. 12 der Einleitung gegeben sind. Man findet

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(c - d) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}(r + r') \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(C - B)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(C + B)}$$
$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(c + d) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}(r + r') \cdot \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(C - B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(C + B)}.$$

Die Summe der Werthe von $\frac{1}{2}(c - d)$ und $\frac{1}{2}(c + d)$ giebt c, ihre Differenz d. Man kann auch gleich D vermöge der Formel:

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} D = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(r + r') \cdot \text{sin. } \frac{1}{2}(C - B)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(c - a)}$$

berechnen.

Will man den Werth von D allein wissen, so kann man eine weit einfachere Formel auf folgende Weise finden.

Nach der IV^ten Grundformel, mit der Fig. 97 verglichen, haben wir:

$$-\text{cos. } D = \text{cos. } \tfrac{1}{2}B \text{ cos. } \tfrac{1}{2}C + \text{sin. } \tfrac{1}{2}B \text{ sin. } \tfrac{1}{2}C \text{ cos. } (r + r').$$

Entwickelt man das letzte Glied dieser Gleichung, so findet man:

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}B \text{ sin. } \tfrac{1}{2}C \text{ cos. } r' (\text{cos. } r + \text{sin. } r \text{ tg. } r').$$

Setzt man hierin $\frac{2m+r}{m-3}$ für tg. r', $\frac{(m+3)}{3(m-1)}$ cot. $\frac{1}{2}C$ für cos. r', $\frac{m \text{ cot. } \frac{1}{2}B}{\sqrt{3}}$ für cos. r (denn es ist, nach den Formeln fürs Rhomboëder, cos. $r = \frac{\text{cot. } \frac{1}{2}A}{\sqrt{3}}$, und nach der Formel (1) dieser Nummer cot. $\frac{1}{2}A = m$ cot. $\frac{1}{2}B$), und endlich $\frac{m-1}{2}$ cos. $\frac{1}{2}B$ für cos. $\frac{1}{2}C$, so findet man

$$-\text{cos. } D = \text{cos.}^2 \tfrac{1}{2}B \cdot \frac{(m+1)^2}{2} \cdot -1$$

oder da $1 - \text{cos. } D = 2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2}D$

$$(16)\quad \text{sin. } \tfrac{1}{2}D = \frac{(m+1)}{2} \text{ cos. } \tfrac{1}{2}B$$

oder wenn man sich der Haüyschen Bezeichnungen bedienen will:

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}D = \frac{x}{x-1} \cdot \text{cos. } \tfrac{1}{2}B.$$

Wenn man sechs Ebenen durch die Kanten an der Basis des ungleichschenklichten Dihexaëders (Fig. 94) legt, so entsteht offenbar ein Rhomboëder, dass bei weitem stumpfer ist, als das Grundrhomboëder dieser Form.

Um dieses Rhomboëder zu bestimmen, wollen wir erst die Neigung zweier benachbarter Kanten an der Basis des ungleichschenklichten Dihexaëders berechnen; z. B. die Neigung der Kanten, welche die Flächen t und t'', und t' und t''' miteinander machen, oder die Neigung von p zu q. Bezeichnet man diesen Winkel mit l, so ist offenbar, nach der II^ten Grundformel der sphärischen Trigonometrie,

$$\text{cos. } l = \text{cos.}^2 d + \text{sin.}^2 d \text{ cos. } C.$$

Setzt man hierin $1 - 2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2}l$ für cos. l, $1 - \text{sin.}^2 d$ für cos.$^2 d$, und endlich $1 - 2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2}C$ für cos. C, so findet man

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}l = \text{sin. } d \text{ sin. } \tfrac{1}{2}C.$$

Da nun l dem ebenen Winkel an der Spitze des neuen stumpferen Rhomboëders gleich ist, so ist es leicht, vermöge der Formeln fürs Rhomboëder, aus l alle übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Man kann den Zusammenhang dieser beiden Rhomboëder auch directe auf folgende Weise finden. Bezeichnet man die Neigung der Endkante k des ungleichschenklichten Dihexaëders gegen die neue Rhomboëderfläche, die durch die Kanten an der Basis p, q geht, mit ϱ, so ist offenbar

$$\text{tg. } d \cdot \cos. \tfrac{1}{2}C = \text{tg. } \varrho.$$

Nun findet man aber auch, wenn man die III^{te} Grundformel der sphärischen Trigonometrie auf die Fig. 97 anwendet:

$$\text{cot. } d \cdot \sin. (r+r') = \text{cot. } \tfrac{1}{2}B \sin. \tfrac{1}{2}C - \cos. \tfrac{1}{2}C \cos. (r+r');$$

also wenn man den aus dieser Gleichung fliessenden Werth von tg. d in die obige Formel substituirt:

$$\text{tg. } \varrho = \frac{\sin. (r+r') \text{ cot. } \frac{1}{2}C}{\text{cot. } \frac{1}{2}B - \text{cot. } \frac{1}{2}C \cos. (r+r')}.$$

Im zweiten Gliede dieser Gleichung kann man erst $\frac{\text{cot. } \frac{1}{2}A}{m}$ für cot. $\frac{1}{2}B$ setzen; dann substituirt man $\sqrt{3} \cdot \cos. r$ für cot. $\frac{1}{2}A$, und $\frac{\sqrt{3}(m-1)}{(m+3)} \cos. r'$ für cot. $\frac{1}{2}C$. Man findet so:

$$\text{tg. } \varrho = \frac{m \sin. (r+r') (m-1) \cos. r'}{(m+3) \cos. r - m (m-1) \cos. r' \cos. (r+r')}.$$

Entwickelt man das zweite Glied dieser Gleichung, dividirt Zähler und Nenner durch sin. r, und setzt $\frac{2m}{m+3} \cdot \text{cot } r'$ für cot. r, so findet man:

$$\text{tg. } \varrho = \frac{3(m-1)(m+1) \cos. r' \sin. r'}{2(m+3) - 3(m+1)(m-1) \cos.^2 r' + (m-1)(m+3)}.$$

Wenn man sich das ebene Dreieck, welches von zwei Endkanten des Dihexaëders, die in derselben Ecke an der Basis zusammen kommen, und von der Axe eingeschlossen wird, besonders zeichnet, und auch die Durchschnittslinie der Rhomboëderfläche, die durch die Basiskanten p, q geht, mit der Ebene des Dreiecks zieht, wie es Fig. 98 geschehen ist, so sieht man leicht, dass

$$\varrho + r' = \lambda;$$

wo λ die Neigung der neuen Rhomboëderfläche (die durch die Basiskanten p, q geht) gegen die Axe bedeutet.

Da nun

$$\text{tg. } \lambda = \frac{\text{tg. } \varrho + \text{tg. } r'}{1 - \text{tg. } \varrho \cdot \text{tg. } r'}$$

so braucht man nur den oben gefundenen Werth von tg. ϱ in dem zweiten Gliede dieser Gleichung zu substituiren, um den Zusammenhang zwischen r' und λ zu haben.

Man findet auf diese Weise

$$\text{tg. } \lambda = \frac{m+3}{2(3-m)} \cdot \text{tg. } r'$$

oder da $\text{tg. } r' = \frac{2m}{(m+3)} \cdot \text{tg. } r = \frac{4m}{(m+3)} \text{ tg. } i$

$$(17)\quad \text{tg. } \lambda = \frac{m}{3-m} \cdot \text{tg. } r = \frac{2m}{3-m} \text{ tg. } i.$$

So lange C kleiner als B ist, ist auch m kleiner als 3, λ also kleiner als 90°; wenn aber m grösser als 3, oder C grösser als B wird, so wird tg. λ negativ, weil λ alsdann grösser als 90° ist; man nimmt dann das Complement des gefundenen Winkels zu 180°; denn von den zwei Neigungswinkeln, die zwei grade Linien miteinander machen, und die sich zu 180° complimentiren, ist man gewohnt nur den schärferen anzugeben.

Man sieht aus dieser Formel, dass die Tangente der Neigung der Rhomboëderfläche, die durch die Kanten an der Basis p, q des ungleichschenklichten Dihexaëders geht, gegen die Axe ein rationales und ein sehr einfaches Verhältniss zu der Tangente der Neigung der Grundrhomboëderfläche gegen die Axe hat; dass also das neue Rhomboëder allerdings in der Reihe der möglichen Rhomboëder vorkommen kann.

Wenn man sich z. B. das Grundrhomboëder so an den Endkanten zugeschärft denkt, dass die Tangente des halben Neigungswinkels der Zuschärfungsflächen an der zugeschärften Kante doppelt so gross ist, als die halbe Tangente des Neigungswinkels der Grundrhomboëderflächen an derselben Kante, so kann man sich dieselben durch diese Zuschärfung der Endkanten des Grundrhomboëders gebildeten Flächen auch als Zuschärfungsflächen der Kanten an der Basis eines stumpferen Rhomboëders denken, bei welchen die Tangente der Neigung der Flächen gegen die Axe vier Mal so gross ist, als die Tangente der Neigung der Flächen des Grundrhomboëders gegen die Axe: und das ist das zweite stumpfere Rhomboëder.

Man kann sich noch zur Aufgabe machen, das Gesetz zu finden, nach welchem die Fläche des ungleichschenklichten Dihexaëders vom neuen stumpferen Rhomboëder abgeleitet werden kann, an welchem sie die Kanten an der Basis zuschärft; diese Aufgabe kann auf folgende Weise gelöst werden.

Nennt man die Neigung der Endkante des neuen Rhomboëders gegen die Axe ϑ, und, wie bisher, die Neigung der Fläche desselben Rhomboëders gegen die Axe λ, die Neigung der Grundrhomboëderfläche gegen die Axe i, und die Neigung der Endkante des Grundrhomboëders gegen die Axe r, so haben wir im Allgemeinen $\frac{\text{tg. }\vartheta}{\text{tg. }r} = \frac{\text{tg. }\lambda}{\text{tg. }i}$, also nach (17)

$$\text{tg. } \vartheta = \frac{2m}{3-m} \cdot \text{tg. } r.$$

Aus der Neigung ϑ der Endkante des neuen Rhomboëders kann man leicht die Neigung Γ zweier benachbarten Flächen an der Endkante desselben Rhomboëders berechnen; wir haben dafür folgende aus Nr. 49 bekannte Formel:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\Gamma = \sqrt{3} \text{ cos. } \vartheta.$$

Da nun $\cos.^2\vartheta = \frac{1}{1+\text{tg.}^2\vartheta}$, so ist, wenn man hierin erst den eben gefundenen Werth von tg. ϑ substituirt:

$$\cot.^2\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{3(3-m)^2}{(3-m)^2 + 4m^2\,\text{tg.}^2 r}.$$

Nun setze man $\frac{1-\cos.^2 r}{\cos.^2 r}$ für $\text{tg.}^2 r$, dann $\frac{1}{3}\cot.^2\frac{1}{2}A$ für $\cos.^2 r$, und endlich $m\cot.\frac{1}{2}B$ für $\cot.\frac{1}{2}A$, so findet man folgende Gleichung zwischen $\cot.\frac{1}{2}\Gamma$ und $\cot.\frac{1}{2}B$

$$\cot.^2\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{3(3-m)^2\cot.^2\frac{1}{2}B}{\cot.^2\frac{1}{2}B\,(3-m)^2 + 4(3-m^2\cot.^2\frac{1}{2}B)}.$$

Aus der Formel (16) fliesst aber:

$$\cot.^2\tfrac{1}{2}B = \frac{4\sin.^2\frac{1}{2}D}{(m+1)^2 - 4\sin.^2\frac{1}{2}D}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\cot.^2\frac{1}{2}B$ in dem zweiten Gliede der obigen Gleichung, so findet man endlich;

$$\cot.\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{(3+m)}{(m+1)}\cdot\text{tg.}\tfrac{1}{2}D.$$

Nun ist aber $\frac{1}{2}\Gamma$ das Complement des halben Neigungswinkels der Flächen des neuen Rhomboëders an der Basis desselben, zu 90°. Nennt man also diesen letztern Winkel Δ, so ist

$$(18)\quad \frac{\text{tg.}\frac{1}{2}\Delta}{\text{tg.}\frac{1}{2}D} = \frac{3-m}{m+1}.$$

Hieraus sieht man, dass wenn man die Fläche des Grundrhomboëders mit P, die Fläche eines abgeleiteten ungleichschenklichten Dihexaëders mit $m\cdot Px$, die Fläche des neuen Rhomboëders, dessen Kanten an der Basis mit den Kanten an der Basis des ungleichschenklichten Dihexaëders zusammen fallen mit Q oder $P^{\frac{2n}{3-m}}$ bezeichnet:

$$m\cdot Px = \frac{m+1}{3-m}Oz = \frac{m+1}{3-m}\cdot P^{\frac{2m}{3-m}}z$$

oder noch allgemeiner $mP^n x = \frac{m+1}{3-m}\cdot P^{\frac{2mn}{3-m}}z$; und umgekehrt $pP^q x = \frac{3p-1}{p+1}P^{\frac{2q}{3p-1}}x$.

Nimmt m einen solchen Werth an, dass $\frac{2m}{3-m} = 4$, oder $= 16$, oder $= 64$ etc. wird, so wird diese Formel der Ausdruck eines sehr einfachen Gesetzes. Ist z. B. $m = 2$, so ist

$$2Px = 3Qz = 3P^4z,$$

das heisst, die Zuschärfungsfläche der Endkante des Grundrhomboëders, deren halber Zuschärfungswinkel eine doppelt so grosse Tangente hat, als der halbe Neigungswinkel der Grundrhomboëderflächen, erscheint am zweiten stumpferen Rhomboëder als Zuschärfungsfläche der Kante an der Basis, so dass die Tangente des halben Zuschärfungswinkels drei Mal so gross ist, als die Tangente des halben Neigungswinkels der Flächen des zweiten stumpferen Rhomboëders an der Basiskante.

Da die Fläche des ersten stumpferen Rhomboëders die Endkante des Grundrhomboëders, mithin auch die Zuschärfungskante, grade abstumpft, und da das erste stumpfere Rhomboëder das erste schärfere Rhomboëder in Bezug auf das zweite stumpfere Rhomboëder ist, so kann man auch dieses Gesetz so ausdrücken:

„Jedes ungleichschenklichte Dihexaëder, dessen Flächen als Zuschärfungsflächen der Basiskanten irgend eines Rhomboëders erscheinen, so dass die Tangente des halben Zuschärfungswinkels drei Mal so gross ist, als die Tangente der halben Neigung der Rhomboëderflächen an derselben Kante, wird an denjenigen Endkanten, welche mit den Ecken des Rhomboëders zusammentreffen, von den Flächen des ersten schärferen Rhomboëders grade abgestumpft."

Es bleibt uns noch übrig, den körperlichen Inhalt, die Oberfläche und den Spitzenwerth des ungleichschenklichten Dihexaëders zu finden.

Um den körperlichen Inhalt K des ungleichschenklichten Dihexaëders zu finden, legt man erst Ebenen durch seine Basiskanten p, q (s. Fig. 94); diese Ebenen bilden, wie wir eben gesehen haben, ein sehr stumpfes Rhomboëder; über den Flächen dieses Rhomboëders erheben sich, wie man sieht, vierseitige Pyramiden, welche mit dem Rhomboëder zusammen den Totalinhalt des gleichschenklichten Dihexaëders ausmachen. Man kann jede dieser Pyramiden noch in zwei gleiche Theile, das heisst in zwei gleiche dreiseitige Pyramiden theilen, durch einen Schnitt, den man durch die Endkante k des Dihexaëders und durch die Axe führt; diese dreiseitigen Pyramiden werden von der Fläche t, von der Fläche des stumpfen Rhomboëders und von Flächen, die durch die Endkanten k, x des Dihexaëders und die Axe gehen, gebildet.; alle Stücke in denselben sind uns also aus dem Vorhergehenden bekannt. Bezeichnet man den körperlichen Inhalt des stumpfen Rhomboëders, an welchen die Flächen t als Zuschärfungen der Basiskanten erscheinen, mit K', und den körperlichen Inhalt einer solchen dreiseitigen Pyramide mit K'', so ist offenbar

$$K = K' + 12K''.$$

Der körperliche Inhalt K' des stumpfen Rhomboëders ist leicht aus der Neigung λ seiner Flächen gegen die Axe zu finden. Wir haben nämlich, nach den Formeln von Nr. 50,

$$K' = \frac{16 \cdot \operatorname{tg}^2 \lambda}{3\sqrt{3}};$$

wobei die halbe Axe des stumpfen Rhomboëders $= 1$ gesetzt worden ist.

Um den Inhalt K'' der dreiseitigen Pyramide zu berechnen, fälle man erst ein Perpendikel u aus der Spitze des ungleichschenklichten Dihexaëders auf die Verlängerung der Fläche des stumpfen Rhomboëders; dieses Perpen-

dikel ist offenbar die Höhe der Pyramide; die Basis derselben ist die halbe Fläche des stumpfen Rhomboëders; das Perpendikel mit der Basis multiplicirt und durch drei dividirt, giebt den körperlichen Inhalt der Pyramide.

Die Endkante k des ungleichschenklichten Dihexaëders bildet mit einem Stück der Axe und mit der kürzern Diagonale der Fläche des stumpfen Rhomboëders ein Dreieck, welches Fig. 99 besonders abgebildet ist, und in welchem die Endkante des Dihexaëders wieder mit k, die Diagonale des stumpfen Rhomboëders aber mit δ bezeichnet worden ist. Fällt man aus S oder aus der Spitze des Dihexaëders ein Perpendikel auf die Verlängerung von δ, so ist dieses eben die Höhe u der dreiseitigen Pyramide, die wir zu suchen haben.

Nun ist aber, wie schon aus der Ansicht der Fig. 99 klar ist,

$$u = k \cdot \sin. \varrho$$

und wenn man k aus δ, ϱ und $180^\circ - \lambda$ berechnet

$$k = \frac{\delta \cdot \sin. \lambda}{\sin. (\lambda - \varrho)}.$$

Ferner, da δ die kürzere Diagonale eines stumpfen Rhomboëders ist, dessen halbe Axe $= 1$ und dessen Flächenneigung gegen die Axe λ ist, so ist offenbar

$$\delta = \frac{4}{3 \cos. \lambda}$$

also

$$k = \frac{4 \text{ tg. } \lambda}{3 \sin. (\lambda - \varrho)}$$

und

$$u = \frac{4 \cdot \text{tg.} \lambda \sin. \varrho}{3 \sin. (\lambda - \varrho)}.$$

Nun ist noch die Basis der dreiseitigen Pyramide zu berechnen oder die halbe Seitenfläche desselben stumpfen Rhomboëders, von dem bisher die

Rede war, und dessen Basiskanten mit den Basiskanten des ungleichschenklichten Dihexaëders zusammen fallen. Wir wollen die Endkante des stumpfen Rhomboëders mit x', den ebenen Winkel an der Spitze desselben, wie oben, mit l bezeichnen, so ist der Inhalt der halben Seitenfläche des stumpfen Rhomboëders offenbar

$$\tfrac{1}{2}x' \cdot \delta \cdot \sin. \tfrac{1}{2}l.$$

Hierin für x' seinen Werth $\frac{2}{3 \cos. \vartheta}$ (bedeutet hier, wie oben, die Neigung der Endkante des stumpfen Rhomboëders gegen die Axe) und für δ seinen eben gefundenen Werth gesetzt, giebt für den Inhalt der Basis der dreiseitigen Pyramide

$$\frac{4 \sin. \frac{1}{2}l}{9 \cos. \lambda \cos. \vartheta}.$$

Diesen Werth mit dem dritten Theil der Höhe u der Pyramide multiplicirt, giebt endlich den körperlichen Inhalt der Pyramide

$$K'' = \frac{16}{81} \frac{\sin. \frac{1}{2}l \sin. \varrho \sin. \lambda}{\cos.^2 \lambda \cos. \vartheta \sin. (\lambda - \varrho)}.$$

Es ist also

$$K = \frac{16 \operatorname{tg.}^2 \lambda}{3\sqrt{3}} + \frac{64}{27} \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}l \sin. \varrho \sin. \lambda}{\cos.^2 \lambda \cos. \vartheta \sin. (\lambda - \varrho)},$$

wobei die halbe Axe des stumpferen Rhomboëders der Einheit gleich gesetzt word n ist.

In dieser Gleichung kann man erst $\lambda - r'$ für ϱ setzen, wodurch sie, gehörig entwickelt, folgende Gestalt bekommt:

$$K = \frac{9 \cdot 16 \cdot \operatorname{tg.}^2 \lambda \cos. \vartheta + 64 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin. \frac{1}{2}l \operatorname{tg.}^2 \lambda \cot. r' - \sqrt{3} \cdot 64 \cdot \sin. \frac{1}{2}l \operatorname{tg.} \lambda}{27 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos. \vartheta}.$$

Nun ist aber, vermöge des Zusammenhangs, der unter den Stücken des selben Rhomboëders statt findet und welchen die in Nr. 49 entwickelten Formeln geben,

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}l = \frac{\sqrt{3}\cdot\sin.\vartheta}{2}$$

und

$$\text{tg.}\ \vartheta = 2\ \text{tg.}\ \lambda$$

und überdiess nach dem Vorhergehenden

$$\cot.\ r' = \frac{m+3}{2(3-m)}\ \cot.\ \lambda.$$

Diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, geben endlich

$$K = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{(m+1)}{3-m} \cdot \text{tg.}^2\,\lambda$$

oder da $\text{tg.}\ \lambda = \frac{m}{3-m} \cdot \text{tg.}\ r$

$$K = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{m^2(m+1)}{(3-m)^3}\ \text{tg.}^2\,r,$$

wobei die halbe Axe des stumpfen Rhomboëders = 1 gesetzt worden ist.

Will man den körperlichen Inhalt K des ungleichschenklichten Dihexaëders auf seine eigne halbe Axe als Einheit beziehen, so muss man den obigen Ausdruck von K mit dem Cubus von $\frac{(3-m)}{(m+1)}$ multipliciren. Dieser Bruch drückt das Verhältniss der Axe des stumpfen Rhomboëders zur Axe des ungleichschenklichten Dihexaëders aus; denn wenn man ein Perpendikel aus einer Ecke an der Basis des Dihexaëders auf die Axe fallen lässt, so trifft dieser die Axe des stumpfen Rhomboëders im dritten Theil; wenn man also die halbe Axe des stumpfen Rhomboëders der Einheit gleich setzt, so ist das Stück Axe, welches zwischen dem Durchschnittspunct des Perpendikels mit der Axe und der Endspitze des stumpfen Rhomboëders begriffen ist, gleich $\frac{2}{3}$; das Stück aber, welches zwischen demselben Durchschnittspunct und der Spitze des Dihexaëders begriffen ist, gleich $\frac{2}{3} \cdot \frac{2m}{3-m}$ (denn diese beiden Stücke verhalten sich zu einander, wie die Tangenten von ϑ und r, welche sich eben, nach (17), wie $2m$ zu $3-m$

verhalten); zu diesem letzten Stück braucht man nur $\frac{1}{3}$ hinzuzufügen, um die halbe Axe des Dihexaëders zu haben, welche also gleich $\frac{m+1}{(3-m)}$ ist.

Führt man nun diese Multiplication aus, so findet man

$$K = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{m^2}{(m+1)^2} \cdot \text{tg.}^2 r$$

wobei die halbe Axe des ungleichschenklichten Dihexaëders oder des Grundrhomboëders der Einheit gleich gesetzt worden ist.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Werth $\frac{4\,\text{tg.}^2 r}{3\sqrt{3}}$ des körperlichen Inhalts des Grundrhomboëders, so findet man, dass sich der körperliche Inhalt des ungleichschenklichten Dihexaëders, zum körperlichen Inhalt des Grundrhomboëders verhält, wie $4m^2$ zu $(m+1)^2$.

Die Oberfläche des ungleichschenklichten Dihexaëders findet man, indem man das Product der beiden Endkanten k, x desselben mit dem Sinus des ebenen Winkels b, den sie einschliessen, multiplicirt, und das Resultat dieser Rechnung sechs Mal nimmt.

Es sey also die Oberfläche O, so ist, wenn man für k und x ihre Werthe substituirt

$$O = 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2m}{3-m}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2m}{3-m} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\cos. r} \cdot \frac{1}{\cos. r'} \cdot \sin. b;$$

denn das Stück Axe, welches zwischen einem aus der Ecke an der Basis des Dihexaëders auf dessen Axe gefällten Perpendikel und der Spitze des Dihexaëders enthalten ist, ist nach dem Vorhergehenden gleich $\frac{2}{3} \cdot \frac{2m}{3-m}$; um das Stück Axe, welches zwischen demselben Perpendikel und der entgegengesetzten Spitze des Dihexaëders enthalten ist, zu finden, braucht man nur $\frac{2}{3}$ zu dem Werth des ersten Stücks hinzuzufügen; und diese Grössen, durch die Cosinusse der Neigungswinkel von k und x gegen die Axe dividirt, geben offenbar k und x selbst. Hier ist wieder die halbe Axe des

stumpfen Rhomboëders, dessen Basiskanten mit den Basiskanten des Dihexaëders zusammen fallen, als Einheit angenommen worden.

Will man den Werth der Oberfläche auf die eigne halbe Axe des Dihexaëders als Einheit beziehen, so hat man den obigen Ausdruck noch mit dem Quadrat von $\frac{(3-m)}{(m+1)}$ zu multipliciren, welches aus dem Vorhergehenden klar ist. Man bekommt so folgende Gleichung, wenn man wieder die Oberfläche des ungleichschenklichten Dihexaëders mit O bezeichnet:

$$O = \frac{16}{3} \cdot \frac{m(m+3)}{(m+1)^2} \cdot \frac{\sin. b}{\cos. r \cos. r'}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Werth $O' = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin. a}{\cos.^2 r}$ der Oberfläche des Grundrhomboëders, so findet man

$$\frac{O}{O'} = \frac{2m(m+3) \cos. r \sin. b}{(m+1)^2 \cos. r' \sin. a}.$$

Hierin kann man $\frac{m \cot.\frac{1}{2}B}{\sqrt{3}}$ für $\cos. r$, $\frac{m+3}{\sqrt{3(m-1)}} \cot.\frac{1}{2}C$ für $\cos. r'$, und $\frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}C}$ für $\sin. b$ (s. die Gleichung (5)) setzen. Man erhält

$$\frac{O}{O'} = \frac{m^2(m-1) \cot.\frac{1}{2}B}{(m+1)^2 \cos.\frac{1}{2}C \cos.\frac{1}{2}a}.$$

Da nun ferner $\cos.\frac{1}{2}C = \frac{m-1}{2} \cos.\frac{1}{2}B$, $\cos.\frac{1}{2}a = \frac{1}{2 \sin.\frac{1}{2}A}$ und $\cot.\frac{1}{2}B = \frac{1}{m} \cot.\frac{1}{2}A$, so ist:

$$\frac{O}{O'} = \frac{4m}{(m+1)^2} \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}A}{\cos.\frac{1}{2}B}.$$

Will man O allein haben, in einer für die Rechnung bequemen Form, so findet man auch durch ähnliche Substitutionen

$$O = \frac{16m}{(m+1)^2} \cdot \frac{\text{tg}. r}{\cos.\frac{1}{2}B}$$

und hieraus

$$\frac{O^2}{K} = \frac{48\sqrt{3}}{(m+1)^2 \cos.^2\frac{1}{2}B}.$$

Was den Spitzenwerth E des ungleichschenklichten Dihexaëders betrifft, so haben wir nach dem Vorhergehenden

$$E = \frac{3B + 3C - 720°}{2}.$$

55. Eben so wie die Endkanten, kann man sich auch die Basiskanten eines Rhomboëders zugeschärft denken; diese Zuschärfungsflächen, hinlänglich verlängert, bis sie sich schneiden, bilden eben solche Drei- und Dreikantner oder ungleichschenklichte Dihexaëder, wie die Zuschärfungsflächen der Endkanten. Wir haben oben gesehen, dass man jede Zuschärfungsfläche der Endkante eines Rhomboëders eben so gut als eine Zuschärfungsfläche der Basiskante eines andern Rhomboëders ansehen kann; hievon macht nur die Fläche $3Px$ oder die Fläche des eigentlichen oder gleichschenklichten Dihexaëders eine Ausnahme, weil bei diesem Körper die Kanten an der Basis in einer Ebene liegen, so dass die Ebenen, die man durch je zwei benachbarte Basiskanten zu legen versuchte, nie ein Rhomboëder bilden können, weil sie alle zusammen fallen. Man sieht also schon voraus, dass die Formeln, die für diese Art ungleichschenklichter Dihexaëder zu entwickeln sind, den bisher entwickelten ganz analog ausfallen müssen.

Wir wollen die durch Zuschärfung der Basiskanten des Grundrhomboëders entstandenen ungleichschenklichten Dihexaëder, Dihexaëder der zweiten Art nennen.

Es sey r, Fig. 100, die Fläche eines solchen ungleichschenklichten Dihexaëders, das aus der Zuschärfung der Basiskanten des Grundrhomboëders entstanden ist. Wir wollen die Neigung r zu r, oder die Neigung zweier Flächen an der kürzeren Endkante, wieder mit B, die Neigung von r zu r' oder die Neigung zweier Flächen an der längern Endkante, mit C, und die Neigung von r zu r'' oder die Neigung zweier Flächen an der Basiskante mit D bezeichnen; es sey ferner Γ die Neigung zweier Grundrhomboëderflächen an der Endkante, oder $180° - \Gamma$ die Neigung der Rhomboë-

Man findet auf diese Art

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}B = \frac{1+n}{2n}\ \sin.\ \tfrac{1}{2}D$$

und

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}C = \cos.\ \tfrac{1}{2}B\ \frac{(n-1)}{(n+1)}$$

woraus auch

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}C = \frac{n-1}{2n} \cdot \sin.\ \tfrac{1}{2}D.$$

Ferner

$$\text{tg.}\ r = \frac{2}{3n-1} \cdot \text{tg.}\ \vartheta$$

und

$$\frac{\text{cot.}\ r'}{\text{cot.}\ r} = \frac{3n+1}{3n-1}$$

wo r die Neigung der kürzern Endkante, r' die Neigung der längern Endkante des Dihexaëders und ϑ die Neigung der Endkante des Grundrhomboëders gegen die Axe bedeuten. Man kann auch r aus B und r' aus C berechnen, vermöge der Formeln

$$\cos.\ r = \frac{(3n-1)}{(n+1)\sqrt{3}} \cdot \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}B$$

$$\cos.\ r' = \frac{(3n+1)}{(n-1)\sqrt{3}} \cdot \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C.$$

Eben so ändert man die Formel für den körperlichen Inhalt um. Man findet diesen

$$K = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{(3n-1)^2}{n^2} \cdot \text{tg.}^2 r$$

wobei die halbe Axe des ungleichschenklichten Dihexaëders der Einheit gleich gesetzt ist, und wo r die Neigung der längern Endkante gegen die Axe bedeutet.

Setzt man hingegen die halbe Axe des Grundrhomboëders der Einheit gleich, so ist

$$K = \frac{16 \cdot n}{3\sqrt{3}} \cdot \text{tg.}^2\,\lambda$$

oder

$$K = \frac{4n}{3\sqrt{3}} \cdot \text{tg.}^2\,\vartheta$$

wo λ die Neigung der Fläche, ϑ die Neigung der Endkante des Grundrhomboëders gegen die Axe bedeuten. Aus der letzten Formel sieht man, dass der körperliche Inhalt des Grundrhomboëders sich zu dem körperlichen Inhalt des durch Zuschärfung der Basiskanten abgeleiteten Dihexaëders verhält, wie $1 : n$.

Was die Oberfläche O des ungleichschenklichten Dihexaëders der zweiten Art betrifft, so findet man, aus dem Vorhergehenden, wenn man $\frac{3n-1}{n+1}$ für m setzt

$$O = \frac{2}{3} \cdot (3n-1)\,(3n+1)\,\frac{\text{sin.}\,b}{\text{cos.}\,r \cdot \text{cos.}\,r'}$$

wobei die halbe Axe des Grundrhomboëders der Einheit gleich gesetzt ist *). Man muss sie mit $\frac{1}{n^2}$ multipliciren, wenn man die halbe Axe des Dihexaëders selbst als Einheit setzen will.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Oberfläche O' des Grundrhomboëders,

$$O' = \frac{16\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}l}{3\,\text{cos.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\vartheta};$$

(wo l der ebene Winkel an der Spitze des Grundrhomboëders, λ die Neigung seiner Fläche, ϑ die Neigung seiner Endkante gegen die Axe bedeutet) oder da $\text{sin.}\,\frac{1}{2}l = \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sin.}\,\vartheta}{2}$,

$$O' = \frac{8\sqrt{3} \cdot \text{tg.}\,\vartheta}{3\,\text{cos.}\,\lambda};$$

*) b ist der ebene Winkel an der Spitze des Dihexaëders.

so findet man

$$\frac{O}{O'} = \frac{(3n-1)\,(3n+1)\,\sin.b\,\cos.\lambda}{4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}.\vartheta\,\cos.r\,\cos.r'}.$$

Hierin kann man $\sin. b = \frac{\sqrt{3}\,\sin.r'}{2\,\sin.\frac{1}{2}B}$ *), $\mathrm{tg}.\vartheta = \frac{3n-1}{2}\,\mathrm{tg}.\,r$, nachher $\mathrm{tg}.\,r' = \frac{3n-1}{3n+1}\cdot\mathrm{tg}.\,r$, endlich $\cos.\,r = \frac{3n-1}{n+1}\cdot\frac{\cot.\frac{1}{2}B}{\sqrt{3}}$ und $\cos.\lambda = \frac{2\cos.\frac{1}{2}\Gamma}{\sqrt{3}}$ machen; man findet so:

$$\frac{O}{O'} = \frac{(n+1)\cos.\frac{1}{2}\Gamma}{2\cos.\frac{1}{2}B}.$$

Setzt man hierin $\cos.\frac{1}{2}B = \frac{1+n}{2n}\cdot\sin.\frac{1}{2}D$, und bezeichnet den Neigungswinkel der Flächen des Grundrhomboëders an der Basiskante, d. h. den Winkel $180° - \Gamma$, mit Δ, so hat man endlich

$$\frac{O}{O_1} = \frac{n\,\sin.\frac{1}{2}\Delta}{\sin.\frac{1}{2}D}.$$

---

*) Die Winkel $\frac{1}{2}B$, b, $\frac{1}{2}C$, r', $60°$ und r bilden ein sphärisches Dreieck, in welchem die Winkel b, $\frac{1}{2}B$, r' und $60°$ so, wie es in dieser Formel angegeben ist, zusammen hängen.

Zusammenstellung der bisher entwickelten Formeln fürs ungleichschenklichte Dihexaëder.

I. Fürs ungleichschenklichte Dihexaëder, welches aus Zuschärfung der Endkanten des Grundrhomboëders entsteht. *mPx.*

$\text{tg. } \frac{1}{2}B = m \text{ tg. } \frac{1}{2}A.$

$\text{cos. } \frac{1}{2}C = \frac{m-1}{2} \text{ cos. } \frac{1}{2}B.$

$\text{sin. } \frac{1}{2}D = \frac{m+1}{2} \text{ cos. } \frac{1}{2}B.$

$\text{cot. } r' = \frac{m+3}{2m} \text{ cot. } r; \text{ cos. } r = \frac{\text{cot. } \frac{1}{2}A}{\sqrt{3}} = \frac{m \text{ cot. } \frac{1}{2}B}{\sqrt{3}}.$

$\text{sin. } i' = \text{sin. } r \text{ sin. } \frac{1}{2}B.$

$\text{cos. } \frac{1}{2}b = \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } \frac{1}{4}(120° + B - C) \text{ cos. } \frac{1}{4}(120° + C - B)}{\text{sin. } \frac{1}{2}B \text{ sin. } \frac{1}{2}C}\right)}.$

$\text{tg. } \frac{1}{2}(c-d) = \text{cot. } \frac{1}{2}(r+r') \frac{\text{sin. } \frac{1}{4}(C-B)}{\text{sin. } \frac{1}{4}(C+B)}.$

$\text{tg. } \frac{1}{2}(c+d) = \text{cot. } \frac{1}{2}(r+r') \frac{\text{cos. } \frac{1}{4}(C-B)}{\text{cos. } \frac{1}{4}(C+B)},$

$K = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{m^2}{(m+1)^2} \cdot \text{tg.}^2 r$ } die halbe Axe des Dihexaëders oder

$O = \frac{16m}{(m+1)^2} \cdot \frac{\text{tg. } r}{\text{cos. } \frac{1}{2}B}$ } Grundrhomboëders gleich 1 gesetzt.

II. Fürs ungleichschenklichte Dihexaëder, welches aus Zuschärfung der Basiskanten des Grundrhomboëders entsteht. *nPz.*

$\text{tg. } \frac{1}{2}D = n \text{ cot. } \frac{1}{2}A$

$\text{cos. } \frac{1}{2}B = \frac{n+1}{2n} \text{ sin. } \frac{1}{2}D.$

$\text{cos. } \frac{1}{2}C = \frac{n-1}{n+1} \text{ cos. } \frac{1}{2}B.$

$\text{tg. } \varrho = \frac{2}{3n-1} \text{ tg. } r.$

$\text{tg. } r' = \frac{3n-1}{3n+1} \text{ tg. } \varrho = \frac{2}{3n+1} \text{ tg. } r = \frac{4}{3n+1} \cdot \text{tg. } i.$

$\text{sin. } i' = \text{sin. } \varrho \cdot \text{sin. } \frac{1}{2}B.$

$\text{sin. } i' = \text{sin. } r' \cdot \text{sin. } \frac{1}{2}C.$

$$K = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{(3n-1)^2}{n^2} \operatorname{tg.}^2 \varrho$$
$$O = \frac{(3n-1)(n+1)}{n^2} \cdot \frac{\operatorname{tg.} \varrho}{\cos. \frac{1}{2}B}$$

die halbe Axe des Dihexaëders = 1 gesetzt.

$$K = \frac{4n}{3\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg.}^2 r$$
$$O = (3n-1)(n+1) \cdot \frac{\operatorname{tg.} \rho}{\cos. \frac{1}{2}B}$$
$$\frac{O}{O_1} = \frac{n \sin. \frac{1}{2}A}{\sin. \frac{1}{2}D} = \frac{n \cos. \frac{1}{2}A}{\sin. \frac{1}{2}D}$$

die halbe Axe des Grundrhomboëders = 1 gesetzt.

In diesen beiden Tabellen bedeutet:

A die Neigung zweier benachbarten Grundrhomboëderflächen an der Endkante.

B die Neigung zweier benachbarten Dihexaëderflächen an der kürzern Endkante.

C die Neigung zweier benachbarten Dihexaëderflächen an der längern Endkante.

D die Neigung zweier benachbarten Dihexaëderflächen an der Basiskante.

r die Neigung der Endkante des Grundrhomboëders gegen die Axe (in der 1sten Tabelle ist diess auch die Neigung der kürzern Endkante des Dihexaëders gegen die Axe).

ϱ die Neigung der kürzern Endkante des Dihexaëders gegen die Axe, in der Tabelle II.

r' die Neigung der längern Endkante des Dihexaëders gegen die Axe

i' die Neigung der Dihexaëderfläche gegen die Axe.

O die Oberfläche des Dihexaëders.

O_1 die Oberfläche des Grundrhomboëders.

K der körperliche Inhalt des Dihexaëders.

Δ die Neigung der Flächen des Grundrhomboëders an der Basiskante oder $180^{\circ} - A$.

56. Es giebt im rhomboëdrischen System keine Fläche, die nicht als grade Abstumpfungsfläche oder als Zuschärfungsfläche an irgend einem Rhomboëder erscheine; die vorhergehenden Formeln enthalten also im Grunde die Auflösungen aller Aufgaben, die man sich in Betreff der Winkel des rhomboëdrischen Systems machen kann, so lange es Flächen von derselben Art sind, wenn man nur weiss, auf welches Grundrhonboëder sie bezogen werden können. Da man aber oft auch die Neigungen von Flächen verschiedener Art zu wissen nöthig hat, so wird es gut seyn, auch Formeln kennen zu lernen, nach welchen man die Neigung irgend zweier Flächen finden kann, die in einem bekannten Verhältniss zu einem bekannten Grundrhomboëder stehen.

Wir wollen den weitläuftigen Gegenstand, den wir zu bearbeiten haben, in zwei Abtheilungen bringen; in der ersten wollen wir von den Neigungen der verschiedenen Endflächen gegen die Säulenflächen handeln, in der zweiten sollen die Neigungen verschiedener Endflächen untereinander betrachtet werden.

A. Von den Neigungen der Endflächen gegen die Säulenflächen.

Wir wissen schon aus der allgemeinen Darstellung der Formen, die im rhomboëdrischen System vorkommen, dass es hier zwei reguläre sechsseitige Säulen giebt. Die eine entsteht aus der graden Abstumpfung der Ecken an der Basis und hat P° zum Zeichen; die Flächen der andern

hingegen stumpfen die Basiskanten des Grundrhomboëders grade ab und werden mit ∞z bezeichnet.

So wie beim Grundrhomboëder, so sind auch bei allen andern Rhomboëdern die Rhomboëderflächen entweder auf die Kanten oder auf die Flächen der Säulen grade aufgesetzt; im letzten Fall ist die Neigung der Rhomboëderfläche gegen die Säulenfläche gleich dem Complement der Neigung der Rhomboëderfläche gegen die Axe zu 180°; im ersten gleich dem Complement der halben Neigung der Rhomboëderflächen an den Endkanten zu 180°.

Die beiden Säulenflächen kommen zuweilen mit einander vor; es giebt dann offenbar eine regelmässige zwölfseitige Säule, deren Flächen um 150° gegen einander geneigt sind.

Die Neigung einer Zuschärfungsfläche an der Basiskante des Rhomboëders gegen die Säulenfläche, die dieselbe Basiskante grade abstumpft, ist offenbar gleich dem um 90° vermehrten halben Neigungswinkel der Zuschärfungsflächen gegen einander.

Will man den Neigungswinkel der Drei- und Dreikantnerflächen gegen diejenigen Säulenflächen wissen, auf welche die Grundrhomboëderflächen grade aufgesetzt sind, so verfährt man auf folgende Weise. Man lege eine Ebene durch die längere Endkante des Drei- und Dreikantners und den Mittelpunct des Rhomboëders. Diese Ebene bildet offenbar mit der Säulenfläche und mit der Drei- und Dreikanterfläche ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, in welchem (wenn man, wie bisher, die Neigung der längern Endkante des Drei- und Dreikantners gegen die Axe mit r' und die Neigung der Flächen desselben an derselben Endkante mit C bezeichnet) eine

$$\frac{\cos. Q}{\cos. Q'} = \frac{m+3}{2m} = \frac{3n+1}{3n-1}$$
$$\frac{\text{tg. } q}{\text{tg. } q'} = \frac{2}{m-1} = \frac{n+1}{n-1}$$
$$\frac{\text{tg. } p}{\text{tg. } p'} = \frac{(m+3)(m-1)}{4m} = \frac{(3n+1)(n-1)}{(3n-1)(n+1)}.$$

Macht man in diesen Gleichungen $m = n = 1$, so kann man aus ihnen die Neigungen und ebenen Winkel berechnen, die die Grundrhomboëderfläche mit einer von den Seitenflächen macht, welche die Basisecken des Grundrhomboëders grade abstumpfen. Bezeichnet man die Neigung zweier benachbarten Rhomboëderflächen an der Endkante mit A, die Neigung einer Rhomboëderfläche gegen die Säulenfläche, die derjenigen, auf welche sie grade aufgesetzt ist, benachbart ist, mit Q'', den halben Winkel, der zwischen den Durchschnittslinien der beiden Rhomboëderflächen und der Säulenfläche liegt, mit q'', und den ebenen Winkel, der zwischen einer von diesen Durchschnittslinien und der Rhomboëderendkante liegt, mit p'', so ist:

$$\cos. Q'' = -\frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{2} \cos. i$$
$$\text{tg. } q'' = \frac{\text{tg. } r}{\sqrt{3}}$$
$$\text{tg. } p'' = -\frac{\text{tg. } r}{\cos. \frac{1}{2}A}.$$

B. Von den Neigungen verschiedener Endflächen unter einander.

Der allgemeinste Fall ist hier derjenige, wo die Flächen zweier ungleichschenklichten Dihexaëder an demselben Krystall vorkommen. Von diesen Flächen werden offenbar diejenigen der Endspitze näher liegen, deren Endkanten stärker gegen die Axe geneigt sind. Es seyen nun r', r'' die

Neigungen der beiden Endkanten, des einen und des andern ungleichschenklichten Dihexaëders, gegen die Axe, so ist offenbar die Neigung dieser Endkanten untereinander, in dem Puncte wo sie sich durchschneiden, $180° - (r' - r'')$. Nennt man die Neigungswinkel der Flächen an diesen Endkanten C' und C'', so bilden zwei Flächen auf derselben Seite der Endkanten, und eine Ebene, die man durch die Endkante und den Mittelpunct des Krystalls legt, eine Ecke oder ein sphärisches Dreieck, in welchem die zwei Winkel $\frac{1}{2}C'$ und $\frac{1}{2}C''$, und die eingeschlossene Seite $180° - (r' - r'')$ bekannt sind, welches man also auflösen kann. Will man den der bekannten Seite $180° - (r' - r'')$ gegenüberliegenden Winkel, oder die Neigung der beiden ungleichartigen Dihexaëderflächen, und die beiden andern Seiten, oder die ebenen Winkel, die zwischen den Endkanten der Dihexaëderflächen und ihren Durchschnittslinien eingeschlossen sind, zugleich berechnen, so kann man sich sehr wohl der Gaussischen Formeln bedienen.

57. Eine weitere Entwickelung aller der Fälle, die hier vorkommen können, wäre zu langweilig; wir wollen uns deshalb gleich an ein Beispiel wenden, welches uns am besten zeigen wird, was uns Noth thut.

Beim Kalkspath ist die Neigung zweier benachbarten Rhomboëderflächen an der Endkante gleich 105° — 5′. Eine Varietät desselben, die sich in Slatoust am Fuss des Ural findet, vereinigt die merkwürdigsten Flächen, die in diesem System vorkommen und ist Fig. 104 und 105 abgebildet. Die erste Figur giebt die Totalansicht des Krystalls, die zweite bloss die Spitze desselben. In der ersten Figur sind die kleineren Flächen weggelassen, um nicht zu verwirren. Die Zeichen der vorkommenden Flächen sind nach Haüy, nach Weiss und nach uns folgende:

nach Haüy: nach Weiss: nach uns:

$$g = \overset{1}{B} = \left|\begin{matrix}\frac{1}{2}a \\ \infty a : a : a\end{matrix}\right| = x \text{ oder } P_1$$

$$f = {}^1E^1 = \left|\begin{matrix}c \\ \infty a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\end{matrix}\right| = x^{\frac{1}{2}} \text{ oder } P_{-1}$$

$$c = e^2 = \left|\begin{matrix}\infty c \\ a : a : \infty a\end{matrix}\right| = P^0$$

$$t = \overset{3}{B} = \left|\begin{matrix}\frac{1}{4}c \\ \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : a\end{matrix}\right| = 2Px$$

$$\lambda = \overset{3}{D} = \left|\begin{matrix}\frac{1}{2}c \\ \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : a\end{matrix}\right| = 2Pz$$

$$r = \overset{2}{D} = \left|\begin{matrix}c \\ \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : a\end{matrix}\right| = 3Pz.$$

Obgleich an diesem Krystall das Grundrhomboëder nicht vorkommt, so wollen wir dessen Winkel doch mit berechnen. Da hier keine grosse Genauigkeit gefordert wird, so wollen wir uns der Lalande'schen Logarithmentafeln bedienen, die für Rechnungen dieser Art sehr bequem sind.

Beim Grundrhomboëder bedeutet, wie im Vorhergehenden, A die Neigung der Flächen an der Endkante, r, i die Neigungen der Endkante und der Fläche gegen die Axe, a den ebenen Winkel an der Spitze, K das Volumen und O die Oberfläche, die halbe Axe $= 1$ gesetzt.

Die übrigen Neigungen werden mit den Buchstaben bezeichnet, die in der Figur den correspondirenden Flächen gegeben worden sind; so bedeutes $\frac{t}{\lambda}$ die Neigung von t zu λ. Die Kanten werden durch die Flächen bezeichnet, deren Durchschnittslinien sie sind; so ist tt die Durchschnittslinie von t, t, $t\lambda$ die Durchschnittslinie von t und λ; $\frac{tt}{t\lambda}$ bedeutet den

$$K = \frac{4\,\mathrm{tg.}^2 r}{3\sqrt{3}}$$

L. 4 = 0·60206
L. $\mathrm{tg.}^2 r$ = 0·61390
L. $\frac{1}{3}$ = 9·52288
L. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ = 9·76144

L. K = 0·50028 $\quad K = 3{,}1643.$

$$O = \frac{4\,\mathrm{tg.}\,r}{\cos.\frac{1}{2}A}$$

L. 4 = 0·60206
L. tg. r = 0·30695
L. $\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}A}$ = 0·21596

L. O = 1·12497 $\quad O = 13{,}335.$

2) Das nächste stumpfere Rhomboëder.

$$\cos.\tfrac{1}{2}\tfrac{E}{e} = \tfrac{1}{3}\ \mathrm{cot.}\ \tfrac{1}{2}A$$

L. $\frac{1}{3}$ = 9·69897
L. cot. $\frac{1}{2}A$ = 9·88433

L. cos. $\frac{1}{2}\frac{E}{e}$ = 9·58330 $\quad \frac{1}{2}\frac{E}{e} = 67° - 28',5.$

$$\mathrm{tg.}\ \tfrac{EE}{Axe} = 2\ \mathrm{tg.}\ r$$

L. 2 = 0·30103
L. tg. r = 0·30695

L. tg. $\frac{EE}{Axe}$ = 0·60798 $\quad \frac{EE}{Axe} = 76° - 8',8.$

$$\mathrm{cot.}\ \tfrac{1}{2}\tfrac{EE}{ee} = \frac{1}{2\sin.\frac{1}{2}a}$$

L. $\frac{1}{3}$ = 9·69897
L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}a}$ = 0·10975

L. cot. $\frac{1}{2}\frac{EE}{ee}$ = 9·80872 $\quad \frac{1}{2}\frac{EE}{ee} = 57° - 13',7.$

$$K_1 = 4\,K$$

L. 4 = 0·60206

L. K = 0·50028

L. K_1 = 1·10234 $\qquad K_1 = 12{,}657.$

$$O_1 = 4\,O \sin. \tfrac{1}{2}A$$

L. 4 = 0·60206

L. O = 1·12497

L. sin. $\frac{1}{2}A$ = 9·89971

L. O_1 = 1·62674 $\qquad O_1 = 42{,}339.$

3) Das nächste schärfere Rhomboëder.

$$\cot. \tfrac{1}{2}\tfrac{f}{f} = 2 \cos. \tfrac{1}{2}A$$

L. 2 = 0·30103

L. cos. $\frac{1}{2}A$ = 9·78404

L. cot. $\frac{1}{2}\frac{f}{f}$ = 0·08507 $\qquad \frac{1}{2}\frac{f}{f} = 39° - 25'{,}4 \qquad \sin. \frac{1}{2}\frac{f}{f} = 9{\cdot}80280.$

$$\text{tg.}\ \tfrac{f}{Axe} = \tfrac{1}{2}\ \text{tg.}\ i$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897

L. tg. i = 0·00592

L. tg. $\frac{f}{Axe}$ = 9·70489 $\qquad \frac{f}{Axe} = 26° - 52'{,}7.$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\tfrac{ff}{ff} = \tfrac{1}{2} \cdot \text{tg.}$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897

L. tg. $\frac{1}{2}a$ = 0·09099

L. sin. $\frac{1}{2}\frac{ff}{ff}$ = 9·78996 $\qquad \frac{1}{2}\frac{ff}{ff} = 38° - 3'{,}8.$

$$\cot.\frac{tt'}{Axe} = \tfrac{5}{4}\cot. r$$

L. $\frac{5}{4}$ = 0·09691

L. cot. r = 9·69305

L.cot. $\frac{tt'}{Axe}$ = 9·78996 $\qquad \frac{tt'}{Axe} = 58° - 20',7.$

$$\sin.\frac{t}{Axe} = \sin. r \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\frac{t}{t}$$

L. sin. r = 9·95272

L.sin. $\frac{1}{2}\frac{t}{t}$ = 9·97027

L.sin. $\frac{t}{Axe}$ = 9·92299 $\qquad \frac{t}{Axe} = 56° - 52',6.$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\frac{tt}{tt'} = V\left(\frac{\cos.\frac{1}{2}(60°+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C)\cos.\frac{1}{2}(60°+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B)}{\sin.\frac{1}{2}B\sin.\frac{1}{2}C}\right)$$

$\frac{1}{2}B = 69° - 2',3$, $\quad \frac{1}{2}C = 79° - 41',8.$

60° — 0′,0	60° — 0′,0
+ 69 — 2,3	+ 79 — 41,8
129 — 2,3	139 — 41,8
— 79 — 41,8	— 69 — 2,3
49 — 21,5	70 — 39,5

$\frac{1}{2}(60° + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C) = 24° - 40',75$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(60° + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B) = 35° - 19',75.$

L.cos. (24°—40′,75) = 9·95840

L.cos. (35°—19′,75) = 9·91160

L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}B}$ = 0·02973

L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}C}$ = 0·00706

L. cos.$^2\frac{1}{2}\frac{tt}{tt'}$ = 9·90679

L. cos. $\frac{1}{2}\frac{tt}{tt'}$ = 9·95340 $\qquad \frac{1}{2}\frac{tt}{tt'} = 26° - 4',1.$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(c-d) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}(r+r')\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(C-B)}{\sin.\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(c+d) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}(r+r')\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(C-B)}{\cos.\frac{1}{2}(C+B)}.$$

Hier ist $c = \frac{tt''}{tt}$, $d = \frac{tt''}{tt'}$, $r = \frac{tt}{Axe}$, $r' = \frac{tt'}{Axe}$, $C = \frac{t}{t'}$, $B = \frac{t}{t}$;

also $\frac{1}{2}(r+r') = 61^\circ - 2',75$, $\frac{1}{4}(C-B) = 5^\circ - 19',75$, $\frac{1}{4}(C+B) = 74^\circ - 22',1$.

L. cot.$\frac{1}{2}(r+r')$ = 9·74293	L. cot.$\frac{1}{2}(r+r')$ = 9·74293
L.sin.$\frac{1}{4}(C-B)$ = 8·96791	L.cos.$\frac{1}{4}(C-B)$ = 9·99812
L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{4}(C+B)}$ = 0·01637	L. $\frac{1}{\cos.\frac{1}{4}(C+B)}$ = 0·56950
L. tg. $\frac{1}{2}(c-d)$ = 8·72731	L. tg. $\frac{1}{2}(c+d)$ = 0·31055

$$\tfrac{1}{2}(c-d) = 3^\circ - 3',3$$
$$\tfrac{1}{2}(c+d) = 63 - 56,0$$
$$c = 66 - 59,3$$
$$d = 60 - 52,7.$$

$$K' = \frac{64}{27\sqrt{3}} \cdot \text{tg.}^2 r \;^*)$$

L. 64 = 1·80618
L. $\frac{1}{27}$ = 8·56864
L. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = 9·76144
L. tg.$^2 r$ = 0·61390

L. K' = 0·75016 $\qquad K' = 5{,}6255.$

$$O' = \frac{32}{9} \cdot \frac{\text{tg. } r}{\cos.\frac{t'}{2t}} \;^*)$$

L. 32 = 1·50515
L. $\frac{1}{9}$ = 9·04576
L. tg. r = 0·30695
L. $\frac{1}{\cos.\frac{t'}{2t}}$ = 0·44643

L. O' = 1·30429 $\qquad O' = 20{,}151.$

*) K' und O' bedeuten hier Volumen und Oberfläche des ungleichschenklichten Dihexaëders, die halbe Axe desselben, oder des Grundrhomboëders, der Einheit gleich gesetzt.

5) Das ungleichschenklichte Dihexaëder $2Pz$.

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{\lambda''} = 2 \text{ cot. } \tfrac{1}{2}A$$

L. 2 = 0·30103

L. cot. $\frac{1}{2}A$ = 9·88433

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda''}$ = 0·18536 $\quad \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda''} = 56^\circ - 52',3 \quad$ sin. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda''}$ = 9·92296.

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{\lambda} = \tfrac{3}{4} \text{ sin. } \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{\lambda''}$$

L. 3 = 0·47712

L. $\frac{1}{4}$ = 9·39797

L. sin. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda''}$ = 9·92296

L. cos. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda}$ = 9·79805 $\quad \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda} = 51^\circ - 5',3 \quad$ sin. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda}$ = 9·89104.

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{\lambda'} = \tfrac{1}{3} \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{\lambda}$$

L. cos. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda}$ = 9·79805

L. $\frac{1}{3}$ = 9·52288

L. cos. $\frac{\lambda}{\lambda'}$ = 9·32093 $\quad \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda'} = 77^\circ - 54',8.$

$$\text{tg. } \tfrac{\lambda\lambda}{Axe} = \tfrac{3}{5} \text{ tg. } r.$$

L. $\frac{3}{5}$ = 9·60206

L. tg. r = 0·30695

L. tg. $\frac{\lambda\lambda}{Axe}$ = 9·90901 $\quad \frac{\lambda\lambda}{Axe} = 39^\circ - 2',5 \quad$ sin. $\frac{\lambda\lambda}{Axe}$ = 9·79926.

$$\text{tg. } \tfrac{\lambda\lambda'}{Axe} = \tfrac{2}{7} \text{ tg. } r$$

L. 2 = 0·30103

L. $\frac{2}{7}$ = 9·15490

L. tg. r = 0·30695

L. tg. $\frac{\lambda\lambda}{Axe}$ = 9·76288 $\quad \frac{\lambda\lambda'}{Axe} = 30^\circ - 5'.$

$$\sin.\frac{\lambda}{Axe} = \sin.\frac{\lambda\lambda}{Axe} \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda}$$

L. $\sin.\frac{\lambda\lambda}{Axe} = 9{\cdot}79926$

L. $\sin.\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda} = 9{\cdot}89104$

L. $\sin.\frac{\lambda}{Axe} = 9{\cdot}69030$ $\qquad \frac{\lambda}{Axe} = 29^{\circ} - 21'.$

Das Volumen dieses Dihexaëders, die halbe Axe des Grundrhomboëders $= 1$ gesetzt, ist doppelt so gross, als das Volumen des Grundrhomboëders selbst, also gleich

6,3286.

Die Oberfläche desselben verhält sich zur Oberfläche des Grundrhomboëders, wie 2 cos. $\frac{1}{2}A$ zu sin. $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda''}$; man findet sie so gleich

22,333.

6) Das ungleichschenklichte Dihexaëder $3Pz$.

Man findet auf dieselbe Art, wie in 5),

$\frac{1}{2}\frac{r}{r''} = 66^{\circ} - 29',3$	$\frac{rr'}{Axe} = 22^{\circ} - 4',3$
$\frac{1}{2}\frac{r}{r} = 52 - 18,9$	$\frac{rr}{Axe} = 26 - 52,7$
$\frac{1}{2}\frac{r}{r'} = 72 - 12,1$	$\frac{r}{Axe} = 20 - 57,8.$

Volumen (die halbe Axe des Grundrhomboëders $= 1$) 9,4929

Oberfläche . . . . . 26,5322.

7) Neigung der Flächen λ und r gegen die Säulenflächen c und c'.

$$\cos.\frac{\lambda}{c} = -\frac{7}{3\sqrt{3}}\cos.\tfrac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda}$$

L. $7 = 0{\cdot}84510$

L. $\frac{1}{3\sqrt{3}} = 9{\cdot}28442$

L. $\cos.\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda} = 9{\cdot}79805$

L. $\cos.\frac{\lambda}{c} = 9{\cdot}92757$ $\qquad \frac{\lambda}{c} = 147^{\circ} - 49',25.$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda c}{\lambda' c} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \text{tg. } \frac{\lambda\lambda}{Axe}$$

L. 5 = 0·69897

L. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = 9·76144

L. tg. $\frac{\lambda\lambda}{Axe}$ = 9·90901

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{\lambda c}{\lambda' c}$ = 0·36942 $\qquad \frac{1}{2}\frac{\lambda c}{\lambda' c} = 66^\circ - 52',2.$

$$\text{tg. } \frac{\lambda\lambda'}{\lambda c} = -\frac{\text{tg. } \frac{\lambda\lambda'}{Axe}}{\cos. \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda'}}$$

L. tg. $\frac{\lambda\lambda'}{Axe}$ = 9·76288

L. $\frac{1}{\cos. \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda'}}$ = 0·67907

L. tg. $\frac{\lambda\lambda'}{\lambda c}$ = 0·44195 $\qquad \frac{\lambda\lambda'}{\lambda c} = 109^\circ - 52',3.$

Ferner findet man aus $\cos. \frac{\lambda}{c'} = \frac{5}{7} \cos. \frac{\lambda}{c} \cdots \frac{\lambda}{c'} = 127^\circ - 11',8$

aus $\text{tg. } \frac{1}{2}\frac{\lambda c'}{\lambda c'} = \frac{1}{3} \text{tg. } \frac{1}{2}\frac{\lambda c}{\lambda' c} \cdots \frac{\lambda c'}{\lambda c'} = 37 - 58$

aus $\text{tg. } \frac{\lambda\lambda}{\lambda c'} = \frac{15}{7} \text{tg. } \frac{\lambda\lambda'}{\lambda c} \cdots \frac{\lambda\lambda}{\lambda c'} = 99 - 34,5.$

Auf dieselbe Art findet man die Neigungen der Fläche r gegen die Säulenflächen c und c':

$$\frac{r}{c} = 151^\circ - 55',7, \quad \frac{1}{2}\frac{rc}{r' c} = 49^\circ - 29',5, \quad \frac{rr'}{rc} = 127^\circ - 0',5$$

$$\frac{r}{c} = 134^\circ - 54',0, \quad \frac{1}{2}\frac{rc'}{rc'} = 30^\circ - 20',4, \quad \frac{rr}{rc'} = 115^\circ - 13',6.$$

8) Neigung der Flächen t und λ gegen einander.

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}A = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b-c)}.$$

Hierin ist $b = \frac{\lambda\lambda'}{t\lambda}$, $c = \frac{tt'}{t\lambda}$, $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\frac{tt'}{\lambda\lambda'} = 75^\circ - 52',2$, $A = \frac{t}{\lambda}$, $\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\frac{t}{t'} = 79^\circ - 41',8$, $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda'} = 77^\circ - 54',8.$

L.tg. 75° — 52′,2 = 0·59905	L.tg. 75 — 52,2 = 0·59905	L.sin. 75 — 52,2 = 9·98666
L. sin. 1 — 47 = 8·49304	L. cos. 1 — 47 = 9·99979	L. sin. 1 — 47 = 8·49304
L. $\frac{1}{\sin. 157 - 36.6}$ = 0·41918	L. $\frac{1}{\cos. 157 - 36.6}$ = 0·03404 (n)	L. $\frac{1}{\sin. \frac{1}{2}(b-c)}$ = 0·51049
L. tg. $\frac{1}{2}(b-c)$ = 9·51127	L. tg. $\frac{1}{2}(b+c)$ = 0·63288 (n)	L. cos. $\frac{1}{2}A$ = 8·99019

$$\frac{1}{2}(b-c) = 17^\circ - 58',8$$
$$\frac{1}{2}(b+c) = 103 - 65$$

$$b = 121 - 5,3 = \frac{\lambda\lambda'}{t\lambda}$$
$$c = 85 - 7,7 = \frac{tt'}{t\lambda}$$
$$\frac{1}{2}A = 84 - 23,4 = \frac{1}{2}\frac{t}{\lambda}.$$

9) Neigung der Flächen λ und t gegen f.

Eine Ebene, die durch die Endkante des Grundrhomboëders und durch den Mittelpunct desselben geht, ist offenbar auf f senkrecht, Diese Ebene bildet also mit f und t ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, in welchem die beiden andern Winkel $\frac{1}{2}\frac{t}{t}$ und $\frac{t}{f}$, und die Seiten $\frac{u}{tf}$, $\frac{1}{2}\frac{tf}{tf}$ und $180^\circ - (r - i_{-1})$ sind. Von diesen Stücken sind uns $180^\circ - (r - i_{-1})$ und $\frac{1}{2}\frac{t}{t}$ bekannt, man kann also die übrigen vermittelst der in der Einleitung gegebenen Formeln fürs rechtwinklichte sphärische Dreieck berechnen. Man findet so:

$$\frac{t}{f} = 18^\circ - 20',2, \quad \frac{u}{tf} = 115^\circ - 30',1, \quad \frac{1}{2}\frac{tf}{tf} = 57^\circ - 26',5$$

und eben so

$$\frac{t}{f} = 139^\circ - 31',3, \quad \frac{\lambda\lambda}{tf} = 161^\circ - 3',7, \quad \frac{1}{2}\frac{\lambda f}{tf} = 14^\circ - 37',7.$$

Vom Dihexaëder insbesondere.

38. Das gleichschenklichte Dihexaëder, welches wir immer bisher schlechtweg Dihexaëder genannt haben, lässt sich als eine secundäre Form des Rhomboëders betrachten; da es indess viele Substanzen giebt, an denen diese Form mit vieler Bestimmtheit, und ohne Hinweisung auf den rhomboëdrischen Ursprung, auftritt, so verdient es besonders betrachtet zu werden.

Die Formen, die zum System des Dihexaëders gehören, sind sehr einfach, und die Krystalle ähneln sich sehr, von welcher Substanz sie seyn mögen. Es wird deshalb hinreichend seyn, an einem Beispiel zu zeigen, was für Formen in diesem System vorkommen können und wie man ihre Winkel berechnen muss; die Anwendung auf andre wird dann leicht seyn.

In Fig. 106 ist eine der zusammengesetztesten Krystallisationen des Berylls abgebildet, die ich Gelegenheit gehabt habe zu beobachten. Die Flächen *t* bilden eine sechsseitige Pyramide, in welchem zwei benachbarte Flächen unter einem Winkel von $151^{\circ} - 5',7$ gegen einander geneigt sind. Die Flächen *t*, *s*, *x* liegen in einer Zone; legt man eine Ebene durch die Endkante *tt'* und durch den Mittelpunct des Krystalls, so ist die Tangente der Neigung von *t* gegen diese Ebene 3 Mal so gross, als die Tangente der Neigung von *s*, und 5 Mal so gross, als die Tangente der Neigung von *x* gegen dieselbe Ebene. Wenn man also das von den Flächen *t* gebildete Dihexaëder als Grundform des Berylls annimmt, so sind die Zeichen der Flächen *t*, *s*, *x* folgende (die Haüyschen Zeichen beziehen sich auf ein reguläres sechsseitiges Prisma Fig. 107):

nach uns;	nach Weiss;	nach Haüy.
$t = D$	$\left\|\begin{matrix} c \\ a:a:\infty a \end{matrix}\right\|$	$\overset{1}{B}$
$s = \frac{1}{3}Dx$ (oder $x^{\frac{1}{3}}$)	$\left\|\begin{matrix} c \\ a:\frac{1}{3}a:a \end{matrix}\right\|$	$\overset{1}{A}$
$x = \frac{1}{3}Dx$	$\left\|\begin{matrix} c \\ a:\frac{1}{3}a:\frac{1}{3}a \end{matrix}\right\|$	${}^{2}A^{2}$ *).

Da nun überdies die Fläche s die Endkante uu grade abstumpft, P eine gradangesetzte Endfläche und M die Säulenfläche ist, so sind die Zeichen dieser Flächen

nach uns;	nach Weiss;	nach Haüy.
$u = D^{\frac{1}{2}}$	$\left\|\begin{matrix} c \\ \frac{1}{2}a:\frac{1}{2}a:\infty a \end{matrix}\right\|$	$\overset{1}{\underset{2}{B}}$ oder $\underset{2}{B}$
$P = D^{\infty}$	$\left\|\begin{matrix} c \\ \infty a:\infty a:\infty a \end{matrix}\right\|$	P
$M = D^{0}$	$\left\|\begin{matrix} \infty c \\ a:a:\infty a \end{matrix}\right\|$	M.

Es ist nach den Formeln, die das Dihexaëder betreffen, leicht, aus der Neigung von t zu t alle übrigen Winkel des von den Flächen t gebildeten Dihexaëders zu berechnen. Man findet:

Neigung der Dihexaëderendkante gegen die Axe .	63° —	29′,2
Neigung der Dihexaëderfläche gegen die Axe . .	60 —	3,3
Ebener Winkel an der Spitze	53 —	9,6
Volumen des Dihexaëders, die halbe Axe = 1 gesetzt	6,9595	
Oberfläche des Dihexaëders, die halbe Axe = 1 gesetzt	24,095.	

*) Haüy, der die Flächen x nicht kannte, schrieb eigentlich $\overset{2}{B}$, $\overset{2}{A}$, und muss dann die Fläche x mit $(\overset{1}{A}\overset{1}{B}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{C}^{\frac{1}{2}})$ bezeichnen oder mit ${}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{A}{}^{\frac{1}{2}}$. Ich habe die Bezeichnung $\overset{1}{B}$, $\overset{1}{A}$ etc. vorgezogen, weil sich dann die Analogie, die die Krystallisation des Berylls mit der des Apatits hat, leichter zeigt.

Auf eine ähnliche Art berechnet man die Winkel des von den Flächen *s* gebildeten Dihexaëders. Da das Zeichen von *s* nach uns $x^{\frac{1}{2}}$ ist, so ist tg. $\frac{s}{Axe} = \frac{1}{2}$ tg. $\frac{u}{Axe}$, also $\frac{s}{Axe} = 45° - 3',9$, und hieraus findet man leicht die übrigen Stücke, nämlich:

Neigung von *s* zu *s*	138° — 38′,4
Neigung der Endkante gegen die Axe . . .	49 — 10,3
Ebener Winkel an der Spitze	44 — 27,8
Volumen, die halbe Axe = 1 gesetzt . . .	2,3198
Oberfläche, die halbe Axe = 1 gesetzt . . .	9,831.

Was endlich das von den Flächen *u* gebildete Dihexaëder betrifft, so ist:

Neigung von *u* gegen *u*	135° — 38′,2
Neigung der Endkante *uu* gegen die Axe . .	45 — 3,9
Neigung von *u* gegen die Axe	40 — 57,5
Ebener Winkel an der Spitze	41 — 28,0
Volumen des Dihexaëders, die halbe Axe = 1 gesetzt	1,7398
Oberfläche des Dihexaëders	7,9630.

Bei allen diesen Dihexaëdern kann man noch fragen, wie zwei abwechselnde Endflächen gegen einander geneigt sind. Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, dass man jedes Dihexaëder als aus zwei Rhomboëdern combinirt ansehen kann; in der That, wenn man je drei abwechselnde Endflächen des Dihexaëders verlängert, bis sie sich schneiden, so entsteht ein Rhomboëder. Es sey A der Neigungswinkel zweier benachbarten Flächen dieses Rhomboëders an der Endkante. Man lege eine Ebene durch die Rhomboëderendkante und durch den Mittelpunct des Krystalls, eine andere mit ihr rechtwinklichte durch zwei gegenüberliegende Endkanten

des Dihexaëders, so bilden offenbar diese beiden Ebenen und eine Rhomboëderfläche ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, in welchem ein Winkel A und die anliegende Seite r bekannt sind; man kann also A' finden vermöge der Formel

$$\cos. \tfrac{1}{2}A' = \sin. \tfrac{1}{2}A \cos. r$$

oder da $\cos. r = \sqrt{3} \cot. \tfrac{1}{2}A$

$$\cos. \tfrac{1}{2}A' = \sqrt{3} \cos. \tfrac{1}{2}A.$$

Setzt man in diese Formel die oben gefundenen Werthe von A, so findet man folgende Werthe von A':

Für das von den Flächen t gebildete Dihexaëder $A' = 128^\circ - 46',5$

Für das von den Flächen s gebildete Dihexaëder $A' = 104 - 34,8$

Für das von den Flächen u gebildete Dihexaëder $A' = 98 - 19,3.$

Um die Neigungen von s zu t und x zu s zu finden, braucht man nur die Zeichen dieser Flächen anzusehen, aus welchen man sieht, dass sie in derselben Zone von tt liegen. Die erste von diesen Neigungen ist offenbar gleich dem Complement von $\frac{1}{2}(A—A')$ zu 180° oder gleich $156^\circ—44',6$.

Die Tangente der Neigung von x gegen eine Ebene, die durch die Endkante tt, in deren Zone sie liegt und durch den Mittelpunct des Krystalls geht, ist $\frac{1}{3}$ von der Tangente von $\frac{1}{2}\frac{t}{t}$, jene Neigung also gleich $37^\circ — 48',7$; und die Neigung von s gegen x gleich

$$180^\circ — \tfrac{1}{2}(104^\circ \cdot 34',8 — 75^\circ \cdot 37',5) = 165^\circ — 31',3.$$

Eine von den Säulenflächen M geht offenbar der Ebene parallel, die man sich durch die Endkante tt, in deren Zone die Flächen t, s, x liegen, und durch den Mittelpunct des Krystalls gelegt denken kann. Die Nei-

gungen von t, s, x gegen diese Säulenfläche sind also den Complementen der Neigungen von t, s, x gegen diese Ebene zu 180° gleich. Man findet so:

Neigung von t gegen die nichtanliegende Säulenfläche M	104° — 27′,1
Neigung von s gegen M	127 — 42,6
Neigung von x gegen M	142 — 11,2.

Es bleibt uns noch übrig, die Neigungen von x gegen x, und von x gegen u und t zu berechnen.

Wenn man das von drei abwechselnden Flächen s gebildete Rhomboëder für sich betrachtet, so erscheinen die Flächen x an demselben als Zuschärfungsflächen seiner Basiskanten; man kann sie also als Flächen eines ungleichschenklichten Dihexaëders ansehen. Es sey im Allgemeinen $\frac{1}{p}Dx$ das Zeichen der Fläche x; da nun $\frac{1}{3}Dx$ das Zeichen der Fläche s ist, so ist offenbar, wenn man die Fläche x als eine Fläche von der Form nPz ansieht (auf das von den Flächen s gebildete Rhomboëder bezogen), $n = \frac{p}{3}$. Man braucht diesen Werth von n nur in die im Vorhergehenden entwickelten Formeln fürs ungleichschenklichte Dihexaëder zu setzen, um den Zusammenhang aller Winkel zu haben, die an den von den Flächen $\frac{1}{p}Dx$ gebildeten Drei- und Dreikantnern vorkommen. Man findet so:

Neigung von x zu x	161° — 49′
Neigung der Kante xx gegen die Axe	33 — 45 *)
Neigung von x gegen die Axe	33 — 16,2
Ebener Winkel zwischen den Kanten xx und xM . .	51 — 42,3
Ebener Winkel zwischen sx und sx (oder ts und ts) .	101 — 36,5.

*) Diejenige Endkante des von den Flächen x gebildeten Drei- und Dreikantners, die über der Endkante des Grundrhomboëders (von den Flächen s gebildet) liegt, wird von der Fläche s, die dem Gegenrhomboëder gehört, grade abgestumpft.

Man denke sich jetzt die benachbarten Flächen x und x' verlängert, bis sie sich in einer Endkante schneiden, die über M liegt, ihr Neigungswinkel sey F. Legt man durch diese Endkante und den Mittelpunct, ferner durch die Endkante xx und den Mittelpunct Ebenen, so schneiden sich diese in der Axe und machen einen Winkel von 30° miteinander; sie bilden ferner mit der Fläche x ein sphärisches Dreieck, in welchem die drei Winkel $\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}F$ und 30° sind; C bedeutet hier die Neigung von x zu x. In diesem Dreieck ist uns überdiess noch eine Seite bekannt, nämlich die Neigung der Kante xx gegen die Axe, welche wir mit r' bezeichnen wollen. Diese vier Stücke hängen durch folgende bekannte Formel zusammen:

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}F = -\text{ cos. } 30^\circ \cdot \text{cos. } \tfrac{1}{2}C + \text{sin } 30^\circ \cdot \text{sin. } \tfrac{1}{2}C \text{ cos. } r'$$

oder da cos. $30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}}$, sin. $30^\circ = \frac{1}{2}$, und, nach den Formeln, die das ungleichschenklichte Dihexaëder von der Form nPz betreffen, cos. $r' = \frac{(3n+1)}{(n-1)\sqrt{3}}$ · cot. $\frac{1}{2}C$, worin wieder $n = \frac{1}{3}p$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}F = \frac{2\sqrt{3}}{p-3} \cdot \text{cos. } \tfrac{1}{2}C.$$

Will man die Neigung der Endkante xx' gegen die Axe wissen, so hat man, wenn man diese Neigung mit r'' bezeichnet, ebenfalls nach den allgemeinen Formeln fürs sphärische Dreieck

$$\text{cos. } 30^\circ \cdot \text{cos. } r' = \text{cot. } r'' \text{ sin. } r' - \text{cot. } \tfrac{1}{2}C \text{ sin. } 30^\circ.$$

Setzt man hierin wieder cos. $30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}}$, sin. $30^\circ = \frac{1}{2}$ und cot. $\frac{1}{2}C = \frac{(p-3)}{(p+1)\sqrt{3}}$ cos. r' und dividirt durch cos. r', so findet man endlich:

$$\text{tg. } r'' = \frac{(p+1)}{2p} \cdot \sqrt{3} \cdot \text{tg. } r' = \frac{2\sqrt{3}}{p} \cdot \text{tg. } \frac{s}{Axe}.$$

Man findet nach diesen Formeln:

Neigung von x gegen x' (F)	148° — 14′
Neigung der Endkante xx' gegen die Axe	34 — 46,5.

Neigung von *s* zu *u*	157°	—49′,1	Neigung von *u* zu *x*	162°	—59′,0
— — *s* zu *x*	165	—31,3	— — *x* gegen *x*	161	—49,0
— — *s* zu *M*	127	—42,6	— — *x* gegen *x′*	148	—14,0
— — *u* zu *P*	130	—57,5	— — *x* gegen *M*	142	—11,3.
— — *u* zu *M*	139	— 2,5			

b. Kantenneigungen oder ebene Winkel.

Winkel zwischen *Pt* u. *Pt*	120°	— 0′,0	Winkel zwischen *ut* u. *us*	110°	—44′,0
— — *Pt* u. *tt*	116	—34,8	— — *xx* u. *xM*	51	—42,3
— — *tt* u. *ts*	126	—50,4	— — *xM* u. *x′M*	126	—58,4
— — *ts* u. *ts*	101	—36,0	— — *xs* u. *xu*	138	—32,0
— — *ts* u. *su*	129	—12,0	— — *xM* u. *uM*	153	—29,2
— — *us* u. *us*	41	—28,0	— — *xM* zu *MM*	116	—30,8.

c. Neigung verschiedener Kanten gegen die Axe.

Neigung von *tt* gegen die Axe	63°	—29′,2	Neigung von *xx* gegen die Axe	33°	—45′,0
Neigung von *ss* gegen die Axe	49	—10,3	Neigung von *xx′* gegen die Axe	34	—46,5.

Anmerkung. Ich habe hier den Beryll und im vorigen Beispiel den Kalkspath nach sehr genauen mit dem Reflexionsgoniometer angestellten Messungen bearbeitet. Haüy, der sich keiner genauen Messinstrumente bediente, und deshalb gezwungen war, zu Annäherungen seine Zuflucht zu nehmen, giebt diesen beiden so sehr voneinander verschiedenen Fossilien dieselbe Krystallisation, d. h. dieselben Winkel, mit dem einzigen Unter-

schiede, dass beim Kalkspath, als zum rhomboëdrischen System gehörig, die meisten Flächen nur in halber Anzahl vorkommen. Er nimmt nämlich die Neigung von *P* beim Kalkspath nnd von *s* beim Beryll gegen die Axe zu 45° an. Alsdann hat (siehe die Haüyschen Kupfertafeln)

P beim Kalkspath dieselbe Lage als *s* beim Beryll.

π — — — *l* — —

n — — — *x* — —

Die Fläche *u* des Berylls scheint beim Kalkspath nicht vorzukommen; ihr Haüysches Zeichen auf das nächst schärfere Rhomboëder $E^{1\,1}E$ bezogen wäre offenbar $\frac{B}{2}$.

Vom Quadratoctaëder insbesondere.

59. Wir wollen bei den Formen, die ausser den schärfern und stumpfern Octaëdern noch im quadratoctaëdrischen System vorkommen können, eben so verfahren, wie beim Dihexaëder, d. h. wir wollen uns gleich an ein Beispiel wenden. Beim Idocras kommt zuweilen eine Form vor, die Fig. 108 abgebildet ist, und die Haüy variété ennéacontaédre nennt. Die Haüysche Grundform dieses Fossils ist ein grades Prisma mit quadratischer Basis, Fig. 109; wir wollen das von den Flächen c gebildete Quadratoctaëder als die Grundform ansehen. In Bezug auf diese Grundform sind die Zeichen der Flächen nach Haüy, Weiss und uns folgende:

nach uns;	nach Weiss;	nach Haüy.
$c = Q$	$a:a:c$	$\overset{2}{A}$
$P = Q^{\infty}$	$\infty a:\infty a:c$	P
$M = x^{0}$	$\infty a:a:\infty c$	M
$o = x$	$a:\infty a:c$	$\overset{3}{B}$
$r = Q^{\frac{1}{4}}$	$a:a:4c$	$\frac{1}{2}A$
$z = \frac{1}{2}Qx$	$\frac{1}{2}a:a:c$	$({}^{1}A^{1}B^{2}G^{1})$
$s = \frac{1}{3}Qx$	$\frac{1}{3}a:a:c$	$({}^{3}_{2}A\overset{3}{A}B^{2}G^{1})$
$x = \frac{1}{4}Qx$	$\frac{1}{4}a:a:c$	$({}^{2}AA^{2}B^{2}G^{1})$.

Die Neigung von c zu c ist $129^{0}— 21'$.

Volumen	0,28878
Oberfläche	2,7715.

2) Die Neigungen der Octaëderflächen gegen die Säulenflächen sind zu leicht zu finden, als dass wir nöthig hätten besonders dabei zu verweilen.

3) Winkel an den von den Flächen *z*, *s*, *x* gebildeten Dioctaëdern.

Wir wollen die Dioctaëder erst im Allgemeinen betrachten. Es sey Fig. 110 ein Dioctaëder von der Form *mQx*. Die Flächen *t*, die dieses Dioctaëder bilden, erscheinen hier als Zuschärfungsflächen der Endkanten *x* des Grundoctaëders; die andere Endkante, die bloss dem Dioctaëder gehört, wollen wir mit *y* bezeichnen; ihre Neigung gegen die Axe sey *r'*. Die Neigung zweier benachbarter Dioctaëderflächen an der Kante *x* sey *B*, an der Kante *y* sey sie *C*. Es sey ferner *b* der ebene Winkel an der Spitze des Dioctaëders; *c* und *d* seyen die ebenen Winkel der Dioctaëderfläche an der Basis; diese Winkel sind auf der Figur angemerkt. Die Neigung der Dioctaëderfläche gegen die Axe sey *t'*. Dem Grundoctaëder bleiben die schon lange eingeführten Zeichen.

Legt man zwei Ebenen durch die Endkanten *x* und *y*, die sich in der Axe des Octaëders schneiden, so bilden diese mit der Dioctaëderfläche *t* ein sphärisches Dreieck, das Fig. 111 besonders abgebildet ist, dessen Winkel $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$, 45°, und dessen Seiten *b*, *r*, *r'* sind. In diesem Dreieck hängen die Winkel 45°, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ und *r* durch folgende allgemeine Formel zusammen:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}C = -\cos.\ 45^\circ \cdot \cos.\ \tfrac{1}{2}B + \sin.\ 45^\circ \cdot \sin.\ \tfrac{1}{2}B \cos.\ r.$$

Nun ist aber cos. $45° = \sin. 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, cos. $r = \cot. \frac{1}{2}A$, und cot. $\frac{1}{2}A = m \cot. \frac{1}{2}B$, also:

$$\cos. \tfrac{1}{2}C = \frac{m-1}{\sqrt{2}} \cos. \tfrac{1}{2}B.$$

Will man r' finden, so hat man nach der III^ten Grundformel fürs sphärische Dreieck:

$$\cos. 45° \cdot \cos. r = \cot. r' \sin. r - \cot. \tfrac{1}{2}B \sin. 45°.$$

Man setze hierin wieder cos. $45° = \sin. 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und cot. $\frac{1}{2}B = \frac{1}{m} \cot. \frac{1}{2}A$; dann cot. $\frac{1}{2}A = \cos. r$, und dividire endlich durch cos. r, so findet man:

$$\text{tg. } r' = \frac{m\sqrt{2}}{m+1} \cdot \text{tg. } r = \frac{2m}{m+1} \cdot \text{tg. } i.$$

Den ebenen Winkel b an der Spitze des Dioctaëders findet man aus den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks (Fig. 111) $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ und $45°$, auf die gewöhnliche Weise:

$$\cos. \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left(\frac{\cos. \frac{1}{2}(45° + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C) \cos. \frac{1}{2}(45° + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)}{\sin. \frac{1}{2}B \sin. \frac{1}{2}C}\right)}.$$

Für die Neigung i' der Endkante y gegen die Axe, welche durch ein Perpendikel aus der Spitze des sphärischen Dreiecks (Fig. 111) auf die Basis b gefällt repräsentirt wird, haben wir offenbar:

$$\sin. i' = \sin. \tfrac{1}{2}B \sin. r = \sin. \tfrac{1}{2}C \sin. r'.$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man zwei andere entwickeln, die den Zusammenhang zwischen $\frac{1}{2}B$ und r, und zwischen $\frac{1}{2}C$ und r' geben. Man dividire diese Gleichung durch cos. r, so erhält man:

$$\sin. \tfrac{1}{2}B \text{ tg. } r = \sin. \tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin. r'}{\cos. r}.$$

Setzt man nun cos. $r = \cot. \frac{1}{2}A = m \cot. \frac{1}{2}B$, und dividirt auf beiden Seiten durch cot. $\frac{1}{2}B$, so bekommt man:

$$\cos. \tfrac{1}{2}B \text{ tg. } r = \frac{1}{m} \sin. \tfrac{1}{2}C \sin. r'.$$

Hierin nun noch $\frac{\sqrt{2}}{m-1}$ cos. $\frac{1}{2}C$ für cos. $\frac{1}{2}B$, und $\frac{m+1}{m\sqrt{2}}$ tg. r' für tg. r substituirt, giebt endlich:

$$\text{cos. } r' = \frac{m+1}{m-1} \text{ cot. } \tfrac{1}{2}C.$$

Die Neigung der Dioctaëderflächen an den Basiskanten ist, da die Basiskanten in einer Ebene liegen (nicht im Zikzak, wie bei den ungleichschenklichten Dihexaëdern), dem Complement der doppelten Neigung der Flächen gegen die Axe zu 180° gleich.

Die Oberfläche O des Dioctaëders ist offenbar:

$$\frac{8 \text{ sin. } b}{\text{cos. } r \text{ cos. } r'}$$

oder da, nach der ersten Grundformel fürs sphärische Dreieck sin. $b = \frac{\text{sin. } 45^\circ \cdot \text{sin. } r}{\text{sin. } \frac{1}{2}C}$; ferner cos. $r' = \frac{m+1}{m-1}$ cot. $\frac{1}{2}C$, und cos. $\frac{1}{2}C = (m-1)\sqrt{\frac{1}{2}}$ cos. $\frac{1}{2}B$

$$O = \frac{8 \text{ tg. } r}{(m+1) \text{ cos. } \frac{1}{2}B}.$$

Der körperliche Inhalt des Dioctaëders ist offenbar, die halbe Axe $= 1$ gesetzt:

$$K = \frac{8}{3\sqrt{2}} \text{ tg. } r \text{ tg. } r' = \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \text{tg.}^2 r.$$

Ist $m < 1$, so erscheinen die Dioctaëderflächen nicht als Zuschärfungen der Endkante des Grundoctaëders, sondern an der Basisecke, s. Fig. 112. Die Formeln bleiben übrigens dieselben; hier ist B die Neigung von t zu t; C die Neigung von t zu t' *); t' zu t' ist ein Winkel, den wir im Vorhergehenden nicht betrachtet haben und den wir mit D bezeichnen wollen; r' ist die Neigung der Kante tt' gegen die Axe. Um den Winkel D und die Neigung von $t't'$ gegen die Axe oder ϱ zu finden, bedenke man,

*) Wenn man die Fläche t (Fig. 112) durch die Endkante des Grundoctaëders legt, so wird C eigentlich zu einem einspringenden Winkel, und der Ausdruck von cot. $\frac{1}{2}C$ negativ. Man nimmt ihn positiv, um denjenigen Winkel zu haben, den wir eigentlich wissen wollen.

$m = \frac{1}{2}$.

Neigung von z zu z (B)	93° — 9′,
Neigung von z zu z' (C)	151 — 52,2
Neigung von z' zu z' (D)	139 — 47,6
Neigung der Kante $z'z'$ gegen die Axe (ϱ)	42 — 56,8
Neigung der Kante zz' gegen die Axe (r')	41 — 16,0
Neigung von z gegen die Axe (i')	39 — 46,6
Ebener Winkel an der Spitze des Dioctaëders . . .	29 — 57,2
Volumen des Dioctaëders, die halbe Axe des Grundoctaëders = 1 gesetzt	12,321
Oberfläche	28,886.

$m = \frac{1}{3}$

Neigung von s zu s (B)	70° — 19′,2
Neigung von s zu s' (C)	134 — 39,8
Neigung von s' zu s' (D)	148 — 22,3
Neigung der Kante $s's'$ gegen die Axe (ϱ)	31 — 49,2
Neigung der Kante ss' gegen die Axe (r')	33 — 24,7
Neigung von s gegen die Axe (i')	30 — 29
Ebener Winkel an der Spitze des Dihexaëders . . .	23 — 50
Volumen des Dioctaëders, die halbe Axe des Grundoctaëders = 1 gesetzt	20,792
Oberfläche	40,985.

$m = \frac{1}{4}$

Neigung von x zu x (B)	55° — 41′,6
Neigung von x zu x' (C)	124 — 4,4

Man kann hier noch die Neigungen von z, s, x gegen c hinzufügen, die man durch eine blosse Subtraction findet. Es ist nämlich offenbar $\frac{z}{c} = 180^\circ - (\frac{1}{2}\frac{c}{c} - \frac{1}{2}\frac{z}{z})$:

Neigung von c zu z	$161^\circ - 54',0$
Neigung von c zu s	$150 - 29,1$
Neigung von c zu x	$143 - 10,3$.

Auf eine ähnliche Weise kann man die Neigungen von z, s, x gegen die Säulenfläche d finden.

Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe . .	35° — 15′ —51″,8
Neigung der Endkante gegen die Axe . . .	45 — 0 — 0,0
Ebene Winkel der Octaëderfläche	60 — 0 — 0,0
Volumen des Octaëders, halbe Axe = 1 . . .	1,33333
Oberfläche des Octaëders, halbe Axe = 1 . .	6,928203.

2) Winkel am Würfel (Fig. 114).

Neigung der benachbarten Flächen	90° — 0′ — 0″,0
Ebener Winkel der Fläche	90 — 0 — 0,0
Neigung der Kante gegen die Eckenaxe . . .	54 — 44 — 8,2
Neigung der Fläche gegen die Eckenaxe . . .	35 — 15 — 51,8
Volumen, halbe Flächenaxe = 1	8,0000
Volumen, halbe Eckenaxe = 1	1,5396
Oberfläche, halbe Flächenaxe = 1	24,0000
Oberfläche, halbe Eckenaxe = 1	8,0000.

3) Winkel am Rhombendodecaëder (Granatoëder) Fig. 115.

Da die Fläche des Rhombendodecaëders die Kanten der Octaëders und Würfels grade abstumpft, so ist es als der nächst stumpfere Körper zu betrachten.

Unter Octaëderaxe versteht man hier die (Ecken-) Axe des Grundoctaëders, und unter Würfelaxe die Eckenaxe des Grundwürfels.

Neigung der benachbarten Flächen des Rhombendodecaëders	120° — 0′ — 0″,0
Neigung der Kante gegen die Octaëderaxe . .	54 — 44 — 8,2
Neigung der Kante gegen die Würfelaxe . .	70 — 31 — 43,6
Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	45 — 0 — 0,0

Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	54° — 44′ — 8″,2
Stumpfer ebener Winkel der Fläche . . .	109 — 28 — 16,4
Scharfer ebener Winkel der Fläche . . .	70 — 31 — 43,6
Volumen, Octaëderhalbaxe = 1	2,00000
Volumen, Würfelhalbaxe = 1	3,079202 $(\frac{16}{3\sqrt{3}})$
Oberfläche, Octaëderhalbaxe = 1	8,48528 $(6\sqrt{2})$
Oberfläche, Würfelhalbaxe = 1	11,31370 $(8\sqrt{2})$.

4) Winkel am Trapezoïdal-Icositetraëder (Leucitoëder, *Weiss*; zweikantiges Tetragonal-Icositetraëder, *Mohs*) Fig. 116.

Seine Flächen stumpfen die Kanten des Rhombendodecaëders grade ab; man kann sie also als einem zweiten stumpferen Octaëder angehörig ansehen.

Neigung der benachbarten Flächen an den kürzeren Kanten	146° — 26′ —33″,7
Neigung der benachbarten Flächen an den längern Kanten	131 — 48 — 37,1
Neigung der längern Kante gegen die Octaëderaxe	63 — 26 — 5,8
Neigung der kürzern Kante gegen die Würfelaxe	79 — 58 — 30,0
Neigung der Flächen gegen die Octaëderaxe . .	54 — 44 — 8,2
Neigung der Flächen gegen die Würfelaxe . .	70 — 31 — 43,6
Ebener Winkel zwischen den kürzern Kanten .	117 — 2 — 8,5
Ebener Winkel zwischen den längern Kanten .	78 — 27 — 47,0
Ebener Winkel zwischen der längern und kürzern Kante	82 — 15 — 2,3

Volumen des Leucitoëders, Octaëderhalbaxe = 1 . 2,6666

Volumen des Leucitoëders, Würfelhalbaxe = 1 . . 4,105603 $(\frac{64}{9\sqrt{3}})$

Oberfläche des Leucitoëders, Würfelhalbaxe = 1 . 6,53197 $(\frac{8}{3}\sqrt{6})$

Oberfläche des Leucitoëders, Octaëderhalbaxe = 1 4,89898 $(2\sqrt{6})$.

4_a) Winkel eines Leucitoïds, dessen Flächen zuweilen vorkommen.

Bei diesem Körper ist die Tangente der Neigung der längern Endkante gegen die Octaëderaxe = 3, und die Tangente der Neigung der kürzern Kante gegen die Würfelaxe = $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Neigung der benachbarten Flächen an der kürzern Kante 129° — 31′ — 16″,4

Neigung der benachbarten Flächen an der längern Kante 144 — 54 — 11,5

Neigung der längern Kante gegen die Octaëderaxe 71 — 33 — 54,2

Neigung der kürzern Kante gegen die Würfelaxe . 74 — 12 — 24,6

Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . . 64 — 45 — 38,2

Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . . 60 — 30 — 13,6

Ebener Winkel zwischen den kürzern Kanten . . 112 — 53 — 7,3

Ebener Winkel zwischen den längern Kanten . . 84 — 15 — 39,0

Ebener Winkel zwischen der längern und kürzern Kante 81 — 25 — 36,9

5) Winkel am Pyramidenwürfel (hexaëdrisches Trigonal-Icositetraëder, *Mohs*) Fig. 117.

Seine Flächen erscheinen als Zuschärfungen der Würfelkanten. Es giebt drei Arten dieser Körper, die in ihren Winkeln verschieden sind. Die Tangente des halben Neigungswinkels der Flächen an der Würfelkante ist bei der ersten Art gleich 2, bei der zweiten gleich 3, bei der dritten gleich 5. Bei Berechnung der Winkel kann man den Würfel als ein

c. Pyramidenwürfel der dritten Art.

Neigung der Flächen an der Würfelkante . .	157°	22′	46″,6
Neigung der Flächen an der Endkante der Pyramide	133	48	47,0
Neigung der Flächen gegen die Würfelaxe . .	53	11	28,8
Neigung der Flächen gegen die Octaëderaxe . .	56	18	36,7
Neigung der Pyramidenendkante gegen die Octaëderaxe	60	26	50,0
Neigung der Pyramidenendkante gegen die Würfelaxe	64	45	38,2
Ebener Winkel an der Spitze der Pyramide . .	79	31	27,6
Ebener Winkel an der Basis der Pyramide . .	50	14	16,2

6) Winkel am Pyramidenoctaëder (octaëdrisches Trigonal-Icositetraëder) Fig. 118.

Die Flächen dieser Formen erscheinen als Zuschärfungen an den Kanten des regulären Octaëders. Bei der Rechnung kann man sie entweder als Dioctaëderflächen betrachten und sie so behandeln, wie beim Quadratoctaëder, oder man nimmt jede über einer Octaëderfläche sich erhebende Pyramide für sich, als die Spitze eines Rhomboëders.

Es ist nur eine Art bekannt, bei welcher die Tangente der halben Neigung zweier Flächen an der Octaëderkante 2 Mal so gross ist, als die Tangente der halben Neigung der Octaëderflächen selbst.

Neigung der Flächen an der Octaëderkante . .	141°	3′	27″,2
Neigung der Flächen an der Endkante der Pyramide	152	44	2,7
Neigung der Flächen gegen die Würfelaxe *) . .	74	12	24,6

*) Die durch die Endspitze der Pyramide und durch den Mittelpunct geht.

Neigung der Fläche gegen die Axe der Pyramide oder gegen die Kantenaxe des Würfels . . .	70° — 53′ — 36″,25
Neigung der Kanten gegen die Eckenaxe des Würfels	70 — 31 — 43,6
Neigungen der Kanten gegen die Octaëderaxe .. .	54 — 44 — 8,2 56 — 18 — 35,8
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	67 — 47 — 32,5
Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	53 — 18 — 2,8.

7_a) Die Achtundvierzigflächner, Fig. 119 (Tetracontaoctaëder *Mohs*), werden von achtund vierzig ungleichseitigen Dreiecken begrenzt, welche achtseitige Pyramiden über den Würfelflächen und sechsseitige über den Octaëderflächen bilden. Das Pyramidengranatoëder ist eigentlich nur eine Varietät derselben. Man kann diese Flächen ansehen als Zuschärfungen an den Endkanten der Pyramiden gewisser Pyramidenwürfel. Es kommen in der Natur zwei Formen dieser Art vor.

α) Die Tangente der Neigung der Fläche des zum Grunde liegenden Pyramidenwürfels gegen die Octaëderaxe ist $\frac{1}{4}$ Mal so gross als die Tangente der Neigung des Rhombendodecaëders gegen dieselbe Axe; die Tangente des halben Zuschärfungswinkels ist 2 Mal so gross, als die Tangente der halben Neigung der Pyramidenwürfelflächen an den zugeschärften Kanten.

β) Die Tangente der Neigung der Fläche des zum Grunde liegenden Pyramidenwürfels gegen die Octaëderaxe ist $\frac{1}{3}$ Mal so gross, als die Tangente der Neigung des Rhombendodecaëders gegen dieselbe Axe; die Tangente des halben Zuschärfungswinkels ist 3 Mal so gross, als die Tangente der halben Neigung der Pyramidenwürfelflächen an der zugeschärften Kante.

β. Winkel am Achtundvierzigflächner zweiter Art.

Neigung der Flächen an den Endkanten der achtseitigen Pyramide, die sich über die Würfelflächen erhebt . . .	an den Endkanten, die mit den Kanten des zum Grunde liegenden Pyramidenwürfels zusammenfallen .	162°	— 14′	— 50″,0
	an den andern Endkanten	154	— 47	— 28,4
Neigung der Flächen an den Basiskanten . .		144	— 2	— 57,9
Neigung der Endkanten, die mit den Kanten des Pyramidenwürfels zusammenfallen, gegen die Octaëderaxe		62	— 3	— 41,8
Neigung derselben Endkanten gegen die Würfelaxe		63	— 12	— 10,0
Neigung der andern Endkanten gegen die Octaëderaxe		63	— 26	— 5,8
Neigung der andern Endkanten gegen die Kantenaxe des Würfels		71	— 33	— 54,2
Neigung der Basiskanten gegen die Würfelaxe .		67	— 59	— 53,8
Neigung der Basiskanten gegen die Kantenaxe des Würfels		76	— 44	— 14,4
Neigung der Flächen gegen die Octaëderaxe . .		60	— 47	— 38,7
Neigung der Flächen gegen die Würfelaxe . .		61	— 52	— 28,3
Neigung der Flächen gegen die Kantenaxe des Würfels		67	— 47	— 32,6
Ebener Winkel an der Spitze der Pyramide . .		39	— 48	— 3,4
Ebene Winkel an der Basis der Pyramide . .		85	— 50	— 22,8
		54	— 21	— 33,8

α. Winkel am Pentagonaldodecaëder erster Art.

Neigung der Flächen an der horizontalen Kante .	143°	7′	48″,4
Neigung der Flächen an den schiefen Kanten .	107	27	27,4
Neigung der einen Fläche gegen die horizontale Kante	108	26	5,8
Ebener Winkel zwischen der horizontalen und schiefen Kante	96	1	2,2
Ebener Winkel zwischen den schiefen Kanten .	141	16	50,5
Ebener Winkel an der Ecke des eingeschlossenen Würfels	103	20	32,6
Neigung der schiefen Kanten gegen die Würfelaxe	64	56	3,0
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	46	54	40,6

β. Winkel am Pentagonaldodecaëder zweiter Art.
Gewöhnliches Pyritoëder.

Neigung der Flächen an der horizontalen Kante .	126°	52′	11″,6
Neigung der Flächen an den schiefen Kanten .	113	34	41,4
Neigung der einen Fläche gegen die horizontale Kante	116	33	54,2
Ebener Winkel zwischen der horizontalen und schiefen Kante	102	36	15,8
Ebener Winkel zwischen den schiefen Kanten .	121	35	17,3
Ebener Winkel an der Ecke des eingeschlossenen Würfels	106	36	5,6
Neigung der schiefen Kante gegen die Würfelaxe .	67	47	32,4
Neigung der Flächen gegen die Würfelaxe . .	50	46	6,5

γ. Winkel am Pentagondodecaëder dritter Art.

Neigung der Flächen an der horizontalen Kante .	112°— 37′ —11″,6
Neigung der Flächen an den schiefen Kanten .	117 — 29 — 11,1
Neigung der einen Fläche gegen die horizontale Kante	123 — 41 — 23,3
Ebener Winkel zwischen der horizontalen und schiefen Kante	110 — 17 — 39,8
Ebener Winkel zwischen den schiefen Kanten .	102 — 35 — 39,3
Ebener Winkel an der Ecke des eingeschlossenen Würfels	108 — 24 — 30,6
Neigung der schiefen Kante gegen die Würfelaxe .	69 — 29 — 9,2
Neigung der Flächen gegen die Würfelaxe . .	53 — 11 — 23,0

2) Winkel am pyritoëdrischen Achtundvierzigflächner, Fig. 121 und 122. (Dreikantiges Tetragonal-Icositetraëder *Mohs.*)

Diese Form entsteht eben so aus dem Achtundvierzigflächner, wie das Pentagonaldodecaëder aus dem Pyramidenwürfel, durch Wegfallen der Hälfte der Flächen, indem sich nämlich an jeder Kante des zum Grunde liegenden Würfels zwei Flächen auf derselben Seite der Kante so verlängern, dass die Flächen auf der andern Seite der Kante verschwinden. So erscheint über der Mitte der Fläche des eingeschlossenen Würfels eine vierflächige Ecke, an der Würfelecke eine dreiflächige (mit gleichen Neigungen an den Kanten) und da, wo sonst am Pentagondodecaëder diejenigen Ecken liegen, die die horizontale Kante verbindet, entstehen vierflächige Ecken von zwei gleichen und zwei ungleichen Neigungen an den Kanten. Die Ebenen, welche diesen Körper begrenzen, sind Vierecke, die sich dadurch von den-

jenigen des Leucitoëders unterscheiden, dass sie von keiner ihrer Diagonalen in zwei gleichschenklichte Dreiecke getheilt werden. Wir wollen diejenigen Kanten, die wie die horizontale Kante des Pentagondodecaëders liegen, die ersten Kanten nennen; diejenigen, die den Durchschnittspunct der ersten Kanten mit der Kantenaxe des Würfels verbinden, die zweiten (characteristische Kanten *Mohs*), diejenigen endlich, die von den Endpuncten der ersten Kanten nach der Würfelecke gehen, die dritten Kanten nennen

Es giebt dreierlei Formen dieser Art, die beiden ersten entstehen aus den beiden bekannten Achtundvierzigflächnern auf die eben angeführte Weise; die dritte entsteht eben so aus dem Pyramidengranatoëder, dessen Winkel oben angegeben sind.

Die Rechnungen leitet man hier so: Die Neigung der Flächen an der zweiten Kante ist uns aus dem Vorhergehenden bekannt (siehe die Achtundvierzigflächner), eben so die Neigung der zweiten Kante gegen die Octaëderaxe. Legt man nun durch die erste Kante und den Mittelpunct, und durch die zweite Kante und den Mittelpunct zwei Ebenen, so bilden diese mit der Fläche des pyritoëdrischen Achtundvierzigflächners ein sphärisches rechtwinklichtes Dreieck, in welchem

$$\cos. G = \sin. F \cos. g$$

$$\text{tg. } f = \text{tg. } F \sin. g$$

$$\text{tg. } h = \frac{\text{tg. } g}{\cos. F};$$

hier bedeutet F die halbe Neigung der Flächen an der zweiten Kante, g die Neigung dieser Kante gegen die Octaëderaxe, G die halbe Neigung der Flächen an der ersten Kante, f die Neigung der ersten Kante gegen die Octaëderaxe, und h den ebenen Winkel zwischen der ersten und zweiten Kante.

Bezeichnet man nun noch mit D die Neigung der Flächen an denjenigen Kanten, die in der Würfelaxe zusammen kommen, so wird offenbar die vierflächige Ecke, die da liegt, wo sonst diejenigen Ecken des Pentagondodecaëders, welche die horizontale Kante verbindet, hinfallen, von den Neigungen $2F$, $2G$ und D (welche letztere an jeder solcher Ecke 2 Mal vorkommt) gebildet. Theilt man diese Ecke in zwei Hälften durch einen Schnitt, der durch die erste Kante und den Mittelpunct geht, so bildet jede dieser Hälften ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Winkel, nämlich G und F, und die eingeschlossene Seite, nämlich $180° - (f + g - 90°)$, bekannt sind; man kann also den dritten Winkel D, und die beiden unbekannten Seiten, nämlich den ebenen Winkel zwischen der ersten und dritten, und den ebenen Winkel zwischen der zweiten und dritten Kante, berechnen. Man bedient sich hiezu am besten der Gaussischen Formeln.

Die dreiflächige Ecke endlich, die da liegt, wo die Würfelecken hinfallen, behandelt man wie die Spitze eines Rhomboëders.

Man findet auf diese Art:

a. die Winkel am pyritoëdrischen Achtundvierzigflächner erster Art.

Neigung der Flächen an den zweiten Kanten ($2F$)	160° — 32′ — 13″,4
Neigung der Flächen an den ersten Kanten ($2G$)	119 — 3 — 33,4
Neigung der Flächen an den dritten Kanten (D)	131 — 4 — 56,4
Ebener Winkel zwischen den ersten und zweiten Kanten (h)	84 — 12 — 32,2
Ebener Winkel zwischen den ersten und dritten Kanten	104 — 38 — 24,7
Ebener Winkel zwischen den zweiten und dritten Kanten	57 — 47 — 17,1

Ebener Winkel an der Würfelecke	113°— 21′—46″,0
Neigung der ersten Kanten gegen die Octaëderaxe (*f*)	78 — 41 — 24,2
Neigung der zweiten Kanten gegen die Octaëderaxe (*g*)	59 — 2 — 10,5
Neigung der dritten Kanten gegen die Würfelaxe .	74 — 46 — 29,4
Neigung der ersten Kante gegen diejenige zweite, mit welcher sie zusammen trifft	132 — 16 — 25,3
Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	57 — 41 — 18,5
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	61 — 26 — 21,1

β. Die Winkel des pyritoëdrischen Achtundvierzigflächners zweiter Art.

Neigung der Flächen an den zweiten Kanten .	154°— 47′—28″,4
Neigung der Flächen an den ersten Kanten . .	128 — 14 — 47,8
Neigung der Flächen an den dritten Kanten . .	131 — 48 — 37,2
Ebener Winkel zwischen den ersten und zweiten Kanten	83 — 46 — 23,3
Ebener Winkel zwischen den ersten und dritten Kanten	96 — 13 — 33,3
Ebener Winkel zwischen den zweiten und dritten Kanten	66 — 25 — 14,9
Ebener Winkel an der Würfelaxe	113 — 34 — 38,6
Neigung der ersten Kanten gegen die Octaëderaxe .	75 — 57 — 49,5
Neigung der zweiten Kanten gegen die Octaëderaxe	63 — 26 — 5,8
Neigung der dritten Kanten gegen die Würfelaxe .	75 — 2 — 12,4
Neigung der ersten Kante gegen diejenige zweite, mit welcher sie zusammen trifft	130 — 36 — 4,7
Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	60 — 47 — 38,7
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	61 — 52 — 28,3

γ. Die Winkel des pyritoëdrischen Achtundvierzigflächners dritter Art.

Neigung der Flächen an der zweiten Kante . .	148° — 59′ — 50″,1
Neigung der Flächen an der ersten Kante . .	115 — 22 — 36,9
Neigung der Flächen an der dritten Kante . .	141 — 47 — 12,5
Ebener Winkel zwischen der ersten und zweiten Kante	79 — 53 — 50,6
Ebener Winkel zwischen der ersten und dritten Kante	106 — 59 — 5,4
Ebener Winkel zwischen der zweiten und dritten Kante	57 — 0 — 50,0
Ebener Winkel an der Würfelaxe	116 — 6 — 14,0
Neigung der ersten Kanten gegen die Octaëderaxe	71 — 33 — 54,2
Neigung der zweiten Kanten gegen die Octaëderaxe	56 — 18 — 35,8
Neigung der dritten Kanten gegen die Würfelaxe	78 — 27 — 46,9
Neigung der ersten Kante gegen diejenige zweite, mit welcher sie zusammen trifft	142 — 7 — 30,0
Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	53 — 18 — 2,8
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	67 — 47 — 32,3

II. Formen mit halbzähligen und geneigten Flächen (tetraëdrische *Weiss*).

1) Winkel am regulären Tetraëder, Fig. 123.

Neigung der benachbarten Flächen	70° — 31′ — 43″,6
Ebener Winkel	60 — 0 — 0,0
Neigung der Endkante gegen die Axe*) (Eckenaxe des Würfels)	35 — 15 — 51,8
Neigung der Fläche gegen dieselbe Axe . . .	19 — 28 — 16,4

*) Ich nenne hier Axe des Tetraëders eine Linie aus einer Ecke desselben senkrecht nach der gegenüberliegenden Fläche gezogen.

2) Winkel am Pyramidentetraëder Fig. 124 (Trigonaldodecaëder *Mohs*).

Die Flächen dieses Körpers erscheinen als Zuschärfungsflächen der Kanten des Tetraëders, Es giebt zwei Arten dieser Form. Die eine ist das Leucitoëder, die andere das Leucitoïd mit halbzähligen Flächen.

α. Winkel am Pyramidentetraëder erster Art oder am tetraëdrischen Leucitoëder.

Neigung der Flächen an der Endkante der dreiseitigen Pyramide	146°	26′	33″,7
Neigung der Flächen an der Tetraëderkante . .	109	28	16,4
Ebener Winkel an der Spitze der Pyramiden .	117	2	8,5
Ebener Winkel an der Basis der Pyramiden . .	31	28	55,8
Neigung der Fläche gegen die Axe der Pyramide (Würfelaxe)	70	31	43,6
Neigung der Endkante der Pyramide gegen dieselbe Axe	79	58	30,0
Neigung der Endkante der Pyramide gegen die Tetraëderaxe (andere Würfelaxe)	29	29	46,4

β. Winkel am Pyramidentetraëder zweiter Art oder am tetraëdrischen Leucitoïd.

Neigung der Flächen an der Endkante d. dreiseitig. Pyramide	129°	31′	16″,4
Neigung der Flächen an der Basiskante . . .	129	31	16,4
Ebener Winkel an der Spitze der Pyramiden .	112	53	7,3
Ebener Winkel an der Basis der Pyramiden . .	33	33	26,4
Neigung der Fläche gegen die Axe der Pyramide .	60	30	13,6
Neigung der Endkante der Pyramide gegen dieselbe Axe	74	12	24,6
Neigung der Endkante der Pyramide gegen die Tetraëderaxe	35	15	51,8

3) Winkel am tetraëdrischen Pyramidenoctaëder Fig. 125 (zweikantiger Tetragonaldodecaëder *Mohs*).

Diese Flächen erscheinen als Zuspitzungsflächen der Tetraëderecken, auf die Tetraëderflächen grade aufgesetzt. So werden dreiflächige Ecken über der Mitte der Tetraëderflächen und an den Tetraëderecken, und vierflächige über der Mitte der Tetraëderkanten gebildet. Die Flächen sind Trapeze, mit zwei längern und zwei kürzern Seiten, von derselben Art, wie beim Leucitoëder, doch mit andern Winkeln.

Neigung der Flächen an den Endkanten der dreiseitigen Pyramiden, die sich über die Tetraëderflächen erheben	152° — 44′ — 2″,7
Neigung der Flächen an den Basiskanten . .	90 — 0 — 0,0
Ebene Winkel an der Spitze der Pyramiden . .	118 — 4 — 20,9
Ebene Winkel an der Basis der Pyramiden . . .	90 — 0 — 0,0 75 — 57 — 49,6*)
Neigung der Endkante der Pyramiden gegen die Axe derselben	81 — 57 — 2,0
Neigung der Fläche gegen dieselbe Axe . . .	74 — 12 — 24,6
Neigung der Endkante gegen die Kantenaxe des Tetraëders (oder gegen die Octaëderaxe) . .	43 — 18 — 49,8
Neigung der Fläche gegen die Axe des Tetraëders .	35 — 15 — 51,8

*) Dieses ist der Winkel zwischen je zwei ungleichen Seiten des Trapezes an der vierflächigen Ecke. Der ebene Winkel von 90° liegt an der dreiflächigen Ecke des Körpers oder an der Ecke des zum Grunde liegenden Tetraëders.

4) Winkel am tetraëdrischen Pyramidengranatoëder und Achtundvierzigflächner Fig. 126 (tetraëdrisches Trigonal-Icositetraëder *Mohs*).

Diese Flächen erscheinen als sechsflächige Zuspitzungen der Tetraëderecken, die Zuspitzungsflächen paarweise schief auf die Tetraëderkanten aufgesetzt. Es erheben sich so sechsflächige Pyramiden über die Tetraëderflächen; an den Tetraëderecken erscheinen ebenfalls sechsflächige Ecken, über den Mitten der Kanten hingegen vierflächige Ecken. Die Begrenzungsflächen dieser Form sind ungleichseitige Dreiecke. Es giebt drei Arten davon, je nachdem es das Pyramidengranatoëder oder die beiden andern Achtundvierzigflächner sind, die hier halbzählig auftreten. Ihre Winkel sind uns zum Theil aus den vorigen bekannt und die unbekannten lassen sich leicht finden; denn wenn man durch diejenige Endkante der sich über der Tetraëderfläche erhebenden Pyramide, welche durch die Kantenaxe des Tetraëders geht, und durch dessen Mittelpunct eine Ebene legt, und eine andere Ebene durch den Mittelpunct und durch die Basiskante derselben Pyramide, die durch dieselbe Kantenaxe geht, so schneiden sich diese beiden Ebenen unter einem rechten Winkel, und bilden mit der Fläche des betrachteten Körpers ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, in welchem ein Winkel und eine Seite, nämlich die halbe Neigung der Flächen des Körpers an der eben bezeichneten Endkante der Pyramide, und die Neigung dieser Endkante gegen die Kantenaxe des Tetraëders, aus dem Vorigen bekannt sind; man kann also die übrigen Stücke, den ebenen Winkel an der Basis der Pyramide, die halbe Neigung der Flächen an der Basiskante und die halbe Neigung der Basiskanten gegeneinander, leicht finden; diess sind die Stücke, die uns aus dem Vorigen nicht bekannt sind. Bei

β. Winkel am tetraëdrischen Achtundvierzigflächner der ersten Art.

Neigung der Flächen an den Endkanten der Pyramide	152°	20′	22″,4
Neigung der Flächen an den Basiskanten . .	122	52	42,0
Ebener Winkel zwischen den Endkanten der Pyramide	53	46	43,8
Ebene Winkel an der Basis der Pyramide . .	82 43	17 55	56,1 20,1
Neigung der Endkanten der Pyramide gegen ihre Axe	64	45	38,2
Neigung der Endkanten der Pyramide gegen die Tetraëderaxe	44	42	38,2
Neigung der Endkante der Pyramide gegen die Kantenaxe des Tetraëders	60	30	13,6
Neigung der Basiskante gegen die Kantenaxe des Tetraëders	74	12	24,6
Neigung der Basiskante gegen die Tetraëderaxe .	51	3	27,2
Neigung der Flächen gegen die Axe der Pyramide	61	26	21,1
Neigung der Flächen gegen die Tetraëderaxe . .	43	5	19,5
Neigung der Fläche gegen die Kantenaxe des Tetraëders	57	41	18,6

γ. Winkel am tetraëdrischen Achtundvierzigflächner der zweiten Art.

Neigung der Flächen an derjenigen Endkante der Pyramide, die durch die Ecke des Tetraëders geht	144°	2′	57″,9
Neigung der Flächen an derjenigen Endkante, die durch die Mitte der Kanten des Tetraëders hingeht .	162	14	50,0
Neigung der Flächen an der Basiskante . . .	124	50	59,3
Ebener Winkel zwischen den Endkanten der Pyramide	54	21	33,8
Ebene Winkel an der Basis der Pyramide . .	85 40	19 19	18,5 7,7

Neigung der Endkanten der Pyramide gegen ihre Axe	67°	59′	53″,8
	63	12	10,0
Neigung der Endkante der Pyramide gegen die Tetraëderaxe	41	28	22,6
Neigung der Endkante der Pyramide gegen die Kantenaxe des Tetraëders	62	3	41,8
Neigung der Basiskanten gegen die Kantenaxe des Tetraëders	79	58	30,1
Neigung der Basiskanten gegen die Tetraëderaxe	45	17	21,7
Neigung der Flächen gegen die Axe der Pyramide	61	52	28,3
Neigung der Flächen gegen die Tetraëderaxe	39	2	44,8
Neigung der Fläche gegen die Kantenaxe des Tetraëders	60	47	38,7

5) Winkel am halbzähligen tetraëdrischen Pyramidengranatoëder und Achtundvierzigflächner Fig. 127. (Tetraëdrisches Pentagonaldodecaëder *Mohs.*)

Diese Flächen erscheinen am Tetraëder als Zuspitzungsflächen seiner Ecken, welche schief auf seine Kanten aufgesetzt sind, so dass sich an jeder Tetraëderecke drei befinden, also über jeder Kante eine, welche entweder überall rechts oder überall links hin geneigt sind, so dass diese Körper eine rechts oder links hin gewundene Form haben. Diese Körper entstehen auch, wenn man am tetraëdrischen Achtundvierzigflächner (von dem wir eben gehandelt und bei welchem sich sechsseitige Pyramiden über die Mitte der Tetraëderflächen erheben) die abwechselnden Flächen der sechsseitigen Pyramiden so verlängert, dass sie sich schneiden, und dass die dazwischen liegenden Flächen verschwinden, so dass von den vierundzwanzig

Flächen des tetraëdrischen Achtundvierzigflächners nur zwölf übrig bleiben. Man sieht, dass aus jedem tetraëdrischen Achtundvierzigflächner so zwei Formen entstehen können, die dieselben Winkel haben, je nachdem es die einen oder die andern drei Flächen von den sechs Pyramidenflächen sind, die verschwinden. Es ist auch klar, dass diese Körper dreierlei dreiflächige Ecken haben müssen; zweierlei sind gleichwinklicht und entsprechen den Ecken und den Mittelpuncten der Flächen des Tetraëders; die dritten sind ungleichwinklicht und liegen so paarweise zwischen den Tetraëderecken zu beiden Seiten der Tetraëderkante, dass die Kante, die sie verbindet, einen schiefen Winkel mit der Tetraëderkante macht. Die Fünfecke, von welchen diese Körper begrenzt werden, sind so zusammengesetzt, dass zwei von den Kanten, die sich über der Mitte der Tetraëderfläche erheben, auf der einen Seite, zwei von den Kanten, die bei der Tetraëderecke zusammen kommen, auf der andern Seite liegen, und die Basis von der Kante, die die paarweise liegenden Ecken verbindet, gebildet wird.

Es giebt dieser Körper eben so viele, als es tetraëdrische Achtundvierzigflächner giebt, nämlich drei. Bei Berechnung ihrer Winkel thut man wohl, die beiden ersten, die aus dem tetraëdrischen Pyramidengranatoëder erster Art entstehen, von demjenigen, der aus dem tetraëdrischen Achtundvierzigflächner der zweiten Art gebildet wird, zu unterscheiden. Bei den beiden ersten tetraëdrischen Achtundvierzigflächnern nämlich sind alle Neigungen der Flächen an den Endkanten der sechsseitigen Pyramide, die sich über die Mitte jeder Tetraëderfläche erhebt, einander gleich; hier sind also die Formeln für das gleichschenklichte Dihexaëder anwendbar; und wir haben, wenn wir die Neigungen der Flächen des tetraëdrischen Acht-

die nach der Tetraëdrecke geht, und an derjenigen, die sich über die Mitte der Tetraëderfläche erhebt, sind schon bekannt; die Neigung der Flächen an der Kante, die die paarweise liegenden Ecken verbindet, ist offenbar doppelt so gross als die Neigung der Fläche des tetraëdrischen Achtundvierzigflächners gegen die Kantenaxe des Tetraëders, und also aus dem Vorigen bekannt. Die ebenen Winkel an den paarweise liegenden Ecken findet man aus den drei Neigungen an den Kanten, die als die Winkel eines sphärischen Dreiecks angesehen werden können.

α. Winkel am halbzähligen tetraëdrischen Pyramidengranatoëder (tetraëdrisches Pentagonaldodecaëder der ersten Art).

Neigung der Flächen an den Kanten (*A*) der dreiseitigen Pyramide, die sich über der Mitte des Tetraëders erhebt	141°	47′	12″,5*)
Neigung der Flächen an den Kanten (*B*), die an den Tetraëderecken zusammen kommen	94	5	46,3
Neigung der Flächen an den Kanten (*C*), die die paarweise liegenden, ungleichwinklichten Ecken verbinden	106	36	5,6
Ebener Winkel an der Spitze der dreiseitigen Pyramide, die sich über der Mitte der Tetraëderflächen erhebt	116	6	14,0
Ebener Winkel zwischen je zwei von den Kanten, die in der Tetraëderecke zusammen kommen	93	49	21,6

*) Die Tangente der Hälfte dieses Winkels ist $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Ebene Winkel an den Ecken, die paarweise liegen,		
nämlich	zwischen den Kanten (*A*) und (*B*) .	113° — 43′ — 28″,8
	zwischen den Kanten (*A*) und (*C*) .	83 — 6 — 56,1
	zwischen den Kanten (*B*) und (*C*) .	130 — 12 — 10,9
Neigung der Kante (*A*) gegen die Axe, die durch den Mittelpunct der Tetraëderfläche geht . . .		74 — 46 — 29,4
Neigung der Kante (*B*) gegen die Tetraëderaxe .		61 — 52 — 28,2
Neigung der Fläche gegen die Axe, die durch die Mitte der Tetraëderfläche geht		61 — 26 — 21,1
Neigung der Fläche gegen die Tetraëderaxe . .		43 — 5 — 19,5

γ. Winkel am halbzähligen tetraëdrischen Achtundvierzigflächner zweiter Art.

Neigung der Flächen an den Kanten (*A*), die sich über der Mitte der Tetraëderfläche vereinigen . .		131° — 48′ — 37″,0
Neigung der Flächen an den Kanten (*B*), die sich an der Tetraëderaxe vereinigen		95 — 27 — 53,7
Neigung der Flächen an den Kanten (*C*), die die paarweise liegenden Ecken verbinden . . .		121 — 35 — 17,4
Ebener Winkel zwischen den Kanten (*A*) . .		113 — 34 — 41,4
Ebener Winkel zwischen den Kanten (*B*) . .		94 — 59 — 18,5
Ebene Winkel an den Ecken, die paarweise liegen,		
nämlich	zwischen den Kanten (*A*) und (*B*) .	128 — 20 — 44,1
	zwischen den Kanten (*A*) und (*C*) .	66 — 25 — 18,0
	zwischen den Kanten (*B*) und (*C*) .	136 — 39 — 58,0

dieser Ecken verbindet, einen schiefen Winkel mit der Würfelkante macht und über ihre Mitte hingeht; es ist klar, dass diese Ecken sich zu vier auf jeder Würfelfläche erheben, in solcher Stellung, dass die vier Kanten, die sie verbinden, nicht gleichlaufend mit den Würfelkanten sind.

Die Fünfecke, die diese Form begrenzen, sind ganz ungleichwinklicht, unter den Seiten aber sind zwei gleiche Paare, wie beim tetraëdrischen Pentagonaldodecaëder.

Da diese Formen eben so aus den Achtundvierzigflächnern entstehen, wie die tetraëdrischen Pentagonaldodecaëder aus den tetraëdrischen Achtundvierzigflächnern, nämlich durch Wegfallen der abwechselnden Flächen, so berechnet man auch ihre Winkel eben so aus den Winkeln der Achtundvierzigflächner, wie die der tetraëdrischen Pentagonaldodecaëder aus den Winkeln der tetraëdrischen Achtundvierzigflächner.

Es giebt dieser Formen eben so viele, als es Achtundvierzigflächner giebt, nämlich drei, das halbzählige Pyramidengranatoëder, der halbzählige Achtundvierzigflächner erster Art und der halbzählige Achtundvierzigflächner zweiter Art.

α. Winkel am halbzähligen Pyramidengranatoëder.

Neigung der Flächen an den Kanten (*A*) der vierseitigen Pyramide, die sich über der Mitte der Würfelfläche erhebt . . . . . 130° — ′ — 18″,6

Neigung der Flächen an den Kanten (*B*), die zu drei an den Ecken des Würfels zusammen kommen 141 — 47 — 12,5

Neigung der Flächen an den Kanten (*C*), die die paarweise liegenden Ecken verbinden . . . 141 — 47 — 12,5

Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	57°— 41′ —18″,6
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	61 — 26 — 21,1

γ. Winkel am halbzähligen Achtundvierzigflächner zweiter Art.

Neigung der Flächen an den Kanten (*A*) . .	139°— 37′ —56″,6
Neigung der Flächen an den Kanten (*B*) . .	131 — 48 — 37,0
Neigung der Flächen an den Kanten (*C*) . .	135 — 35 — 4,8
Ebener Winkel zwischen den Kanten (*A*) . .	82 — 14 — 0,9
Ebener Winkel zwischen den Kanten (*B*) . .	113 — 34 — 41,4
Ebene Winkel an den paarweise liegenden Ecken,	
nämlich zwischen den Kanten (*A*) und (*B*) .	115 — 18 — 18,2
nämlich zwischen den Kanten (*A*) und (*C*) .	105 — 40 — 20,2
nämlich zwischen den Kanten (*B*) und (*C*) .	123 — 12 — 39,3
Neigung der Kante (*A*) gegen die Octaëderaxe .	68 — 25 — 54,7
Neigung der Kante (*B*) gegen die Würfelaxe . .	71 — 1 — 52,3
Neigung der Fläche gegen die Octaëderaxe . .	60 — 47 — 38,7
Neigung der Fläche gegen die Würfelaxe . .	61 — 52 — 28,3

61. Unter den Formen, deren Winkel im Vorhergehenden angegeben sind, giebt es nur wenige die allein auftreten; gewöhnlich kommen mehrere derselben combinirt an demselben Krystall zugleich vor. Diese Combinationen sind höchst mannigfaltig; wir wollen indess nur ein paar Beispiele herausheben, um an ihnen zu zeigen, wie man aus den schon berechneten Neigungen leicht noch diejenigen Winkel finden kann, welche Flächen, die verschiedeneu Formen angehören, untereinander machen.

	nach Haüy;	nach Weiss;	nach uns.
Pyritoëdrischer Acht- und vierzigflächner dritter Art.	$f = (\frac{3}{1}AG^2C^1)$ $f' = (\frac{3}{2}AB^1C^2)$ $f'' = (A^3B^2G^1)$	$\frac{3}{2}a : 2a : a$	$3\ (\infty O)\ x$
Pyritoëdrischer Acht- und vierzigflächner erster Art.	$n = (\frac{4}{3}AC^1G^3)$ $n' = (\frac{4}{1}AB^1C^3)$ $n'' = (A^4G^1B^3)$	$\frac{1}{2}a : 3a : a$	$2\ (\infty O)^{\frac{4}{3}}x.$

Eine Form, die beim Schwefelkies häufig vorkommt, ist das Icosaëder (Fig. 129); sie ist aus den Flächen *d* des Octaëders und den Flächen *e* des gewöhnlichen Pyritoëders zusammengesetzt. Um die Neigung von *d* zu *e* zu finden, braucht man nur 90° zur Neigung der Pyritoëderfläche gegen die Eckenaxe des zum Grunde liegenden Würfels hinzuzufügen; sie beträgt also 140° — 46′ — 6″,5.

Um den Zusammenhang der Pyritoëderflächen mit dem Octaëder noch besser zu fassen, ist die Fig. 130 entworfen, in welcher die Flächen *e* ganz klein an den Ecken des Octaëders erscheinen, als Zuschärfungen derselben, auf die abwechselnden Kanten grade aufgesetzt. Man sieht leicht, dass die Durchschnittslinien der Flächen *e* und *d* die Winkel der Octaëderflächen überall unter derselben Neigung schneiden; da nun die Neigungen der Seiten der Octaëderflächen untereinander alle gleich sind, d. h. gleich 60°, so müssen die Durchschnittslinien der Flächen *e* und *d* denselben Winkel miteinander machen; diejenigen Flächen des Icosaëders, die den Octaëderflächen entsprechen, sind also gleichschenklichte Dreiecke; dass aber die Flächen *e* gleichschenklichte Dreiecke bilden, ist auch von selbst klar. Um

Neigung von f zu f' . . . . . 141°— 47′ —12″,5

Neigung von f gegen d . . . . . 157 — 47 — 32,3

Neigung von f gegen e . . . . . 162 — 58 — 34,2

Um die Neigungen und ebenen Winkel der Fläche x zu finden, verfährt man wieder wie oben; man legt eine Ebene durch die horizontale Kante des Pentagondodecaëders, und bildet aus ihr und den Flächen x und e ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, welches leicht aufzulösen ist. Man findet so:

Neigung von x zu e'' . . . . . 129°— 13′ —53″,5

Neigung von x zu e . . . . . 161 — 33 — 54,2

Ebener Winkel an der Spitze des gleichschenklichten Dreiecks x . . . . . 109 — 28 — 16,4

Ebene Winkel an der Basis des Dreiecks x . . 35 — 15 — 51,8

Ebener Winkel zwischen den Kanten xe'' und $e''e''$ 114 — 5 — 41,4

Neigung von x zu d . . . . . 144 — 44 — 8,2

In der Fig. 132 ist k die Fläche eines Pyramidenoctaëders, z die Fläche des Leucitoïds. Die Flächen f sind hier vollzählig und bilden einen Achtundvierzigflächner. Man hat also schon aus dem Vorhergehenden:

Neigung von k zu k . . . . . 141°— 3′ —27″,2

Neigung von k zu d . . . . . 164 — 12 — 24,6

Neigung von z zu M oder P . . . . . 154 — 45 — 38,2

Neigung von z zu d . . . . . 150 — 30 — 13,6

Neigung von f' zu f'', und von f zu f'' . . 158 — 12 — 47,6

Verlängert man die Flächen f'', f''' über die Fläche o hinaus, so entsteht ein gleichschenklichtes sphärisches Dreieck, von diesen drei Flächen

Endlich wollen wir noch den Krystall betrachten, der Fig. 133 abgebildet ist. In demselben sind folgende Kanten untereinander parallel:

Ms, *fs*, *fo*, *os''*, *s''e''* etc.

s'f', *f'o'*, *o's*, *se*, *es*, *so'* etc.

Me, *ey*, *yM'*.

e stumpft die Kante zwischen *s* und *s* grade ab.

y stumpft die Kante zwischen *f* und *f* grade ab.

n stumpft die Kante zwischen *f* und *e* ab.

Um erst mit denjenigen Winkeln anzufangen, die aus dem Vorhergehenden bekannt sind, so ist die

Neigung von *s'* zu *P* oder *s* zu *M*	150° — 47′ — 38″,7
Neigung von *e* zu *M*	153 — 26 — 5,8
Neigung von *y* zu *M*	146 — 18 — 35,8
Neigung von *y* zu *M'*	123 — 41 — 24,2
Neigung von *o''* zu *P* oder von *o* zu *M'* . .	144 — 44 — 8,2
Neigung von *o* zu *M* oder *o* zu *P*	114 — 5 — 41,4
Neigung von *f* zu *M*	143 — 18 — 2,8
Neigung von *n* zu *P*	147 — 41 — 18,5
Neigung von *f'* zu *f'* oder von *f* zu *f* . . .	148 — 59 — 50,1
Neigung von *f'* zu *f*	141 — 47 — 12,5
Neigung von *s'* zu *s'* oder von *s* zu *s* . . .	154 — 47 — 28,4
Neigung von *s'* zu *s*	131 — 48 — 37,2
Neigung von *n* zu *n*	160 — 32 — 13,4
Neigung von *s* zu *e*	167 — 23 — 44,2
Neigung von *e* zu *y*	172 — 52 — 30,9

Wenn man alle Neigungen weiss, so ist es leicht, die ebenen Winkel zu berechnen, nämlich diejenigen, die man nicht schon aus dem Vorhergehenden weiss; der Parallelismus, den viele Kanten untereinander beobachten, überhebt vieler Mühe.

Ebener Winkel zwischen den Kanten *se* und *Me* .	90° — 0′ — 0″,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *se* und *ne* .	155 — 54 — 18,6
Ebener Winkel zwischen den Kanten *ne* und *ey* .	114 — 5 — 41,4
Ebener Winkel zwischen den Kanten *fy* und *yM′*	90 — 0 — 0,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *fy* und *ny* .	164 — 30 — 4,9
Ebener Winkel zwischen den Kanten *ny* und *ey* .	105 — 30 — 4,9

In dem sphärischen Dreieck, welches von den Winkeln $\frac{n}{e}$, $\frac{e}{y}$ und $\frac{n}{y}$ gebildet wird, sind diese drei Stücke bekannt; es ist also leicht die Seite $\frac{ne}{ny}$ zu finden. Es ist nämlich:

Ebener Winkel zwischen den Kanten *ne* und *ny* .	139° — 48′ — 8″,8

In dem sphärischen Dreieck, welches von den Neigungen $\frac{n}{s}$, $\frac{n}{e}$ und $\frac{s}{e}$ gebildet wird, sind die beiden Winkel $\frac{n}{e}$ und $\frac{s}{e}$, und die eingeschlossene Seite $\frac{se}{ne}$ aus dem Vorhergehenden bekannt; man kann also den der bekannten Seite gegenüberliegenden Winkel $\frac{n}{s}$ und die Seiten $\frac{ne}{ns}$, $\frac{se}{ns}$ berechnen. Man findet:

Neigung von *n* zu *s*	174° — 48′ —57″,9
Ebener Winkel zwischen den Kanten *ne* und *ns* .	80 — 24 — 22,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *se* und *ns* .	123 — 12 — 35,0

In dem von den Neigungen $\frac{e}{y}$, $\frac{y}{n}$, $\frac{n}{e}$ gebildeten sphärischen Dreieck ist nur die Seite $\frac{ne}{ny}$ unbekannt; man findet für dieselbe folgenden Werth:

Ebener Winkel zwischen den Kanten *ne* und *ny* .	139° — 47′ —55″,8

Vom graden Rhombenoctaëder nnd vom Rectangulär-octaëder.

62. Beim graden Rhombenoctaëder muss man wenigstens zwei Stücke wissen, um die übrigen berechnen zu können.

Es seyen B und C die Neigungswinkel der Flächen an den Endkanten, nämlich B der Neigungswinkel der Flächen an der Kante x, und C der Neigungswinkel der Flächen an der Kante y, siehe Fig. 82; es sey a der ebene Winkel an der Spitze, r die Neigung der Endkante x gegen die Axe, r' die Neigung der Endkante y gegen die Axe, g sey die halbe Neigung der Kanten an der Basis (halbe Neigung von z zu z) an der Kante x, an welcher B liegt; i sey die Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe, oder $180° - 2i$ die Neigung der Octaëderflächen an der Basis; es seyen b und c die ebenen Winkel der Octaëderflächen an der Basis, nämlich b der ebene Winkel, der an der Kante x liegt, und c der ebene Winkel, der an der Kante y liegt. Es sey ferner, wie immer, K das Volumen des Octaëders, seine halbe Axe $= 1$ gesetzt, und O seine Oberfläche, in derselben Voraussetzung.

Um den Zusammenhang aller dieser Stücke zu finden, construire man sich das sphärische Viereck Fig. 134, welches der Spitze des Rhombenoctaëders correspondirt. Dieses Viereck kann man in vier untereinander gleiche Dreiecke zerschneiden, indem man Ebenen durch die Endkanten und die Axe legt. Diese Dreiecke sind rechtwinklicht und zeigen sehr einfach den Zusammenhang der Hauptstücke des graden Rhombenoctaëders.

Fig. 135 stellt ein solches rechtwinklichtes sphärisches Dreieck besonders vor; seine Seiten sind a, r, r', und seine Winkel $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ und $90°$.

Der Zusammenhang der Stücke dieses Dreiecks ist aus den in der Einleitung gegebenen Formeln für das rechtwinkliehte sphärisehe Dreieck bekannt. Es ist nämlich:

$$\cos. a = \cos. r \cdot \cos. r'.$$
$$\cos. a = \cot. \tfrac{1}{2}B \cot. \tfrac{1}{2}C.$$
$$\sin. a \sin. \tfrac{1}{2}C = \sin. r.$$
$$\sin. a \sin. \tfrac{1}{2}B = \sin. r'.$$
$$\text{tg}. a \cos. \tfrac{1}{2}C = \text{tg}. r'.$$
$$\text{tg}. a \cos. \tfrac{1}{2}B = \text{tg}. r.$$
$$\text{tg}. \tfrac{1}{2}C \sin. r' = \text{tg}. r.$$
$$\text{tg}. \tfrac{1}{2}B \sin. r = \text{tg}. r'.$$
$$\sin. \tfrac{1}{2}C \cos. r' = \cos. \tfrac{1}{2}B.$$
$$\sin. \tfrac{1}{2}B \cos. r = \cos. \tfrac{1}{2}C.$$

Auf ähnliche Art kann man eine von den Ecken an der Basis des Octaëders in vier Theile zerschneiden, indem man Ebenen durch die drei Axen legt. Daraus entstehen zweierlei rechtwinklichte sphärische Dreiecke, je nachdem man die Ecke an der Basis, die bei g liegt, oder die andere nimmt. Das Dreieck der ersten Art hat $90° - i$, $\frac{1}{2}B$ und $90°$ zu Winkeln, und g, $90° - r$ und b zu Seiten, siehe Fig. 136. Die Winkel des Dreiecks der zweiten Art sind $90°$, $\frac{1}{2}C$ und $90° - i$, und dessen Seiten c, $90° - r'$ und $90° - g$, siehe Fig. 137.

Der Zusammenhang der Stücke dieser beiden Dreiecke ist folgender:

I.

$$\cos. b = \sin. r \cdot \cos. g.$$
$$\cos. b = \text{tg}. i \cot. \tfrac{1}{2}B.$$

$$\sin. b \cos. i = \cos. r.$$

$$\sin. b \sin. \tfrac{1}{2}B = \sin. g.$$

$$\text{tg}. b \sin. i = \text{tg}. g.$$

$$\text{tg}. b \cos. \tfrac{1}{2}B = \cot. r.$$

$$\cot. i \sin. g = \cot. r.$$

$$\text{tg}. \tfrac{1}{2}B \cos. r = \text{tg}. g.$$

$$\cos. i \cos. g = \cos. \tfrac{1}{2}B.$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}B \sin. r = \sin. i.$$

II.

$$\cos. c = \sin. r' \sin. g.$$

$$\cos. c = \text{tg}. i \cot. \tfrac{1}{2}C.$$

$$\sin. c \cos. i = \cos. r'.$$

$$\sin. c \sin. \tfrac{1}{2}C = \cos. g.$$

$$\text{tg}. c \sin. i = \cot. g.$$

$$\text{tg}. i \cos. \tfrac{1}{2}C = \cot. r'.$$

$$\cot. i \cos. g = \cot. r'.$$

$$\text{tg}. \tfrac{1}{2}C \cos. r' = \cot. g.$$

$$\cos. i \sin. g = \cos. \tfrac{1}{2}C.$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}C \sin. r' = \sin. i.$$

Hiezu kommen noch folgende abgeleitete:

$$\text{tg}. r' \cot. r = \text{tg}. g.$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}C}{\cos. \frac{1}{2}B} = \text{tg}. g.$$

Der körperliche Inhalt des graden Rhombenoctaëders, die halbe Axe $= 1$ gesetzt, ist leicht zu finden. Bezeichnen wir ihn mit K, so ist offenbar:

$$K = \tfrac{4}{3} \cdot \text{tg}. r \text{ tg}. r' = \tfrac{4}{3} \cdot \text{tg}.^2 r \cdot \text{tg}. g = \tfrac{4}{3} \cdot \text{tg}.^2 r' \cdot \cot. g.$$

Bei diesem Rectangulär-octaëder sind folgende Stücke zu unterscheiden:

Neigung der Fläche S gegen die Axe, welche der Neigung der Endkante x des zum Grunde liegenden Rhombenoctaëders gegen die Axe gleich ist, also r.

Neigung der Fläche T gegen die Axe, welche der Neigung der Endkante y des zum Grunde liegenden Rhombenoctaëders gegen die Axe gleich ist, also r'.

Neigung der Endkante v gegen die Axe, ϱ.

Neigung der Flächen S und T gegen einander, an der Endkante v, bezeichnet durch H.

Ebene Winkel an der Spitze des Octaëders, α und β, nämlich α auf der Fläche S und β auf der Fläche T.

Die Neigung λ der beiden horizontalen Axen, die durch die vordern Ecken an der Basis gehen.

Der Zusammenhang dieser Stücke wird auf folgende Weise gefunden:

Man lege erst eine Ebene durch die Kanten an der Basis. Diese Ebene theilt jede Ecke an der Basis in zwei sphärische Dreiecke, deren eines Fig. 138 besonders abgebildet ist. Es hat H, und die halben Neigungen der Octaëderflächen an der Basis, oder $90^\circ - r$ in $90^\circ - r'$ zu Winkeln, und einen rechten Winkel, und die ebenen Winkel der Octaëderflächen an der Basis, oder $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ und $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ zu Seiten.

Der Zusammenhang der Stücke dieses Dreiecks kann aus den Formeln der Einleitung, die die rechtwinklichten Dreiecke betreffen, leicht gefunden werden:

Da wir K und L nicht zu wissen brauchen, sondern nur ihre Summe $K + L = H$, welche uns schon bekannt ist und wir schon oben gelernt haben, $\frac{1}{2}\lambda = g$ aus r und r' zu berechnen, so haben nur einige von den Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Stücken der Dreiecke Fig. 139 und 140 geben, für uns Wichtigkeit, und diese sind:

$$\cos.\,\varrho = \cos.\,r\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha \qquad \cot.\,\varrho = \cot.\,r\,\cos.\,g$$
$$\cos.\,\varrho = \cos.\,r'\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\beta \qquad \cot.\,\varrho = \cot.\,r'\,\sin.\,g.$$

Die bisher entwickelten Formeln reichen hin, um alle Stücke des Rectangulär-octaëders aus zwei derselben, die gegeben sind, zu berechnen; nur giebt es nicht immer eine directe Formel, und man muss oft, um mit Logarithmen rechnen zu können, erst einen Winkel berechnen, den man nicht wissen will und den man als Hülfswinkel betrachtet, um aus ihm und den gegebenen Winkeln nachher den gesuchten zu berechnen.

Wir haben jetzt nur noch mit dem Volumen, der Oberfläche und dem Spitzenwerth des Rectangulär-octaëders zu thun. Das Volumen ist leicht zu finden; bezeichnen wir es mit K, die halbe Axe, wie immer, der Einheit gleich gesetzt, so ist offenbar:

$$K = \tfrac{8}{3}\,\text{tg.}\,r \cdot \text{tg.}\,r'.$$

Es ist doppelt so gross, als das Volumen des zum Grunde liegenden Rhombenoctaëders.

Die Oberfläche O ist vier Mal so gross als die Summe des Inhalts der beiden Octaëderflächen S und T. Da die Endkante v offenbar gleich $\frac{1}{\cos.\varrho}$ ist (die halbe Axe $= 1$ gesetzt), so ist der Flächeninhalt von S gleich $\frac{\sin.\alpha}{2\cos.^2\varrho}$ und der Flächeninhalt von T gleich $\frac{\sin.\beta}{2\cos.^2\varrho}$; also:

$$O = 2\left(\frac{\sin.\alpha + \sin.\beta}{\cos.^2\rho}\right)$$
$$= \frac{4 \cdot \sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.^2\rho}.$$

Was den Spitzenwerth des Rectangulär-octaëders betrifft, so ist, wenn man ihn mit E bezeichnet, offenbar

$$E = 2H - 180^\circ$$

also $\frac{1}{2}E = H - 90^\circ$ und $\sin.\frac{1}{2}E = \cos. H$.

64. Da alle secundären Flächen am graden Rhombenoctaëder, welche nicht grade Abstumpfungen seiner Kanten sind, immer zu acht vorkommen; so können sie insgesammt als Flächen von Octaëdern angesehen werden, deren Basis bald dieselben, bald andere Winkel hat, als die Basis des Grundoctaëders. Flächen zum Beispiel, die die Spitze des Grundoctaëders so zuspitzen, dass die Zuspitzungsflächen auf die Octaëderflächen grade aufgesetzt sind, bilden für sich allein, hinlänglich verlängert, ein Octaëder, dessen Basis der Basis der Grundoctaëders vollkommen ähnlich ist, und dessen Endkantenneigungen gegen die Axe so beschaffen sind, dass ihre Tangenten in einem einfachen Verhältniss zu den Endkantenneigungen des Grundoctaëders stehen. Aus Zuschärfungsflächen der Seitenendkanten y des Grundoctaëders hingegen entsteht ein Octaëder, dessen Basis der Basis des Grundoctaëders unähnlich ist, doch so, dass wieder die Tangente der halben Neigung der Kanten an der Basis in dem einen, zu der Tangente des ähnlich liegenden Winkels in dem andern Octaëder ein einfaches Verhältniss hat. Eben so ist es mit den Zuschärfungen an den vordern und hintern Endkanten x des Grundrhomboëders; da hingegen die von den Zuschärfungsflächen an den Basiskanten gebildeten Octaëder in die erste Klasse fallen.

Weiss man die Winkel des Grundoctaëders, so ist es leicht, nach den bisher entwickelten Formeln, die Winkel aller dieser abgeleiteten Octaëder zu finden. Man berechnet erst die Neigungen der Endkanten des neuen Octaëders gegen die Axe, indem man die Tangenten der Neigungen der Endkanten des Grundoctaëders gegen die Axe mit denjenigen einfachen Zahlen multiplicirt, welche das respective Verhältniss der Tangenten der Neigungen der Endkanten am Grundoctaëder und abgeleiteten Octaëder ausdrückt; aus diesen beiden Winkeln kann man alsdann alle übrigen berechnen. Es wäre unnütz, sich hiebei noch länger aufzuhalten; ich gehe deshalb sogleich zur Berechnung der Neigungswinkel über, welche von Flächen verschiedener Art, z. B. von Octaëder- und Säulenflächen, gebildet werden.

Um in diesen mannigfaltigen Gegenstand ein wenig Ordnung hinein zu bringen, wollen wir, wie wir es schon zum Theil beim Rhomboëder gethan haben, die Flächen zonenweise vertheilen; d. h. wir wollen bei der Berechnung der Neigung zweier Flächen immer auch gleich die Neigungen mit nehmen, deren zugehörige Flächen Durchschnittslinien bilden, welche mit der Durchschnittslinie der ersten beiden Flächen parallel laufen. Da wir aber auch so wegen der grossen Menge der möglichen Flächen uns bald überhäuft sehen würden, so wollen wir unsere Betrachtungen an die wirklich existirenden Flächen irgend eines Fossils, dessen Grundform das grade Rhombenoctaëder ist, knüpfen.

Die Fig. 141 stellt eine sehr zusammengesetzte Krystallform des Schwerspathes vor, die Haüy variété octotrigésimale genannt hat. Wir wollen mit Haüy die Flächen *M*, *M* als die Säulenflächen ansehen, obgleich die

optische Axe den Flächen o, o parallel geht. Es ist klar, dass es für die Rechnung ganz gleichgültig ist, welche von den drei untereinander rechtwinklichten Axen man als Hauptaxe ansieht. Die Flächen z sind auf M grade aufgesetzt; es sind also Octaëderflächen. Wir wollen sie als die Flächen der Grundoctaëder ansehen.

In derselben Zone liegen:

M, t, k, s, von denen die beiden letztern grade Abstumpfungsflächen der Säulenkanten sind.

o, k, o, P, von denen P parallel mit der Basis des Grundoctaëders ist.

P, d, s, d.

z, y, o, y', z'.

y, d, y, k.

Da o zugleich in die Zonen von $z : z'$ und von $P : k$ fällt, so ist es die grade Abstumpfungsfläche der Seitenendkante des Grundoctaëders, welcher von den Flächen z gebildet wird.

y kann als eine Zuschärfungsfläche derselben Seitenendkante angesehen werden, oder als eine eigene Octaëderfläche, deren vordere Endkante von der Fläche d grade abgestumpft wird.

Um die Zeichen dieser Flächen zu bestimmen, muss man noch die Neigungen von d zu P und von t zu s messen. Man findet, dass die Tangente der Neigung von d gegen die Axe zwei Mal so gross ist, als die Tangente der Neigung der vordern Endkante des Grundoctaëders gegen die Axe; und dass die Tangente der halben Neigung von $t : t$ anderthalb Mal so gross ist, als die Tangente der halben Neigung von $M : M$.

Die Zeichen der diese Varietät zusammensetzenden Flächen sind also:

		nach Haüy *);		nach Weiss;		nach eigner Bezeichnungsart.
M	=	M	=	$a:b:\infty c$	=	R°
z	=	$\overset{1}{B}$	=	$a:b:c$	=	R
k	=	${}^1G^1$	=	$\infty a:b:\infty c$	=	y°
P	=	P	=	$\infty a:\infty b:a$	=	R^∞
s	=	${}^1H^1$	=	$a:\infty b:\infty c$	=	x°
o	=	$\overset{1}{E}$	=	$\infty a:b:c$	=	y
d	=	$\overset{2}{A}$	=	$2a:\infty b:c$	=	x^2
y	=	$(E^{\frac{3}{2}}B^3B^1)$	=	$2a:b:c$	=	$2Ry$
t	=	${}^5H^5$	=	$2a:3b:\infty c$	=	$\frac{5}{2}R^\circ x.$

Ich füge noch das Zeichen der Fläche f Fig. 142 hinzu:

f	=	$\overset{3}{B}$	=	$3a:3b:c$	=	$R^3.$

Sind uns nun die Neigungen von $M:M=2g$ und von $o:o=180^\circ-2f$ gegeben, so ist es vermöge der bisher entwickelten Formeln und der bekannten Lage der Flächen leicht, die Neigungen von $z:z$, von d gegen die Axe, von $t:t$, von $y:y$ etc zu finden. Wenn es aber gilt, die Neigungen von ungleichartigen Flächen zu finden, z. B. von $o:M$, von $z:s$, von $z:t$ etc., so müssen wir neue Formeln entwickeln, welches denn auch in den folgenden Stücken geschehen ist:

*) Diese Zeichen beziehen sich auf Fig. 141*a*.

und $\frac{M}{o}$ zu beiden Seiten der Seitenkante der Säule, und zwischen $\frac{M}{o}$ und derselben Seitenkante der Säule $(\frac{M}{M'})$; und man findet leicht

$$\text{tg. } (90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) = -\frac{\text{tg. } r'}{\sin g}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\beta = \text{cot. } g \text{ sin. } r'.$$

Die Kante zwischen M und o wird zuweilen durch eine Fläche abgestumpft, welche Haüy mit c bezeichnet hat (in der variété connexe). Es sey $ABCD$ Fig. 144 die Basis des von den Flächen M, o gebildeten Rectangulär-octaëders, durch dessen Spitze die Fläche c geht; FG sey die Durchschnittslinie dieser Fläche mit der hinlänglich verlängerten Basis; so ist die Lage der Fläche c gegeben, wenn man weiss, wo sie die verlängerten Axen a und c trifft, d. h. wenn man die Verhältnisse $\frac{MG}{c}$, $\frac{MF}{a}$ kennt. Bezeichnet man nämlich diese Verhältnisse mit m, n, so ist das Weissische Zeichen dieser Fläche $\overline{|na : b : mc|} = \frac{n}{m}R^{\frac{1}{m}}y$ nach unserer Bezeichnung. Da die Fläche auch durch D geht, so stehen m und n in einer gewissen Abhängigkeit; denn es ist

$$\frac{LG}{MG} = \frac{LD}{MF}$$

oder da $LG = mc - c$, $MG = mc$, $LD = a$, $MF = na$:

$$\frac{m-1}{m} = \frac{1}{n} \text{ oder } n = \frac{m}{m-1}.$$

Wir brauchen also nur noch eine Gleichung zwischen m und n zu haben, um beide Werthe berechnen zu können.

Es sey nun die Fläche c auf irgend eine Fläche von der Form x^t grade aufgesetzt (z. B. auf x^2 oder d), so haben wir offenbar $\frac{n}{m} = t$; combinirt man diese Gleichung mit der obigen, so bekommt man

$$m = \frac{t+1}{t} \text{ und } n = t + 1.$$

dieser Dreiecke berechnen. Eben so verfährt man, wenn man die Neigung von $M : c$ finden will.

Die Fläche f kann auch als die Fläche eines Rhombenoctaëders angesehen werden, und von ihr gilt dasselbe, was von der Fläche c gilt.

2) Neigungen der Octaëderflächen zu den Säulenflächen. Die Neigung einer Octaëderfläche gegen eine Säulenfläche, auf die sie grade aufgesetzt ist, ist dem Complement der Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe, zu 180°, gleich; wir haben aber schon im Vorhergehenden gelernt, wie man die Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe aus zwei andern bekannten Stücken des Octaëders berechnet.

Es bleibt uns also nur noch übrig, Formeln zu finden für die Neigungen der Octaëderflächen gegen Säulenflächen, auf die sie nicht grade aufgesetzt sind, z. B. von $y : M$ oder von $z : t$.

Hier bilden wieder die Octaëderfläche, die Säulenfläche und eine Ebene, die durch die vordere Endkante des Octaëders und die Axe geht, ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt sind, nämlich die halbe Neigung der Octaëderflächen an der vordern Endkante, der halbe vordere Säulenwinkel und der ebene Winkel zwischen der Säulenkante und der Endkante, oder das Complement der Neigung der vordern Octaëderendkante gegen die Axe zu 180°. Bezeichnet man die beiden ersten Winkel mit B und C, die eingeschlossene Seite mit a und den gegenüberliegenden Winkel, oder die Neigung der Octaëderfläche gegen die Säulenfläche, mit A, so ist, nach den Formeln der Einleitung,

$$\cos. A = \frac{\cos. B \sin.(C-\varphi)}{\sin.\varphi}$$

worin $\cot. \varphi = \text{tg}. B \cos. a$.

Sind es aber zwei Octaëderflächen, die nicht so einfach untereinander zusammen hängen, z. B. *c* und *z*, so verfährt man eben so wie in 2); man sucht erst die halben Neigungen der Octaëderflächen an ihren vordern Endkanten *), und die Neigung dieser beiden Endkanten gegen einander; diess sind zwei Winkel und eine eingeschlossene Seite eines sphärischen Dreiecks, dessen dritter, der eingeschlossenen Seite gegenüber liegender Winkel, eben die gesuchte Neigung der beiden Octaëderflächen ist; der Zusammenhang dieser vier Winkel ist durch dieselbe Formel gegeben, die am Ende von 2) steht.

In den folgenden Blättern sind diese Rechnungen, als Beispiel, wirklich ausgeführt. Von den Bezeichnungen der Winkel gilt dasselbe, was wir schon im Vorhergehenden gesagt haben. Jede Fläche hat ihren Buchstaben, der aus der Figur zu ersehen ist, z. B. *M*, *o*, *d* etc.; $\frac{M}{o}$ bedeutet die Neigung von *M* zu *o*; *Mo* bedeutet die Durchschnittslinie von *M* und *o*; $\frac{Mo}{MM}$ die Neigung der Kanten *Mo* und *MM* gegeneinander; $\frac{M}{a}$ bedeutet die Neigung der Fläche *M* gegen die horizontale Axe *a*; $\frac{M}{b}$, $\frac{o}{c}$ bedeuten die Neigungen der Flächen *M*, *o* gegen die Axen *b*, *c*. Wo ich, um nicht von der Haüyschen Bezeichnung der Flächen abzuweichen, eine Fläche mit *c* bezeichnen musste, wurde für die Axe *c* immer „Axe" geschrieben, z. B. $\frac{}{Axe}$ heisst Neigung von *o* gegen die Hauptaxe *c*. Die Flächen auf der andern Seite des Krystalls, welche in der Figur nicht zu sehen sind, unterscheiden sich durch ein Accent, z. B. *M'*. *L* bedeutet Logarithmus.

*) Oder Basiskanten, je nachdem man die Neigung zweier übereinander oder nebeneinander liegenden Flächen wissen will.

$$\cot. i = \frac{\cot. r}{\sin. g}.$$

L. cot. r = 0·20721

L. sin. g = 9·88948

L. cot. i = 0·31773 $\quad i = 25° - 41'\frac{1}{3}.$

$$\cos. a = \cot. \tfrac{1}{2}B \cot. \tfrac{1}{2}C.$$

L. cot. $\frac{1}{2}B$ = 9·84027

L. cot. $\frac{1}{2}C$ = 9·98968

L. cos. a = 9·82995 $\quad a = 47° - 28'.$

$$\cos. b = \text{tg. } i \cdot \cot. \tfrac{1}{2}B.$$

$$\cos. c = \text{tg. } i \cdot \cot. \tfrac{1}{2}C.$$

L. tg. i = 9·68227

L. cot. $\frac{1}{2}B$ = 9·84027

L. cos. b = 9·52254 $\quad b = 70° - 32'\frac{2}{3}.$

L. tg. i = 9·68227

L. cot. $\frac{1}{2}C$ = 9·98968

L. cos. c = 9·67195 $\quad c = 61° - 58'\frac{1}{2}.$ *)

B. Winkel des von den Flächen γ gebildeten Octaëders.

Um unnütze Wiederholung zu vermeiden, wollen wir hier nur die wichtigsten Winkel berechnen.

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'} = 2 \text{ tg. } \tfrac{1}{2}C.$$

L. tg. $\frac{1}{2}C$ = 0·01032

L. 2 = 0·30103

L. tg $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'}$ = 0·31135 $\quad \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'} = 63° - 58'\frac{1}{2}$ $\quad$ L. sin. $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'}$ = 9·95357.

*) Dieser Winkel ist schon bekannt, wenn a und b bekannt sind, idem $a + b + c = 180°$; aber der Probe wegen habe ich ihn mit berechnet.

$$\cos. \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma} = \sin. \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'} \cdot \cos. r'.$$

L. sin. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'}$ = 9·95357

L. cos. r' = 9·90063

L. cos. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma}$ = 9·85420 $\quad \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma} = 44° - 22'\tfrac{1}{4} \quad$ cot. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma}$ = 0·00956.

$$\sin. \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'} \cdot \sin. r' = \sin. \frac{\gamma}{Axe}.$$

L. sin. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'}$ = 9·95357

L. sin. r' = 9·78246

L. sin. $\frac{\gamma}{Axe}$ = 9·73603 $\quad \frac{\gamma}{Axe} = 32° - 59'\tfrac{3}{4}.$

$$\cos. \frac{o\gamma}{d\gamma} = \cot. \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma} \cdot \cot. \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

L. cot. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma'}$ = 9·68865

L. cot. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma}$ = 0·00956

L. cos. $\frac{o\gamma}{d\gamma}$ = 9·69821 $\quad \frac{o\gamma}{d\gamma} = 60° - 3'\tfrac{1}{2}.$

$$\cos. \frac{\gamma\gamma}{\gamma\gamma''} = \cot. \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma} \cdot \text{tg}. \frac{\gamma}{Axe}.$$

L. cot. $\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma}$ = 0·00956

L. tg. $\frac{\gamma}{Axe}$ = 9·81245

L. cos. $\frac{\gamma\gamma}{\gamma\gamma''}$ = 9·82201 $\quad \frac{\gamma\gamma}{\gamma\gamma''} = 48° - 24'\tfrac{3}{4}.$

C. Winkel am Rectangulär-octaëder, das von den Flächen *M* und *o* gebildet wird.

$$\text{tg}. \frac{M}{o} = -\cos. g \cos. r'.$$

L. cos. g = 9·80043

L. cos. r' = 9·90063

L. cos. $\frac{M}{o}$ = 9·70106 $\quad \frac{M}{o} = 120° - 9'\tfrac{1}{2}.$

$$\text{tg.}\,\frac{MM'}{M_1} = -\frac{\text{tg.}\,r'}{\text{sin.}\,g}.$$

$$\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\frac{M_1}{M'_1} = \text{cot.}\,g \cdot \text{sin.}\,r'.$$

L. tg. r = [illegible]

L. sin. g = [illegible]

L. tg. $\frac{MM'}{M_1}$ = [illegible] $\qquad \frac{MM'}{M_1} = 135^\circ - 30'\tfrac{1}{4}.$

L. cot. g = [illegible]

L. sin. r = [illegible]

L. tg. $\frac{M_1}{M_1}$ = [illegible] $\qquad \tfrac{1}{2}\frac{M_1}{M'_1} = 26^\circ - 16'\tfrac{1}{3}.$

$$\text{cot.}\,\frac{M_1}{2} = \text{tg.}\,g \cdot \text{sin.}\,r.\ ^{*)}$$

L. tg. g = [illegible]

L. sin. r = [illegible]

L. cot. $\frac{M_1}{2}$ = 9·81111 $\qquad \frac{M_1}{2} = 57^\circ - 5'.$

D. Winkel am Rectanguläroctaëder, das von den Flächen o und d gebildet wird.

$$\text{cos.}\,\frac{d}{o} = -\,\text{sin.}\,r'\ \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\frac{d}{d}.\ ^{**)}$$

L. sin. r' = 9·78246

L. cos. $\frac{1}{2}\frac{d}{d}$ = 9·89137

L. cos. $\frac{d}{o}$ = 9·67383 $\qquad \frac{d}{o} = 118^\circ - 9'\tfrac{1}{3} \qquad \text{cot.}\,\frac{d}{o} = 9{\cdot}72862.$

---

*) Hier bedeutet $\frac{M_1}{b}$ die Neigung der Kante zwischen M und o gegen die horizontale Axe b. Ich habe oben statt $\frac{y}{Axe}$ nicht $\frac{y}{c}$ schreiben wollen, um die Verwechslung der Fläche c mit der Hauptaxe c zu verhüten.

**) $\frac{1}{2}\frac{d}{d}$ ist nämlich gleich dem Complement von $d : Axe$ zu 90°.

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\tfrac{do}{do'} = -\cot.\ \tfrac{d}{o} \cdot \operatorname{tg}.\ \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{d}.$$

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\tfrac{do}{d'o} = -\cot.\ \tfrac{d}{o} \cdot \cot.\ r'.$$

L. $\cot.\ \frac{d}{o} = 9{\cdot}72862$

L. $\operatorname{tg}.\ \frac{1}{2}\frac{d}{d} = 9{\cdot}90618$

L. $\sin.\ \frac{1}{2}\frac{do}{do'} = 9{\cdot}63480$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{do}{do'} = 25^\circ - 33'.$

L. $\cot.\ \frac{d}{o} = 9{\cdot}72862$

L. $\cot.\ r' = 0{\cdot}11816$

L. $\sin.\ \frac{1}{2}\frac{do}{d'o} = 9{\cdot}84678$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{do}{d'o} = 44^\circ - 38'\frac{2}{3}$ $\qquad \cos.\ \frac{1}{2}\frac{do}{d'o} = 9{\cdot}85217.$

$$\cos.\ \frac{do}{Axe} = \cos.\ r' \cdot \cos.\ \tfrac{1}{2}\tfrac{do}{d'o}.$$

Man findet L. $\cos.\ \frac{do}{Axe} = 9{\cdot}75280$ $\qquad \frac{do}{Axe} = 55^\circ - 31'\frac{3}{4}.$

Auf eben dieselbe Art berechnet man die Winkel des Rectangulär-octaëders, das von den Flächen d und t gebildet wird.

E. Säulenwinkel.

$$\operatorname{tg}.\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{t}{t} = \tfrac{z}{z} \cdot \operatorname{tg}.\ g.$$

L. $\operatorname{tg}.\ g = 0{\cdot}08905$

L. $\frac{z}{z} = 0{\cdot}17609$

L. $\operatorname{tg}.\ \frac{1}{2}\frac{t}{t} = 0{\cdot}26514$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{t}{t} = 61^\circ - 29'\frac{1}{3}.$

F. Neigungen der Octaëderflächen gegen Säulenflächen, auf die sie nicht grade aufgesetzt sind, und gegen andere Octaëderflächen.

Neigung von z zu t.

$$\cos.\ A = \frac{\cos.B \sin.(C-\varphi)}{\sin.\varphi}, \text{ worin } \cot.\ \varphi = \operatorname{tg}.\ B \cos.\ a$$

$$A = \tfrac{z}{t}, \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{z}{z} = 55^\circ - 18',5, \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{t}{t} = 61^\circ - 29'\tfrac{1}{3}$$

$$a = \tfrac{zz}{tt} = 148^\circ - 10',6.\ *)$$

*) Die trigonometrischen Functionen aller dieser Winkel sind schon aus dem Vorhergehenden bekannt; dort ist B mit $\frac{1}{2}B$, und $180^\circ - a$ mit r bezeichnet; man braucht sie also nicht von Neuem aufzuschlagen.

L. cos. B $= 9{\cdot}75524$	L. tg. $B = 0{\cdot}15973$
L. $\frac{1}{\sin.\varphi}$ $= 0{\cdot}19957$	L. cos. $a = 9{\cdot}92932$ (negativ)
L.sin.$(C-\varphi) = 9{\cdot}99244$ (negativ)	L. cot. $\varphi = 0{\cdot}08905$ (negativ)
L. cos. A $= 9{\cdot}94725$ (negativ)	$\varphi = 140^\circ - 50'$
$A = 152^\circ - 19'\frac{2}{3}$	$C = 61 - 29\frac{2}{3}$
	$(C-\varphi) = -79 - 20\frac{1}{3}$.

Oder wenn man mit den Gaussischen Formeln rechnen will:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-C)}{\sin.\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}A = \sin. \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-C)}{\sin.\frac{1}{2}(b-c)}$$

$\frac{1}{2}a = 74^\circ - 5',3$, $\frac{1}{2}(B-C) = 3^\circ - 5'\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}(B+C) = 58^\circ - 24'\frac{1}{12}$.

L. tg. $\frac{1}{2}a$ $= 0{\cdot}54503$	L. tg. $\frac{1}{2}a$ $= 0{\cdot}54503$	L. sin. $\frac{1}{2}a$ $= 9{\cdot}98303$
L.s.$\frac{1}{2}(B-C) = 8{\cdot}73205$	L.cos.$\frac{1}{2}(B-C) = 9{\cdot}99936$	L.sin.$\frac{1}{2}(B-C) = 8{\cdot}73205$
L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(B+C)} = 0{\cdot}06969$	L. $\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)} = 0{\cdot}28070$	L. $\frac{7}{\sin.\frac{1}{2}(b-c)} = 0{\cdot}66370$
L. tg.$\frac{1}{2}(b-c) = 9{\cdot}34677$	L. tg. $\frac{1}{2}(b+c) = 0{\cdot}82509$	L. cos. $\frac{1}{2}A$ $= 9{\cdot}37878$
$\frac{1}{2}(b-c) = 12^\circ - 31',7$.	$\frac{1}{2}(b+c) = 81^\circ - 29',5$.	$\frac{1}{2}A = 76^\circ - 9',6$
		$A = 152 - 19,2$.

$$\begin{array}{l} 12^\circ - 31',7 \\ 81 - 29,5 \\ \hline 94 - 1,2 = b = \frac{zz}{zt} \\ \hline 68 - 57,8 = c = \frac{zt}{tt}. \end{array}$$

Ich habe hier B für C und C für B gesetzt, damit $\frac{1}{2}(B-C)$ positiv werde; alsdann bedeutet b die dem Winkel $\frac{1}{2}\frac{t}{t}$ gegenüberliegende Seite, oder $\frac{zz}{zt}$, und c die dem Winkel $\frac{1}{2}\frac{z}{z}$ gegenüberliegende Seite, oder $\frac{zt}{tt}$.

Eben so findet man die Neigungen von y zu M, von y zu t, von f zu M, von f zu t etc. Von diesen Winkeln wollen wir noch $\frac{\gamma}{M}$ berechnen, aber auf eine andere Art. Verlängert man das obere und untere y über M hinaus, bis sie sich schneiden, so bilden diese drei Flächen ein sphärisches Dreieck, das durch eine horizontale durch $\frac{\gamma}{\gamma''}$ gehende Ebene in zwei rechtwinklichte Dreiecke zerschnitten wird. Jedes dieser Dreiecke hat 90°, $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma''}$ und $180° - \frac{M}{\gamma}$ zu Winkeln, und $\frac{\gamma\gamma''}{M\gamma}$, $\frac{1}{2}\frac{M\gamma}{M\gamma''}$, und $\frac{\gamma\gamma''}{b} - \frac{M}{b}$ zu Seiten. Wir wissen aus dem Vorhergehenden, dass $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma''} = 90° - \frac{\gamma}{Axe}$ $= 57° - 0'\frac{1}{4}$ ist; ferner ist tg. $\frac{\gamma\gamma''}{b} = 2$ tg. $\frac{M}{b} = 2$ cot. g, also $\frac{\gamma\gamma''}{b} = 58° - 27'\frac{1}{2}$, und da $\frac{M}{b} = 39° - 10'$, so ist $\frac{\gamma\gamma''}{b} - \frac{M}{b} = 19° - 17'\frac{1}{2}$. Setzt man nun $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma''} = G$, $\frac{\gamma\gamma'}{b} - \frac{M}{b} = f$ und $180° - \frac{M}{\gamma} = F$, so ist, nach den Formeln fürs rechtwinklichte sphärische Dreieck,

$$\cos. F = \sin. G \cos. f.$$

L. sin. G = 9·92361

L. cos. f = 9 97490

L. cos. F = 9·89851 $\qquad F = 37° - 40' \qquad \frac{M}{\gamma} = 142° - 20'.$

Die beiden übrigen Seiten des Dreiecks stehen in einem sehr einfachen Verhältniss zu den Winkeln $\frac{M\gamma}{MM}$ und $\frac{\gamma\gamma}{M\gamma}$, so dass man auch diese leicht berechnen kann. Es sey $\frac{1}{2}\frac{M\gamma}{M\gamma''} = g$, so ist offenbar $\frac{M\gamma}{MM} = 90° - g$; es sey ferner $\frac{\gamma\gamma''}{M\gamma} = h$, so ist offenbar $\frac{\gamma\gamma}{M\gamma} = h + b'$, wo b' den vorderen ebenen Winkel der Octaëderflächen y an der Basis dieses Octaëders oder $\frac{\gamma\gamma}{\gamma\gamma''}$ bedeutet, der uns aus dem Vorhergehenden bekannt ist.

Nun ist aber

$$\cos. g = \frac{\cos. G}{\sin. F}$$

$$\cos. h = \cos. f \cos. g.$$

L. cos. G = 9·73603

L. sin. F = 9·78609

L. cos. g = 9·94994 $\quad g = 26° - 59'$ $\quad \frac{My}{MM} = 63° - 1'.$

L. cos. g 9·94994

L. cos. f 9·97490

L. cos. h 9·92484 $\quad h = 32° - 44'\frac{5}{4}$ $\quad \frac{yy}{My} = 81° - 9'\frac{1}{2}.$

Auf dieselbe Art findet man die Neigung von z zu d, von f zu d etc.; nämlich da $\frac{1}{2}\frac{z}{z} = 55° - 18'\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\frac{f}{f} = 68° - 55'\frac{1}{2}$ und $\frac{ff}{Axe} = 61° - 45'\frac{1}{2}$, $\frac{d}{Axe} = 51° - 8'\frac{1}{2}$:

$$z : d = 140° - 53'\frac{1}{2} \qquad f : d = 156° - 30'\frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Neigung von y zu f.

Hier sind uns wieder in dem sphärischen Dreieck, das von den Octaëderflächen f, y, und der Ebene, die durch die Kanten yy und ff und die Axe geht, gebildet wird, die beiden Winkel $\frac{1}{2}\frac{y}{y}$ und $\frac{1}{2}\frac{f}{f}$ und die eingeschlossene Seite $\frac{yy}{ff}$ bekannt; man kann also vermöge der Gaussischen Formeln leicht den dritten Winkel $\frac{y}{f}$ und die beiden andern Seiten $\frac{yy}{yf}$ und $\frac{ff}{yf}$ berechnen. Man findet:

$$\frac{y}{f} = 146° - 0'\frac{1}{2}; \quad \frac{yy}{yf} = 126° - 35'; \quad \frac{ff}{yf} = 37° - 0'.$$

F. Oberfläche und Volumen.

Volumen und Oberfläche des von den Flächen ε, ε gebildeten Rhombenoctaëders. Halbe Axe = 1.

$$K = \frac{4}{3} \cdot \text{tg. } r \cdot r' \text{ und } O = 4 \text{ tg. } a.$$

L. 4	= 0·60206	L. 4	= 0·60206
L. $\frac{4}{3}$	= 9·52288	L. tg. a	= 0·03744
L. tg. r	= 9·79279	L. O	= 0·63950.
L. tg. r'	= 9·88184	O	= 4·3601.
L. K	= 9·79957	K	= 0·6303.

Eben so findet man für das von den Flächen y gebildete Octaëder:

$$K = 1{\cdot}2606 \text{ und } O = 6{\cdot}9447.$$

G. Volumen und Oberfläche des von den Flächen o und d gebildeten Rectangulär-octaëders.

$$K = \frac{8}{3} \cdot \text{tg. } \frac{d}{Axe} \cdot \text{tg. } \frac{o}{Axe}.$$

L. 8	= 0·90309		
L. $\frac{4}{3}$	= 9·52288		
L. tg. $\frac{d}{Axe}$	= 0·09382		
L. tg. $\frac{o}{Axe}$	= 9·88184		
L. K	= 0·40163	K	= 2·5213.

$$O = \frac{4 \sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.^2 \rho}.$$

$$\alpha = 25° - 33', \quad \beta = 44° - 38'\tfrac{2}{3}, \quad \rho = 55° - 31\tfrac{3}{4}. \text{ *)}$$

L. 4	= 0·60206		
L. $\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	= 9·97352		
L. $\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	= 9·97542		
L. $\frac{1}{\cos.^2 \rho}$	= 0·49440		
L. O	= 1·04540	O	= 1·1102.

*) Aus dem Vorhergehenden bekannt.

Zusammenstellung der bisher berechneten Winkel des Schwerspathes.

Winkel des Grundoctaëders, von den Flächen *z* gebildet.

Neigung der vordern Endkante gegen die Axe (*r*) . .	31° — 49′½
Neigung der Seitenendkante gegen die Axe (*r′*) . .	37 — 18
Neigung der Kanten an der Basis (2*g*)	101 — 40
Neigung der Octaëderflächen an der vordern Endkante (*B*)	110 — 37
Neigung der Octaëderflächen an der Seitenendkante (*C*) .	91 — 22
Neigung der Octaëderflächen an der Basis	128 — 36⅔
Ebener Winkel der Octaëderfläche an der Spitze . .	47 — 28
Ebener Winkel der Octaëderfläche vorn an der Basis .	70 — 33
Volumen des Octaëders, halbe Axe = 1	0,6303
Oberfläche des Octaëders, halbe Axe = 1	4,3601.

Uebrige Winkel des Schwerspaths, in alphabetischer Ordnung:

M : *M* . . .	101° — 40′	*P* : *y* . . .	122 — 59¼
M : *f* . . .	124 — 43	*P* : *z* . . .	115 — 41⅓
M : *k* . . .	129 — 10	*d* : *d* . . .	77 — 43
M : *o* . . .	120 — 9½	*d* : *f* . . .	156 — 30½
Kante *Mo* : Axe *b*	57 — 5	*d* : *o* . . .	118 — 9½
M : *s* . . .	140 — 50	*d* : *s* . . .	128 — 51½
M : *t* . . .	169 — 20½	*d* : *z* . . .	140 — 53½
M : *y* . . .	142 — 20	*f* : *o* . . .	141 — 38⅔
M : *z* . . .	154 — 18½	*k* : *o* . . .	142 — 42
P : *d* . . .	141 — 8½	*o* : *o* . . .	105 — 24
P : *o* . . .	127 — 18	*o* : *y* . . .	153 — 58½

$o : z$	135° — 41′	$\frac{MM'}{Mo}$	135° — 30′¼
$s : t$	151 — 29⅔	$\frac{Mo}{M'o}$	52 — 32⅔
$s : z$	134 — 19	$\frac{do}{do'}$	51 — 6
$t : t$	122 — 59⅓	$\frac{do}{d'o}$	89 — 17⅓
$y : y$	88 — 44½	$\frac{zz}{zt}$	94 — 1
$y : y''$	114 — 0½	$\frac{zt}{tt}$	68 — 58
$y : z$	161 — 42½	$\frac{My}{MM}$	63 — 1
		$\frac{yy}{My}$	81 — 9½
Ebene Winkel.		$\frac{yy}{yf}$	126 — 35
$\frac{oy}{dy}$	60 — 3½	$\frac{ff}{yf}$	37 — 0

Vom schiefen Rhombenoctaëder.

65. Die schiefen Octaëder mit rhombischer Basis können in zwei Unterabtheilungen gebracht werden, deren jede eine besondere Behandlung in der Rechnung erfordert. Die erste begreift diejenigen, bei welchen die Tangenten der Neigungen der vordern und hintern Endkanten ein einfaches Verhältniss zu einander haben; die zweite diejenigen, wo diess nicht der Fall ist. Die Flächen der schiefen Rhombenoctaëder erster Art können immer auf ein grades Octaëder bezogen werden, zuweilen auf eine so einfache Art (z. B. beim Augit), dass man glauben könnte, die Grundform derselben wäre wirklich ein grades Rhombenoctaëder, wenn nicht der Unterschied, der in der Anordnung der Flächen vorn und hinten sich so deutlich ausspricht, dieser Annahme entgegenstände; zuweilen sind diese Beziehungen verwickelter, z. B. beim Pistazit. Bei diesen Formen ist, wie beim graden Rhombenoctaëder, die Kenntniss zweier Winkel hinreichend, um alle übrigen zu berechnen. Bei den schiefen Rhombenoctaëdern zweiter Art ist es unmöglich, die Flächen auf ein grades Octaëder zu beziehen; man muss also die Neigung der Basis gegen die Axe mit in die Formeln einführen; und es ist nothwendig, drei Winkel zu wissen, um die übrigen berechnen zu können.

Berechnung der Winkel an den schiefen Rhombenoctaëdern der ersten Art.

Man beziehe erst alle Flächen auf ein grades Rhombenoctaëder, wie Weiss es immer thut; man kann im ersten Kapitel sehen, wie man die

Haüyschen Zeichen, die sich auf ein schiefes Prisma mit rhombischer Basis beziehen, in solche verwandeln kann, die sich auf ein grades Prisma mit rhombischer Basis beziehen. Weiss man aber die Lage aller Flächen in Bezug auf drei rechtwinklichte Axen, so dienen die fürs grade Rhombenoctaëder entwickelten Formeln, um alle ihre gegenseiten Neigungen zu berechnen. Es wäre also unnütz, hier die Entwickelung dieser Formeln nochmals zu unternehmen, und wir können uns mit einem Beispiel begnügen, dass aus einem sehr reichen Krystallsystem genommen ist, nämlich demjenigen des Pyroxens.

Die Figuren 145 bis 148 stellen die Lage der wichtigsten Flächen des Pyroxens dar.

Die Zeichen der Flächen sind folgende:

nach Haüy;	nach Weiss;	eigne Bezeichnung.

NB. Die Haüyschen beziehen sich auf Fig. 149.

$P = P$	$a : \infty b : c$	x
$M = M$	$a : b : \infty c$	R°
$s = {}^{1}E^{1}$	$a : \frac{1}{2}b : c$	$\frac{1}{2}Rx$
$o = {}^{3}E$	$a : \frac{1}{4}b : 3c$	$\frac{3}{4}R^{\frac{1}{3}}x$
$u = {}^{3}A^{3}$	$a : \frac{3}{5}b : 3c$	$\frac{3}{5}S^{\frac{1}{3}}x$
$x = \overset{1}{D}$	$a : \frac{3}{5}b : 3c$	$\frac{3}{2}R^{\frac{1}{2}}x$
$r = \overset{1}{B}$	$a : \frac{3}{4}b : 3c$	$\frac{3}{4}S^{\frac{1}{3}}x$
$c = \overset{1}{B}$	$a : \frac{1}{2}b : c$	$\frac{1}{2}Sx$
$i = \overset{1}{E}$	$a : \frac{1}{4}b : c$	$\frac{1}{4}Rx$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{M}{M} = \tfrac{1}{3}\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{o}{o} \cdot \cos. \tfrac{oo}{Axe} \text{ *).}$$

L. $\frac{1}{3}$ = 0·12494
L. tg. $\frac{1}{2}\frac{o}{o}$ = 0·04514
L. cos. $\frac{oo}{Axe}$ = 9·80782

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{M}{M}$ = 9·97790 $\quad \frac{1}{2}M = 43° - 32'\frac{1}{2}$.

$$\text{tg. } \tfrac{P}{Axe} = 3 \text{ tg. } \tfrac{oo}{Axe}.$$

L. 3 = 0 47712
L. tg. $\frac{oo}{Axe}$ = 0·07661

L. tg. $\frac{P}{Axe}$ = 0·55373 $\quad \frac{P}{Axe} = 74° - 23'\frac{1}{2}$ $\quad \cos. \frac{P}{Axe} = 9{\cdot}42993.$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{s}{s} = \tfrac{1}{2}\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}\frac{M}{M}}{\cos.\frac{P}{Axe}}. \text{ **)}$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897
L. tg. $\frac{1}{2}\frac{M}{M}$ = 9·97790
L. $\frac{1}{\cos.\frac{P}{Axe}}$ = 0·57007

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ = 0·24694 $\quad \frac{1}{2}\frac{s}{s} = 60° - 28'\frac{2}{3}$ $\quad \sin. \frac{1}{2}\frac{s}{s} = 9{\cdot}93960.$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{i}{i} = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{s}{s}.$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897
L. tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ = 0·24694

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{i}{i}$ = 9·94591 $\quad \frac{1}{2}\frac{i}{i} = 48° - 26'\frac{1}{2}$ $\quad \sin. \frac{1}{2}\frac{i}{i} = 9{\cdot}82076.$

*) Bezeichnet man $\frac{o}{o}$ mit B, $\frac{oo}{Axe}$ mit r, und den halben Neigungswinkel der Säulenflächen, auf die o grade aufgesetzt ist, mit g, so hat man nach den im Vorhergehenden entwickelten Formeln tg. $\frac{1}{2}B$ cos. r = tg. g. Es ist aber offenbar, da $o = \frac{3}{4}R^{\frac{1}{3}}x$, und $M = R°$, tg. $\frac{1}{2}\frac{M}{M} = \frac{1}{3}$ · tg. g.

**) Bezeichnet man $\frac{P}{Axe}$ mit r, $\frac{1}{2}\frac{M}{M}$ mit g, und die Neigung zweier Octaëderflächen, deren Endkante von P grade abgestumpft wird, und welche auf M grade aufgesetzt sind, mit B, so ist tg. $\frac{1}{2}B = \frac{\text{tg. } g}{\cos. r}$. Da nun das Zeichen einer solchen Octaëderfläche offenbar R ist, das Zeichen von s aber $\frac{1}{2}Rx$, so ist tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s} = \frac{1}{2}$ tg. $\frac{1}{2}B$.

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{M}{M} = \tfrac{1}{3}\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{o}{o} \cdot \cos. \tfrac{oo}{Axe} \text{ *).}$$

L. $\frac{1}{3}$ = 0·12494
L. tg. $\frac{1}{2}\frac{o}{o}$ = 0·04514
L. cos. $\frac{oo}{Axe}$ = 9·80782

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{M}{M}$ = 9·97790 $\quad \frac{1}{2}M = 43° - 32'\frac{1}{2}$.

$$\text{tg. } \tfrac{P}{Axe} = 3 \text{ tg. } \tfrac{oo}{Axe}.$$

L. 3 = 0 47712
L. tg. $\frac{oo}{Axe}$ = 0·07661

L. tg. $\frac{P}{Axe}$ = 0·55373 $\quad \frac{P}{Axe} = 74° - 23'\frac{1}{3}$ $\quad \cos. \frac{P}{Axe} = 9{\cdot}42993.$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{s}{s} = \frac{\text{tg. } \frac{1}{2}\frac{M}{M}}{\cos. \frac{P}{Axe}}. \text{ **)}$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897
L. tg. $\frac{1}{2}\frac{M}{M}$ = 9·97790
L. $\frac{1}{\cos. \frac{P}{Axe}}$ = 0·57007

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ = 0·24694 $\quad \frac{1}{2}\frac{s}{s} = 60° - 28'\frac{2}{3}$ $\quad \sin. \frac{1}{2}\frac{s}{s} = 9{\cdot}93960.$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{i}{i} = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\tfrac{s}{s}.$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897
L. tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ = 0·24694

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{i}{i}$ = 9·94591 $\quad \frac{1}{2}\frac{i}{i} = 48° - 26'\frac{1}{2}$ $\quad \sin. \frac{1}{2}\frac{i}{i} = 9{\cdot}82076.$

*) Bezeichnet man $\frac{o}{o}$ mit B, $\frac{oo}{Axe}$ mit r, und den halben Neigungswinkel der Säulenflächen, auf die o grade aufgesetzt ist, mit g, so hat man nach den im Vorhergehenden entwickelten Formeln tg. $\frac{1}{2}B$ cos. r = tg. g. Es ist aber offenbar, da $o = \frac{3}{4}R^{\frac{1}{3}}x$, und $M = R^{\circ}$, tg. $\frac{1}{2}\frac{M}{M} = \frac{1}{3} \cdot$ tg. g.

**) Bezeichnet man $\frac{P}{Axe}$ mit r, $\frac{1}{2}\frac{M}{M}$ mit g, und die Neigung zweier Octaëderflächen, deren Endkante von P grade abgestumpft wird, und welche auf M grade aufgesetzt sind, mit B, so ist tg. $\frac{1}{2}B = \frac{\text{tg. } g}{\cos. r}$. Da nun das Zeichen einer solchen Octaëderfläche offenbar R ist, das Zeichen von s aber $\frac{1}{2}Rx$, so ist tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s} = \frac{1}{2}$ tg. $\frac{1}{2}B$.

Man findet die Neigungen der Flächen o, u, s, i etc. gegen l, indem man $\frac{1}{2}\frac{o}{o}$, $\frac{1}{2}\frac{u}{u}$, $\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ etc. von 180° abzieht.

Um die Neigungen derselben Endflächen gegen r zu finden, berechnet man die Neigung derselben gegen eine durch die Axen c, b gelegte Ebene; die Complemente dieser Neigungen zu 180° sind die gesuchten Neigungen der Endflächen gegen r. Es sey $\frac{o}{o} = B$, $\frac{oo}{Axe} = r$, $\frac{o}{o'} = C$, so ist nach den Formeln fürs Rhombenoctaëder $\sin.\frac{1}{2}B \cos. r = \cos.\frac{1}{2}C$, oder $-\cos.\frac{o}{r} = \sin.\frac{1}{2}\frac{o}{o} \cdot \cos.\frac{oo}{Axe}$. Und so bei allen übrigen Endflächen.

$$-\cos.\frac{o}{r} = \sin.\frac{1}{2}\frac{o}{o} \cdot \cos.\frac{oo}{Axe}.$$

L. $\sin.\frac{1}{2}\frac{o}{o}$ = 9·87089

L. $\cos.\frac{oo}{Axe}$ = 9·80782

L. $\cos.\frac{o}{r}$ = 9·67871 (neg.) $\qquad \frac{o}{r} = 118° - 30'.$

$$-\cos.\frac{u}{r} = \sin.\frac{1}{2}\frac{u}{u} \cdot \cos.\frac{uu}{Axe}.$$

L. $\sin.\frac{1}{2}\frac{u}{u}$ = 9·95980

L. $\cos.\frac{uu}{Axe}$ = 9·80782

L. $\cos.\frac{u}{r}$ = 9·76762 (neg.) · · · 125° — 51'.

$$-\cos.\frac{s}{r} = \sin.\frac{1}{2}\frac{s}{s} \cdot \cos.\frac{ss}{Axe}.$$

L. $\sin.\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ = 9·93960

L. $\cos.\frac{ss}{Axe}$ = 9·42993

L. $\cot.\frac{s}{r}$ = 9·36953 (neg.) · · · 103° — 32'½.

Man findet auf dieselbe Weise:

$$\frac{i}{r} = 100° - 15'\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{?}{r} = 118 - 12$$

$$\frac{\lambda}{r} = 124 - 34.$$

Um die Neigungen der Octaëderflächen (von der Form $mR^n x$) gegen Zuschärfungsflächen (von der Form x^t, die auf die vordern Säulenkanten grade aufgesetzt sind, aber nicht die Octaëderendkante grade abstumpfen), zu finden, verfährt man wieder eben so, wie beim graden Rhombenoctaëder. Will man z. B. die Neigung von o zu P berechnen, so verlängert man o über P hinaus, und legt eine Ebene durch die Kante oo und die Axe; diese Ebene macht offenbar einen rechten Winkel mit P; wir haben hier also ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, dessen Winkel 90°, $180^\circ - \frac{P}{o}$ und $\frac{1}{2}\frac{o}{o}$, und dessen Seiten $\frac{oo}{Po}$, $\frac{P}{Axe} - \frac{oo}{Axe}$ und $\frac{1}{2}\frac{Po}{Po}$ sind. Der Zusammenhang dieser Winkel ist in den Formeln fürs rechtwinklichte sphärische Dreieck gegeben.

$$-\cos.\frac{P}{o} = \sin.\frac{1}{2}\frac{o}{o}\cos.\left(\frac{P}{Axe} - \frac{oo}{Axe}\right).$$

$$\frac{P}{Axe} - \frac{oo}{Axe} = 24^\circ - 21'\tfrac{2}{3}.$$

L. $\sin.\frac{1}{2}\frac{o}{o}$ $= 9{\cdot}87089$

L. $\cos.(24^\circ - 21'\frac{2}{3})$ $= 9{\cdot}95950$

L. $\cos.\frac{P}{o}$ $= 9{\cdot}83039$ (neg.) $\qquad \frac{P}{o} = 132^\circ - 35'.$

$$\text{tg.}\frac{1}{2}\frac{Po}{Po} = \text{tg.}\frac{1}{2}\frac{o}{o}\sin.\left(\frac{P}{Axe} - \frac{oo}{Axe}\right).$$

L. $\text{tg.}\frac{1}{2}\frac{o}{o}$ $= 0{\cdot}04514$

L. $\sin.(24^\circ - 21'\frac{2}{3})$ $= 9{\cdot}61540$

L. $\text{tg.}\frac{1}{2}\frac{Po}{Po}$ $= 9{\cdot}66054$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{Po}{Po} = 24^\circ - 35'\frac{1}{2}.$

Jetzt möge noch ein Beispiel folgen, wie man die Neigungen verschiedener Octaëderflächen gegeneinander berechnen muss.

Es seyen o, s die Octaëderflächen, deren gegenseitige Neigungen wir wissen wollen, so bilden o, s und eine Ebene, die durch die Kanten oo, ss

geht, offenbar ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel $\frac{1}{2}\frac{o}{o}$, $\frac{1}{2}\frac{s}{s}$ und $\frac{o}{s}$, und dessen Seiten $\frac{ss}{os}$, $\frac{oo}{os}$ und $\frac{oo}{os} = \frac{s}{Axe} - \frac{o}{Axe}$ sind. Der Zusammenhang dieser Stücke lässt sich, nach den Gaussischen Formeln, so ausdrücken:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}A = \text{sin. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b-c)}$$

$\frac{1}{2}a = 77^\circ - 49'\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}(B-C) = 2^\circ - 37'\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(B+C) = 63^\circ - 6'\frac{1}{2}\frac{7}{2}$

L. tg. $\frac{1}{2}a$ = 0·66584	L. tg. $\frac{1}{2}a$ = 0·66584	L. sin. $\frac{1}{2}a$ = 9·99011
L.s.$\frac{1}{2}(B-C)$ = 8·66200	L.cos.$\frac{1}{2}(B-C)$ = 9·99955	L.sin.$\frac{1}{2}(B-C)$ = 8·66200
L. $\frac{1}{\text{sin.}\frac{1}{2}(B+C)}$ = 0·04969	L. $\frac{1}{\text{cos.}\frac{1}{2}(B+C)}$ = 0·34458	L. $\frac{7}{\text{sin.}\frac{1}{2}(b-c)}$ = 0·63445
L. tg.$\frac{1}{2}(b-c)$ = 9·37753	L. tg. $\frac{1}{2}(b+c)$ = 1·11997	L. cos. $\frac{1}{2}A$ = 9·28656

$\frac{1}{2}(b-c) = 13^\circ - 25'$. $\frac{1}{2}(b+c) = 85^\circ - 39'\frac{3}{3}$. $\frac{1}{2}A = 78^\circ - 50'\frac{3}{4}$.

Also:

$\frac{ss}{so} = 99^\circ - 4'\frac{2}{3}$, $\frac{oo}{so} = 72^\circ - 14'\frac{2}{3}$, $\frac{o}{s} = 157^\circ - 41'\frac{1}{2}$.

Berechnung der Winkel an den schiefen Rhombenoctaëdern der zweiten Art.

66. Die schiefen Rhombenoctaëder der zweiten Art lassen sich nicht auf rechtwinklichte Dimensionen beziehen, und die Tangenten der Neigungen der vordern und hintern Endkante gegen die Axe haben kein einfaches Verhältniss zu einander.

Man muss wenigstens drei Winkel wissen, um die übrigen berechnen zu können, z. B. die Neigung der vordern und hintern Endkante gegen die Axe und die Neigung der Kanten an der Basis.

Entwickelt man die Ausdrücke sin. $(\alpha - r)$ und sin. $(\alpha + r_{,})$, dividirt durch cos. α und eliminirt tg. α, so findet man:

$$\text{tg. } \alpha = \frac{2 \sin. r \sin. r_{,}}{\sin. (r_{,} - r)}.$$

Man kann auf eben dieselbe Weise $r_{,}$ in r und α ausgedrückt finden. Man bekommt

$$\text{cot. } r_{,} = \text{cot. } r - 2 \text{ cot. } \alpha.$$

Man kann diese Formel durch Einführung eines Hülfswinkels bequemer machen. Es sey $2 \text{ cot. } \alpha = \text{cot. } \varphi$, so ist

$$\text{cot. } r_{,} = \frac{\sin. (\varphi - r)}{\sin. \varphi \sin. r}.$$

Man kann auch den Werth von α finden, wenn bloss die Neigungen zweier vorderer Endkanten gegen die Axe gegeben sind. Man bezeichne, Fig. 151, die Neigung der vordern Endkante *bd* gegen die Axe *bg* wieder mit r, die Neigung der andern Endkante *fb* gegen dieselbe Axe mit ρ, die Neigung der Axe *fk* und *bg* aber wieder mit α; die Endkante *bf* schneide die Axe *fk* so, dass $cf = ncd$, wo n eine einfache Zahl ist, so ist offenbar wieder

$$\frac{\sin. (\alpha - r)}{\sin. r} = \frac{n \sin. (\alpha - \rho)}{\sin. \rho}.$$

Entwickelt man die Ausdrücke sin. $(\alpha - r)$, sin. $(\alpha - \rho)$, und dividirt auf beiden Seiten mit sin. α, so findet man

$$\text{cot. } r - \text{cot. } \alpha = n (\text{cot. } \rho - \text{cot. } \alpha)$$

oder

$$\text{cot. } \alpha = \frac{n \text{cot. } \rho - \text{cot. } r}{n - 1}$$

oder auch cot. $\alpha = \frac{\sin. (r - \varphi)}{(n-1) \sin. r \sin. \varphi}$, worin cot. $\varphi = n$ cot. ρ.

Befindet sich endlich die eine Endkante hinten, die andere vorn, so ist

Vorderes Dreieck.	Hinteres Dreieck.
tg. a cos. C = tg. r'	tg. $a_,$ cos. $C_,$ = tg. r'.
tg. a cos. $\frac{1}{2}B$ = tg. r	tg. $a_,$ cos. $\frac{1}{2}B_,$ = tg. $r_,$
tg. C sin. r' = tg. r	tg. $C_,$ sin. r' = tg. $r_,$
tg. $\frac{1}{2}B$ sin. r = tg. r'	tg. $\frac{1}{2}B_,$ sin. $r_,$ = tg. r'.
sin. C cos. r' = cos. $\frac{1}{2}B$	sin. $C_,$ cos. r' = cos. $\frac{1}{2}B_,$
sin. $\frac{1}{2}B$ cos. r = cos. C	sin. $\frac{1}{2}B_,$ cos. $r_,$ = cos. $C_,$

Da eine durch die vordern und hintern Endkanten gehende Ebene mit der Basis des Octaëders einen rechten Winkel macht, so theilen diese beiden Ebenen die vordere Ecke an der Basis wieder in vier rechtwinklichte sphärische Dreiecke, gebildet von den Neigungen der Octaëderflächen gegen die Basis und gegen die Ebene, die durch die Endkanten geht, von den Winkeln der Basiskanten mit den Endkanten und mit der vordern Axe, die aus der Ecke nach dem Mittelpunct geht, und von den Neigungen der Endkanten gegen die Basis. Es giebt zwei verschiedene Arten dieser Dreiecke; die der erstern Art liegen oberhalb der Basis, die der zweiten unterhalb derselben; die beiden obern Dreiecke haben 90°, D und $\frac{1}{2}B$ zu Winkeln, und $(\alpha - r)$, γ und b zu Seiten; die untern 90°, $D_,$ und $\frac{1}{2}B_,$ zu Winkeln, und $b_,$ γ, und $180° - (\alpha + r_,)$ zu Seiten. Siehe Fig. 154 und 155.

Den Zusammenhang dieser Stücke findet man wieder aus den allgemeinen Formeln für das rechtwinklichte sphärische Dreieck.

Oberes Dreieck Fig. 154.	Unteres Dreieck Fig. 155.
cos. b = cos. $(\alpha - r)$ cos. γ	cos. $b_,$ = − cos. $(\alpha + r_,)$ cos. γ.
cos. b = cot. D cot. $\frac{1}{2}B$	cos. $b_,$ = cot. $D_,$ cot. $\frac{1}{2}B_,$

Oberes Dreieck Fig. 154.	Unteres Dreieck Fig. 155.
$\sin. b \sin. D = \sin. (\alpha - r)$	$\sin. b_{,} \sin. D_{,} = \sin. (\alpha + r_{,})$.
$\sin. b \sin. \frac{1}{2}B = \sin. \gamma$	$\sin. b_{,} \sin. \frac{1}{2}B_{,} = \sin. \gamma$.
$\text{tg}. b \cos. D = \text{tg}. \gamma$	$\text{tg}. b_{,} \cos. D_{,} = \text{tg}. \gamma$.
$\text{tg}. b \cos. \frac{1}{2}B = \text{tg}. (\alpha - r)$	$\text{tg}. b_{,} \cos. \frac{1}{2}B_{,} = -\text{tg}. (\alpha + r_{,})$.
$\text{tg}. D \sin. \gamma = \text{tg}. (\alpha - r)$	$\text{tg}. D_{,} \sin. \gamma = -\text{tg}. (\alpha + r_{,})$.
$\text{tg}. \frac{1}{2}B \sin. (\alpha - r) = \text{tg}. \gamma$	$\text{tg}. \frac{1}{2}B_{,} \sin. (\alpha + r_{,}) = \text{tg}. \gamma$.
$\sin. D \cos. \gamma = \cos. \frac{1}{2}B$	$\sin. D_{,} \cos. \gamma = \cos. \frac{1}{2}B_{,}$.
$\sin. \frac{1}{2}B \cos. (\alpha - r) = \cos. D$	$-\sin. \frac{1}{2}B_{,} \cos. (\alpha + r_{,}) = \cos. D_{,}$.

Obgleich diese Formeln alle Stücke des schiefen Rhombenoctaëders, in allen ihren möglichen Combinationen, enthalten, so wird es doch gut seyn, noch das sphärische Dreieck zu betrachten, welches gebildet wird vom Durchschnitt einer Octaëderfläche mit der Basis und mit einer Ebene, die man sich durch die Seitenendkanten gelegt denken kann. Es giebt ebenfalls zwei Arten solcher Dreiecke, je nachdem es die vordere oder hintere Octaëderfläche ist, die es bilden hilft. Beide sind Fig. 156 und 157 abgebildet; ihre Winkel sind D, C, $180^{\circ} - \alpha$ und $D_{,}$, $C_{,}$ und α; ihre Seiten c, $90^{\circ} - \gamma$ und $90^{\circ} - r'$ und $c_{,}$, $90^{\circ} - \gamma$ und $90^{\circ} - r'$.

Diese sphärischen Dreiecke kann man auf die gewöhnliche Art auflösen; es wäre unnütz sich noch länger dabei aufzuhalten; diese Rechnung kann insbesondere dazu dienen, die Richtigkeit der mit den vorhergehenden Formeln enthaltenen Resultate zu prüfen.

Was nun die secundären Flächen betrifft, die am schiefen Rhombenoctaëder vorkommen können, so hängen die Neigungen einiger von ihnen

eben so einfach untereinander zusammen, wie beim graden Rhombenoctaëder, andere auf eine verwickeltere Weise.

Grade Abstumpfungsflächen der vordern und hintern Endkanten sind offenbar unter demselben Winkel gegen die Axe geneigt, als die Endkanten selbst; die Neigung einer vordern Abstumpfungsfläche gegen eine hintere ist also gleich $r+r_{,}$; ihre Neigungen gegen die anliegenden Octaëderflächen sind $\frac{1}{2}B+90^{\circ}$, $\frac{1}{2}B_{,}+90^{\circ}$.

Die graden Abstumpfungsflächen der Kanten an der Basis, oder die Säulenflächen (ich nenne grade Abstumpfungsfläche eine solche, die mit einer von den Axen parallel geht), sind offenbar unter einem Winkel gegen einander geneigt, der etwas grösser ist, als die Neigung der Basiskanten gegen einander. Um den Säulenwinkel zu berechnen, bilde man ein sphärisches rechtwinklichtes Dreieck aus dem Durchschnitt der Säulenfläche, der Basis und einer Ebene, die durch die vordere Säulenkante und durch die Axe geht. Dieses sphärische Dreieck ist Fig. 158 abgebildet; die Neigung der Basis gegen die Säulenfläche ist mit F, die halbe Neigung der Säulenflächen gegeneinander mit g und der ebene Winkel zwischen der vordern Säulenkante und der Durchschnittslinie der Basis und der Säulenfläche mit h bezeichnet worden. Es sey uns γ (die halbe Neigung der Basiskanten des Octaëders) und α (die Neigung der Basis gegen die Axe) gegeben, so ist offenbar

$$\text{tg. } g = \frac{\text{tg.}\gamma}{\sin.\alpha}$$

$$\text{tg. } F = -\frac{\text{tg.}\alpha}{\sin.\gamma}$$

$$\cos. h = -\cos.\gamma \cos.\alpha.$$

Kommen mehrere Säulenflächen vor, so stehen die Tangenten ihrer halben Neigungswinkel (an derselben Kante) in einem einfachen Verhältniss, wie beim graden Rhombenoctaëder; denn die Basis des von den Säulenflächen gebildeten Prisma bleibt immer rhombisch, sie mag einen schiefen oder rechten Winkel mit der Axe derselben machen, und ihre Diagonalen sind rechtwinklicht.

Die Neigung der graden Abstumpfungsflächen der Seitenendkanten verhält sich zur Neigung der Seitenendkanten selbst eben so, wie die Neigung der Säulenflächen zur Neigung der Kanten an der Basis, d. h. die Neigung der Abstumpfungsflächen der Seitenendkanten ist kleiner, als die Neigung der Endkanten gegen einander oder $2r'$. Man kann sie auch eben so berechnen.

Es sey H die Neigung der graden Abstumpfuugsflächen der Seitenendkanten, G die Neigung dieser Flächen gegen eine Ebene, die durch die Seitenendkanten geht, k der ebene Winkel, der zwischen der (obern) Durchschnittslinie der beiden Abstumpfungsflächen und der Seitenendkante enthalten ist, so bilden diese Neigungen mit den Winkeln α und r' ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, das Fig. 159 abgebildet ist. Hier ist wieder:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}H = \frac{\text{tg. } r'}{\text{sin. } \alpha}$$

$$\text{tg. } G = \frac{\text{tg. } \alpha}{\text{sin. } r'}$$

$$\text{cos. } k = \text{cos. } r' \text{ cos. } \alpha.$$

Combinirt man diese Formeln mit den vorhergehenden, so findet man:

$$\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}M}{\text{tg.}\,g} = \frac{\text{tg.}\,r'}{\text{tg.}\,\gamma}$$

$$\frac{\text{tg.}\,G}{\text{tg.}\,F} = -\frac{\text{sin.}\,r'}{\text{sin.}\,\gamma}$$

$$\frac{\text{cos.}\,k}{\text{cos.}\,h} = -\frac{\text{cos.}\,r'}{\text{cos.}\,\gamma}.$$

Die Winkel, welche die beiden rechtwinklichten Dreiecke, Fig. 158 und 159, zusammensetzen, hängen noch durch viele andere Formeln zusammen, welche sich aus den allgemeinen Formeln fürs rechtwinklichte Dreieck ableiten lassen; ich halte es aber für überflüssig, sie hier alle einzeln aufzuführen.

Um die Neigung der graden Abstumpfungsfläche der vordern oder hintern Endkante gegen eine Säulenfläche zu finden, verfährt man eben so, wie beim graden Rhombenoctaëder, d. h. man legt eine Ebene durch die vordere oder hintere Kante der Säule und die Axe; diese Ebene bildet mit der Säulenfläche und der graden Abstumpfungsfläche der vordern oder hintern Endkante des Octaëders ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, das Fig. 160 abgebildet ist. Dieses Dreieck hat 90°, die Neigung M der Abstumpfungsfläche zur Säulenfläche, und die halbe Neigung g der Säulenflächen an der vordern oder hintern Kante zu Winkeln, und den ebenen Winkel l zwischen der (vordern oder hintern) Säulenkante und der Durchschnittslinie der Abstumpfungs- und Säulenfläche, die Neigung $180° - r'$ der Säulenkante gegen die Abstumpfungsfläche, und den halben ebenen Winkel m zwischen den Durchschnittslinien der Abstumpfungsfläche und der beiden anliegenden Säulenflächen, zu Seiten. Man findet so leicht folgende Formeln:

$$\cos. M = -\sin. g \cos. r$$

$$\text{tg. } m = \text{tg. } g \sin. r$$

$$\text{tg. } l = -\frac{\text{tg. } r}{\cos. g}.$$

Was die Neigung der graden (mit der Axe a parallel laufenden) Abstumpfungsfläche der Seitenendkante des Octaëders gegen die anliegenden Säulenflächen betrifft, so kann man auch hier eine Ebene durch die Seitenkante der Säule und die Axe legen, welche mit den Säulenflächen und der ebengenannten Abstumpfungsfläche zwei einander unähnliche sphärische Dreiecke bildet, in welchen die Neigung der Abstumpfungsfläche gegen die Säulenfläche mit vorkommt; diese beiden Dreiecke sind Fig. 161 und 162 abgebildet; die Neigung der Abstumpfungsfläche der Seitenendkante gegen die vordere Säulenfläche ist mit N, die Neigung derselben Fläche gegen die hintere Säulenfläche mit O bezeichnet; der Winkel g ist uns schon aus dem Vorhergehenden bekannt; es ist die Neigung der Abstumpfungsfläche gegen die Ebene, die durch die Seitenkante der Säule und die Axe geht; p ist der ebene Winkel zwischen der Seitenendkante des Octaëders und der Durchschnittslinie der Abstumpfungsfläche und der vordern Säulenfläche; q der ebene Winkel zwischen der eben genannten Durchschnittslinie und der Seitenkante der Säule; r der ebene Winkel zwischen der Seitenendkante des Octaëders und der Durchschnittslinie der Abstumpfungsfläche und der hintern Säulenfläche; t endlich der ebene Winkel zwischen derselben Durchschnittslinie und der Seitenkante der Säule.

Der Zusammenhang dieser Winkel ist in den allgemeinen Formeln für die sphärischen Dreiecke gegeben. Da uns g, r' und G aus dem Vorhergehenden bekannt sind, so lassen sich aus ihren Werthen leicht die übri-

gen Winkel berechnen, am besten vermöge der Gaussischen Formeln. Wir haben

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(q-p) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}r' \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(G+g-90°)}{\sin.\frac{1}{2}(G-g+90°)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(q+p) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}r' \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(G+g-90°)}{\cos.\frac{1}{2}(G-g+90°)}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}O = \cos. r' \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(G+g-90°)}{\sin.\frac{1}{2}(q-p)}$$

und

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(t-r) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}r' \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(90°-G+g)}{\sin.\frac{1}{2}(G+g-90°)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(t+r) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}r' \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(90°-G+g)}{\cos.\frac{1}{2}(G+g-90°)}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}N = \cos. \tfrac{1}{2}r' \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(90°-G+g)}{\sin.\frac{1}{2}(t-r)}.$$

In diesen Formeln ist, nach dem Vorhergehenden,

$$\text{tg. } G = \frac{\text{tg.}\alpha}{\sin. r'}.$$

Will man bloss die Winkel O und N wissen, so bedient man sich der gewöhnlichen Formel, welche dazu dient, aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite eines sphärischen Dreiecks den dritten Winkel zu berechnen, nämlich:

$$\cos. O = \frac{\cos. G \cdot \cos.(g+r)}{\sin.\varphi}$$

worin $\cot.\varphi = \text{tg. } G \cos. r' = -\text{tg.}\alpha \cot. r'$

$$\cos. N = \frac{-\cos. G \cdot \cos.(g+q)}{\sin.\varphi}$$

worin $\cot.\varphi = \text{tg. } G \cos. r' = \text{tg. } \alpha \cot. r'.$

Ausser den Flächen des Grundoctaëders und den Abstumpfungsflächen seiner End- oder Basiskanten, können noch andere Octaëderflächen vorkommen, von der Form $mR_s^n x$ oder $\frac{1}{m}R_s^{mn} y$. Diese Octaëder sind ebenfalls lauter schiefe Rhombenoctaëder, und nur in ihren Winkeln vom Grundoctaëder verschieden, sie erfordern also dieselbe Behandlung.

Man sucht nämlich erst die Neigung der vordern und der Seiten-Endkante des neuen Octaëders gegen die Axe; diese beiden Winkel und das bekannte α sind alles was man braucht, um die übrigen Winkel zu finden. Es sey ϱ die Neigung der vordern Endkante, $\varrho_{,}$ die Neigung der hintern Endkante und ϱ' die Neigung der Seitenendkante des neuen Octaëders gegen die Axe, so fliesst unmittelbar aus den auf die Kante y bezogenen Zeichen der Fläche

$$\text{tg. } \varrho' = mn \text{ tg. } r'.$$

Wir haben ferner nach dem Vorhergehenden

$$\text{cot. } \varrho = \frac{(n-1)\cot.\alpha + \cot.r}{n}$$

oder, in einer für die logarithmische Rechnung bequemeren Form:

$$\text{cot. } \varrho = \frac{\sin.(\varphi + r)}{n \sin.\varphi \cdot \sin.r}$$

$$\text{worin cot. } \varphi = (n-1) \text{ cot. } \alpha$$

$$\text{und cot. } \varrho = \frac{\sin.(\varphi - r_{,})}{n \sin.\varphi \cdot \sin.r_{,}}$$

$$\text{worin ebenfalls cot. } \varphi = (n-1) \text{ cot. } \alpha.$$

Wenn $n = 2$, so bekommen diese Formeln folgende einfachere Gestalt:

$$\text{cot. } \varrho = \frac{\sin.(\alpha + r)}{2 \sin.\alpha \sin.r}; \quad \text{cot } \varrho_{,} = \frac{\sin.(\alpha + r_{,})}{2 \sin.\alpha \sin.r_{,}}.$$

67. Wer die vorhergehenden Paragraphen mit Aufmerksamkeit gelesen hat, dem wird es leicht seyn, die Neigungen von Flächen, von welcher Ordnung sie immer seyn mögen, zu finden; und ohne weiter in diese Einzelnheiten einzugehen, wende ich mich gleich zu einem Beispiel.

Genaue Messungen haben mich überzeugt, dass die Grundform des Adulars oder Orthoklases *) ein schiefes Rhombenoctaëder ist. Ich fand

*) Ich vermeide den Namen Feldspath, weil er, nach der Zerspaltung dieses Geschlechts in mehrere Arten, zweideutig geworden ist, indem man ihn bald auf die erste Rose'sche Gattung, bald auf das ganze Geschlecht anwendet.

durchgehends die Neigung von *x* gegen die Axe grösser, als die Neigung von *P* gegen die Axe (s. die Fig. 163 bis 173). An den Krystallen, die ich der Messung unterwarf, und die aus Tyrol kamen, waren die Flächen *P* und *M* sehr glänzend, und ihre Neigungen liessen sich bequem mit dem Reflexionsgoniometer messen; selten zeigten sich Doppelbilder (welches zuweilen geschieht, wenn die Flächen ein wenig gestreift sind), und dann wurden die Messungen verworfen. Die Flächen *x* gaben im Allgemeinen ein deutliches, wenn auch schwaches Bild, sehr oft aber Doppelbilder, die jedoch nie um mehr als 10′ von einander entfernt waren, so dass der grösste aus diesem Umstande entspringende Fehler auch nicht grösser als 10′ ausfallen konnte.

Hier sind die Resultate meiner Messungen:

Neigung von *T* zu *T*, Mittel aus drei Messungen *), deren grösste Differenz 1′,5 betrug	118° — 48′,6
Neigung von *T* zu *P*, Mittel aus fünf Messungen, deren grösste Differenz 3′,8 betrug	112 — 16,0
Neigung von *x* zu *T*, Mittel aus zwei Messungen . .	110 — 40,3
Neigung von *P* zu *x*, Mittel aus zwei Messungen . .	129 — 40,8

Diese Messungen sind zwar als diejenigen, die am besten unter einander stimmen, aus mehreren ausgesucht, von denen einige um 10′ voneinander abwichen; aber der Unterschied der Neigungen von *x* zu *M* und von *P* zu *M* ist zu gross, als dass ein Beobachtungsfehler an demselben Schuld seyn könnte.

*) Ich nenne hier einzelne Messung das Endresultat von 10 bis 12 Repetitionen.

In dem rechtwinklichten sphärischen Dreieck, welches von den Flächen T, P und einer durch die vordere Säulenkante MM und die Axe c gehenden Ebene gebildet wird, ist offenbar

$$\cos.\ g = \frac{\cos.G}{\sin.F},$$

wenn man die Neigung von T zu P mit G, die halbe Neigung von T zu T mit F, und die Neigung von P gegen die Axe mit g bezeichnet. Man findet so diese letztere Neigung gleich

$$63^\circ - 53',0.$$

Eben so findet man die Neigung von x gegen die Axe gleich

$$65^\circ - 47',3.$$

Die Summe dieser beiden Winkel weicht nur um eine halbe Minute von der beobachteten Neigung von P zu x ab.

Ich habe mich durch mehrere Messungen überzeugt, dass die Fläche P auf die vordere Säulenkante grade aufgesetzt ist, d. h. dass P gegen das rechtsliegende T eben so geneigt ist, wie gegen das linksliegende.

Die vorzüglichsten Formen des Orthoklases sind in den Figuren 163 bis 173 dargestellt; die an ihnen vorkommenden Flächen sind nach Weiss (siehe dessen Abhandlung über die Krystallisation des Feldspathes in den Schriften der Berliner Akademie von 1816 und 1820) folgende:

$T = \overline{\lvert a : b : \infty c \rvert}$	$P = \overline{\lvert a : \infty b : c \rvert}$
$M = \overline{\lvert \infty a : b : \infty c \rvert}$	$x = \overline{\lvert a' : \infty b : c \rvert}$
$z = \overline{\lvert 3a : b : \infty c \rvert}$	$y = \overline{\lvert \frac{1}{3}a' : \infty b : c \rvert}$
$k = \overline{\lvert a : \infty b : \infty c \rvert}$	$q = \overline{\lvert 3a' : \infty b : c \rvert}$

$r = \boxed{\frac{1}{3}a' : \infty b : c}$	$i = \boxed{a : 1\frac{1}{2}b : c}$
$t = \boxed{\frac{1}{2}a : \infty b : c}$	$h = \boxed{a : \frac{3}{4}b : c}$
$g = \boxed{\infty a : b : c}$	$m = \boxed{\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c}$
$o = \boxed{a' : \frac{1}{2}b : c}$	$u = \boxed{\frac{1}{3}a' : \frac{1}{4}b : c}$
$s = \boxed{a' : \frac{1}{3}b : c}$	$v = \boxed{\frac{1}{3}a' : \frac{1}{8}b : c}$
$n = \boxed{a : \frac{1}{4}b : c}$	$d = \boxed{\frac{1}{2}a : \frac{1}{6}b : c}$

Weiss hat diesen Zeichen rechtwinklichte Axen zum Grunde gelegt; wir haben aber oben gesehen, dass die Halbaxen a und c einen schiefen Winkel machen, denn sonst wären die Neigungen von P und x gegen die Axe einander gleich: man muss also eigentlich in diesen Zeichen $a_,$ für a setzen.

Wir wenden uns nun an die Berechnung der Winkel, ausgehend von den Neigungen von P und x gegen die Axe, und von T zu T.

Aus diesen drei Winkeln

$$r = 63° — 53',0$$
$$r_, = 65 — 47,3$$
$$g = 59 — 24,3$$

lassen sich in der That alle übrigen berechnen, wie wir im Folgenden sehen werden.

A. Berechnung der Winkel an der Grundform, d. h. an dem schiefen Rhombenoctaëder, dessen vordere und hintere Endkante von den Flächen *P* und *x*, dessen Basiskanten von den Flächen *T* abgestumpft werden.

Vorbereitung.

L. sin. $r = 9{\cdot}95323$	L. cos. $r = 9{\cdot}64365$	L. tg. $r = 0{\cdot}30958$
L. sin. $r_{,} = 9{\cdot}96002$	L. cos. $r_{,} = 9{\cdot}61290$	L. tg. $r_{,} = 0{\cdot}34711$
L. sin. $g = 9{\cdot}93489$	L. cos. $g = 9{\cdot}70669$	L. tg. $g = 0{\cdot}22821.$

1) $\text{tg. } \alpha = \frac{2 \sin. r_{,} \sin. r}{\sin.(r_{,} - r)}$

L. 2 $= 0{\cdot}30103$	$r_{,} = 65^{\circ} - 47',3$
L. sin. $r = 9{\cdot}95323$	$r = 63 - 53{,}0$
L. sin. $r_{,} = 9{\cdot}96002$	$r_{,} - r = 1 - 54{,}3$
L. $\frac{1}{\sin.(r_{,} - r)} = 1{\cdot}47831$	
L. tg. $\alpha = 1{\cdot}69259$	$\alpha = 88^{\circ} - 50',2.$

2) $\text{tg. } \gamma = \sin. \alpha \text{ tg. } g.$

L. sin. $\alpha = 9{\cdot}99991$	
L. tg. $g = 0{\cdot}22821$	
L. tg. $\gamma = 0{\cdot}22812$	$\gamma = 59^{\circ} - 24',0.$

3) $\text{tg. } \frac{1}{2}B = \frac{\text{tg. } \gamma}{\sin.(\alpha - r)}$

L. tg. $\gamma = 0{\cdot}22812$	$\alpha - r = 24^{\circ} - 57',2.$
L. sin. $(\alpha - r) = 9{\cdot}62519$	
L. tg. $\frac{1}{2}B = 0{\cdot}60293$	$\frac{1}{2}B = 75^{\circ} - 59',4.$

4) $\text{tg. } \frac{1}{2}B_{,} = \frac{\text{tg. } \gamma}{\text{sin. } (\alpha + r_{,})}$.

L. tg. γ = 0·22812 $\quad \alpha + r = 154° - 37',5.$

L.sin.$(\alpha + r_{,})$ = 9·63200

L. tg. $\frac{1}{2}B_{,}$ = 0·59612 $\quad \frac{1}{2}B_{,} = 75° - 46',7.$

5) $\text{tg. } D = \frac{\text{tg. } (\alpha - r)}{\text{sin. } \gamma}$.

L. tg. $(\alpha - r)$ = 9·66775

L. sin. γ = 9·93487

L. tg. D = 9·73288 $\quad D = 28° - 23',8.$

6) $\text{tg. } D_{,} = - \frac{\text{tg. } (\alpha + r_{,})}{\text{sin. } \gamma}$.

L.tg.$(\alpha + r_{,})$ = 9·67606

L. sin. γ = 9·93487

L. tg. $D_{,}$ = 9·74119 $\quad D_{,} = 28° - 51',4.$

7) $\text{cos. } C = \text{sin. } \frac{1}{2}B \text{ cos. } r.$

L.sin.$\frac{1}{2}B$ = 9·98688

L. cos. r = 9·64365

L. cos. C = 9·63053 $\quad C = 64° - 43',0.$

8) $\text{cos. } C_{,} = \text{sin. } \frac{1}{2}B_{,} \text{ cos. } r_{,}.$

L.sin.$\frac{1}{2}B_{,}$ = 9·98648

L. cos. $r_{,}$ = 9·61290

L. cos. $C_{,}$ = 9·59938 $\quad C_{,} = 66° - 34',5.$

9) $\text{sin. } r' = \frac{\text{tg. } r}{\text{tg. } C}$.

L. tg. r = 0·30958

L. tg. C = 0·32574

L. sin. r' = 9·98384 $\quad r' = 74° - 28',0$ und so fort.

B. Berechnung der Neigungen der abgeleiteten Flächen.

Am leichtesten sind die Neigungen derjenigen abgeleiteten Flächen zu finden, welche durch die End - oder Säulenkanten der Grundform gehen, und mit diesen wollen wir auch anfangen.

1) tg. $\frac{1}{2}\frac{z}{z} = \frac{1}{3}$ tg. g, woraus

Neigung von z zu z . . . . . 58° — 49′,4

2) tg. $\frac{1}{2}\frac{o}{o} = \frac{1}{2}$ tg. $\frac{1}{2}B_{/}$, woraus

Neigung von o zu o . . . . . 126 — 14,4

3) tg. $\frac{1}{2}\frac{s}{s} = \frac{1}{6}$ tg. $\frac{1}{2}B_{/}$, woraus

Neigung von s zu s . . . . . 66 — 39,6

4) tg. $\frac{1}{2}\frac{n}{n} = \frac{1}{4}$ tg. $\frac{1}{2}B$, woraus

Neigung von n zu n . . . . . 90 — 6,9

5) tg. $\frac{1}{2}\frac{i}{i} = \frac{1}{12}$ tg. $\frac{1}{2}B$, woraus

Neigung von i zu i . . . . . 36 — 56,4

6) tg. $\frac{1}{2}\frac{h}{h} = \frac{3}{4}$ tg. $\frac{1}{2}B$, woraus

Neigung von h zu h . . . . . 143 — 12,0

Gehen die Flächen dnrch abgeleitete Endkanten. so muss man erst die Neigung dieser gegen die Axe berechnen, vermöge der Formeln

$$\cot.\ \varrho = \frac{\sin.(\varphi+r)}{n \sin.\varphi \sin.r}$$

$$\cot.\ \varrho_{,} = \frac{\sin.(\varphi-r_{,})}{n \sin.\varphi \sin.r_{,}},$$

worin cot. $\varphi = (n-1)$ cot. α. Hier ist ϱ die Neigung einer vordern abgeleiteten Endkante gegen die Axe, $\varrho_{,}$ die einer hintern; n ist der Coefficient von a im Weissischen Zeichen der graden Abstumpfungsfläche der abgeleiteten Endkante, den Coefficienten von c der Einheit gleich gesetzt. Also:

7) $\cot. \frac{\gamma}{Axe} = \frac{3 \sin.(\varphi - r_{,})}{\sin. \varphi \sin. r_{,}}$; worin $\cot. \varphi = -\frac{2}{3} \cot. \alpha$.

L. cot. α	= 8·30741	L. 3	= 0·47712
L. $\frac{2}{3}$	= 9·82391	L. $\sin.(\varphi - r_{,})$	= 9·62573
L. cot. φ	= 8·13132 (neg.)	L. $\frac{1}{\sin. r_{,}}$	= 0·03998
φ	= 90° — 46′,5	L. $\frac{1}{\sin. \varphi}$	= 0·00004
$r_{,}$	= 65 — 47,3	L. cot. $\frac{\gamma}{Axe}$	= 0·14287
$\varphi - r_{,}$	= 24 — 59,2	$\frac{\gamma}{Axe}$	= 35° — 44′,5.

8) $\cot. \frac{\varphi}{Axe} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin.(\varphi - r_{,})}{\sin. \varphi \sin. r_{,}}$; worin $\cot. \omega = 2 \cot. \alpha$.

L. 2	= 0·30103	L. $\frac{1}{2}$	= 9·52288
L. cot. α	= 8·30741	L. $\sin.(\varphi - r_{,})$	= 9·57144
L. cot. φ	= 8·60844	L. $\frac{1}{\sin. \varphi}$	= 0·00036
φ	= 87° — 40′,5	L. $\frac{1}{\sin. r_{,}}$	= 0·03998
$r_{,}$	= 65 — 47,3	L. cot. $\frac{\varphi}{Axe}$	= 9·13466
$\varphi - r_{,}$	= 21 — 53,2	$\frac{\varphi}{Axe}$	= 82° — 14′,1

9) $\cot. \frac{r}{Axe} = \frac{2}{3} \frac{\sin.(\varphi - r_{,})}{\sin. \varphi \sin. r_{,}}$; worin $\cot. \varphi = -\frac{2}{3} \cot. \alpha$.

L. $\frac{2}{3}$	= 9·60206	L. $\frac{2}{3}$	= 0·22185
L. cot. α	= 8·30741	L. $\sin.(\varphi - r_{,})$	= 9·62065
L. cot. φ	= 7·90947 (neg.)	L. $\frac{1}{\sin. \varphi}$	= 0·00001
φ	= 90° — 27′,9	L. $\frac{1}{\sin. r_{,}}$	= 0·03998
$r_{,}$	= 65 — 47,3	L. cot. $\frac{r}{Axe}$	= 9·88249
$\varphi - r_{,}$	= 24 — 40,6	$\frac{r}{Axe}$	= 52° — 39′,5.

10) Auf ähnliche Weise findet man:

Neigung von t gegen die Axe . . . . . $22^{\circ} - 52',5$

Neigung der Kante mm gegen die Axe . . . . $34 - 57,7$.

Jetzt ist es leicht, die Neigungen von Flächen zu finden, die durch diese verschiedenen Endkanten gehen und zugleich durch Seitenendkanten des Grundoctaëders. Die Tangenten der Hälfte dieser Neigungen mit dem Coefficienten von b in den Weissischen Zeichen multiplicirt (nachdem man vorher den Coefficienten von c der Einheit gleich gemacht hat), giebt die Tangenten der halben Neigungen der abgeleiteten Flächen. Man bekommt so folgende Formeln:

$$11)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\tfrac{m}{m} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\text{tg.}\, r}{\sin.\frac{mm}{Axe}}$$

L. $\frac{1}{2}$ = 9·69897

L. tg. r' = 0·55603

L. $\frac{1}{\sin.34^{\circ}-57',7}$ = 0·24182

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{m}{m}$ = 0·49682 $\qquad \frac{1}{2}\frac{m}{m} = 72^{\circ} - 19',8.$

$$12)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\tfrac{u}{u} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\text{tg.}\, r'}{\sin.\frac{\gamma}{Axe}}.$$

L. $\frac{1}{4}$ = 9·39794

L. tg. r' = 0·55603

L. $\frac{1}{\sin.\frac{\gamma}{Axe}}$ = 0·23349

L. tg. $\frac{1}{2}\frac{u}{u}$ = 0·18746 $\qquad \frac{1}{2}\frac{u}{u} = 56^{\circ} - 59',9.$

13) Auf ähnliche Weise findet man

halbe Neigung von v zu v . . . . . $37° — 35',5$

halbe Neigung von d zu d . . . . . $49 — 9,7.$

Um nun die Neigungen der Endflächen P, x, y, t gegen die Säulenflächen T und z zu berechnen, bedient man sich des rechtwinklichten sphärischen Dreiecks, welches von der Endfläche, von der Säulenfläche und einer durch die Säulenkante TT und die Axe c gelegten Ebene gebildet wird. In demselben ist, nach den Formeln der Einleitung,

$$\cos. G = \sin. F \cos. g$$

$$\text{tg.} f = \text{tg.} F \sin. g$$

$$\text{tg.} h = \frac{\text{tg.} g}{\cos. F},$$

worin G die Neigung der Endfläche gegen die Säulenfläche, F die halbe Neigung der Säulenflächen, g das Complement der Neigung der Endfläche gegen die Axe zu 180°, f den halben ebenen Winkel zwischen den Durchschnittslinien der Endfläche mit den beiden Säulenflächen, und h den ebenen Winkel zwischen der Säulenkante und der Durchschnittslinie der Endfläche mit der Säuleufläche bedeutet. Man findet vermittelst dieser Formeln

14) für die Flächen T und P:

$$F = 59° — 24',3; \quad g = 116° — 7',0.$$

L. sin. F = 9·93489	L. cos F = 9·70669	L. tg. F = 0·22821
L. cos. g = 9·64365 (neg.)	L. tg. g = 0·30958 (neg.)	L. sin. g = 9·95323
L. cos. G = 9·57854 (neg.)	L. tg. h = 0·60289 (neg.)	L. tg. f = 0·18144
$G = 112° — 16',0.$	$h = 104° — 0',6.$	$f = 56° — 38',1.$

15) Für z und P

$$F = 29^\circ - 24',7; \quad g = 116^\circ - 7',0$$

woraus

$$G = 102^\circ - 29',1 \quad h = 113^\circ - 7',5 \quad f = 26^\circ - 50',9.$$

16) Für die Flächen T' und x

$$F = 59^\circ - 24',3; \quad g = 114^\circ - 12',7$$

woraus

$$G = 110^\circ - 40',3 \quad h = 102^\circ - 53',5 \quad f = 57^\circ - 2',7.$$

17) Für die Flächen z und x

$$F = 29^\circ - 24',7; \quad g = 114^\circ - 12',7$$

woraus

$$G = 101^\circ - 37',1 \quad h = 111^\circ - 23',4 \quad f = 27^\circ - 12',7.$$

18) Für die Flächen T' und y

$$F = 59^\circ - 24',3; \quad g = 144^\circ - 15',5$$

woraus

$$G = 134^\circ - 19',2 \quad h = 125^\circ - 16',1 \quad f = 44^\circ - 39'.1.$$

19) Für die Flächen z und y

$$F = 29^\circ - 24',7; \quad g = 144^\circ - 15',5$$

woraus

$$G = 113^\circ - 29',4 \quad h = 140^\circ - 26',2 \quad f = 18^\circ - 13',6.$$

20) Für die Flächen T und t

$$F = 59^\circ - 24',3; \quad g = 157^\circ - 7',5$$

woraus

$$G = 142^\circ - 28',4 \quad h = 140^\circ - 20',6 \quad f = 33^\circ - 19',3.$$

21) Für die Flächen z und t

$$F = 29^\circ - 24',7; \quad g = 157^\circ - 7',5$$

woraus

$$G = 116^\circ - 54',0 \quad h = 154^\circ - 9',4 \quad f = 12^\circ - 21',6.$$

22) Für die Flächen T und r

$$F = 59^\circ - 24',3; \quad g = 127^\circ - 20',5$$

woraus

$$G = 121^\circ - 28',5 \quad h = 111^\circ - 13',3 \quad f = 53^\circ - 21',7.$$

23) Für die Flächen z und r

$$F = 29^\circ - 24',7; \quad g = 127^\circ - 20',5$$

woraus

$$G = 107^\circ - 19',8 \quad h = 123 - 36',5 \quad f = 24^\circ - 8',5.$$

24) Für die Flächen T' und q

$$F = 59^\circ - 24',3; \quad g = 98^\circ - 5',8$$

woraus

$$G = 96^\circ - 40',7 \quad h = 93^\circ - 58',2 \quad f = 59^\circ - 10',4.$$

25) Für die Flächen z' und q

$$F = 29 - 24',7; \quad g = 98^\circ - 5',8$$

woraus

$$G = 93^\circ - 48',3 \quad h = 96^\circ - 46',4 \quad f = 29^\circ - 11',2.$$

Durch analoge Formeln findet man die Neigungen der Flächen o, m zu x, P, t; denn wenn man, wie wir eben gethan, eine Ebene durch eine vordere (oder hintere) Endkante und durch die Axe c legt, so macht diese

mit einer von den Flächen o, m und mit einer von den Flächen x, P, t ebenfalls ein rechtwinklichtes Dreieck; hier stellen die Flächen o, m die Säulenflächen vor; die Neigung der Kanten oo, mm gegen die Flächen x, P, t ist hier g und gleich der Summe oder dem Complement der Differenz der Neigungen von oo oder mm und von x, P oder t gegen die Axe zu 180° *); F aber ist die Hälfte von $\frac{o}{o}$ oder von $\frac{m}{m}$. Man findet so:

26) Für die Flächen o und P

$$F = 63° - 7',2; \quad g = r + r_{,} = 129° - 40',3$$

woraus

$$G = 124° - 42',5 \quad h = 110° - 33',3 \quad f = 56° - 38',1.$$

Hier ist G die Neigung von P zu o, h der ebene Winkel zwischen den Kanten Po und oo (oder $\frac{og}{ox}$), f der halbe ebene Winkel zwischen den Kanten Po und Po (oder $\frac{Pg}{Px} - 90°$).

27) Für die Flächen o und r

$$F = 63° - 7',2; \quad g = 166° - 52',2$$

woraus

$$G = 150° - 18',0 \quad h = 152° - 42',6 \quad f = 24° - 8',3.$$

Hier ist G die Neigung von o zu r, h der ebene Winkel zwischen den Kanten oo und or (oder $\frac{ro}{ox}$) und f der halbe ebene Winkel zwischen den Kanten or und or (oder $\frac{or}{xr} - 90°$).

28) Für die Flächen o und y

$$F = 63° - 7',2; \quad g = 149° - 57',2$$

woraus

$$G = 140° - 32',5 \quad h = 128° - 0',8 \quad f = 44° - 39',0.$$

*) Je nachdem die Flächen auf verschiedenen Seiten liegen oder auf derselben.

29) Für die Flächen n und x

$$F = 45^\circ - 3',5; \quad g = 129^\circ - 40',3$$

woraus

$$G = 116^\circ - 51',8 \quad h = 120^\circ - 21',9 \quad f = 37^\circ - 38',5.$$

30) Für die Flächen n und t

$$F = 45^\circ - 3',5; \quad g = 138^\circ - 59',5$$

woraus

$$G = 122^\circ - 16',9 \quad h = 129 - 5',4 \quad f = 33^\circ - 19',5.$$

31) Für die Flächen h und x

$$F = 71^\circ - 36',0; \quad g = 129^\circ - 40',3$$

woraus

$$G = 127^\circ - 17',0 \quad h = 104 - 40',2 \quad f = 66^\circ - 37',6.$$

32) Für die Flächen i und x

$$F = 18^\circ - 28',2; \quad g = 129^\circ - 40',3$$

woraus

$$G = 101^\circ - 40',1 \quad h = 128^\circ - 11',4 \quad f = 14^\circ - 25',1.$$

33) Für die Flächen m und P

$$F = 72^\circ - 19',8; \quad g = 151^\circ - 4',7$$

woraus

$$G = 146^\circ - 30',6 \quad h = 118^\circ - 47',0 \quad f = 56^\circ - 37',7.$$

34) Für die Flächen m und t

$$F = 72^\circ - 19',8; \quad g = 167^\circ - 54',8$$

woraus

$$G = 158^\circ - 42',0 \quad h = 144^\circ - 47',9 \quad f = 33^\circ - 19',5.$$

Eben so findet man

Neigung von n zu q . . . . . $125^\circ - 59',4$

Neigung von o zu q . . . . . $148 - 48,6.$

Die Neigungen der Flächen g, welches die grade (d. h. mit der Axe a parallele) Abstumpfungsfläche der Seitenendkante des Grundoctaëders ist, bestimmt man erst nach den im Vorhergehenden entwickelten Formeln:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}H = \frac{\text{tg. } r'}{\sin. \alpha}$$

$$\text{tg. } G = \frac{\text{tg. } \alpha}{\sin. r'}$$

$$\cos. x = \cos. r' \cos. \alpha$$

in welchen H die Neigung von g gegen g, G die Neigung von g gegen eine durch die Seitenendkante des Grundoctaëders und die Axe c gelegte Ebene, und k den ebenen Winkel bedeutet, der von der Kante gg und derselben Seitenendkante gebildet wird. Man findet so, da $r' = 74^\circ - 28',0$ $\alpha = 88^\circ - 50',2$:

35) $\tfrac{1}{2}H = 74^\circ - 28',2 \quad G = 88^\circ - 52',8 \quad k = 89^\circ - 41',3.$

Die Neigungen der Fläche g gegen die Säulenflächen T, T' und die dazu gehörigen ebenen Winkel, findet man, wie wir oben gesehen haben, aus den beiden sphärischen Dreiecken, welche von der Fläche g, von der durch die Seitenendkante des Grundoctaëders und die Axe c gehenden Ebene, und von der Säulenfläche T oder T' gebildet werden. In jedem dieser Dreiecke sind zwei Winkel, nämlich $\frac{1}{2}\frac{T}{T'}$, und die Neigung von g gegen die eben bezeichnete Ebene *), und eine Seite, nämlich $180^\circ - r'$, bekannt; man kann also die übrigen Stücke vermöge der Gaussischen Formeln

*) Oder G in (26).

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{cos.}^{1}(B-C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}A = \text{sin. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b-c)}$$

finden. Man erhält so

36) im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen g und T, und der durch die Seitenendkante des Grundoctaëders und die Axe c gehenden Ebene gebildet wird

$$a = 105^\circ - 32',0 \qquad B = 88^\circ - 52',8 \qquad C = 30^\circ - 35',7$$

$$\tfrac{1}{2}a = 52^\circ - 46',0 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 29^\circ - 8',6 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 59^\circ - 44',3$$

woraus

$$A = 98^\circ - 48',0 \qquad b = 102^\circ - 53',7 \qquad c = 29^\circ - 45',1.$$

Hier ist A die Neigung von g zu T, b der ebene Winkel zwischen den Kanten gT und TT', und c der ebene Winkel zwischen der Kante gT und der Durchschnittslinie der Fläche g mit der eben bezeichneten Ebene.

37) Im sphärischen Dreieck, welches von derselben Ebene und den Flächen g und T' gebildet wird

$$a = 105^\circ - 32',0 \qquad B = 91^\circ - 7',2 \qquad C = 30^\circ - 35',7$$

$$\tfrac{1}{2}a = 52^\circ - 46',0 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 30^\circ - 15',8 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 60^\circ - 51',5$$

woraus

$$A = 96^\circ - 51',6 \qquad b = 104^\circ - 0',8 \qquad c = 29^\circ - 36',0.$$

Hier ist A die Neigung von g zu T', b der ebene Winkel zwischen den Kanten gT' und TT', und c der ebene Winkel zwischen der Kante gT' und der Durchschnittslinie von g mit der oft bezeichneten Ebene.

Eben so verfährt man, um die Winkel zu finden, die g mit z macht; man hat nämlich

38) im sphärischen Dreieck, welches von der oben bezeichneten Ebene und von den Flächen g und z gebildet wird,

$$a = 105^\circ - 32',0 \qquad B = 88^\circ - 52',8 \qquad C = 60^\circ - 35',3$$

$$\tfrac{1}{2}a = 52^\circ - 46',0 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 14^\circ - 8',8 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 74^\circ - 44',1$$

woraus

$$A = 104^\circ - 3',2 \qquad b = 96^\circ - 46',7 \qquad c = 59^\circ - 54',3.$$

39) Im sphärischen Dreieck, welches von derselben Ebene und von den Flächen g und z' gebildet wird,

$$a = 105^\circ - 32',0 \qquad B = 91^\circ - 7',2 \qquad C = 60^\circ - 35',3$$

$$\tfrac{1}{2}a = 52^\circ - 46',0 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 15^\circ - 16',0 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 75^\circ - 51',3$$

woraus

$$A = 102^\circ - 56',0 \qquad b = 98^\circ - 46',1 \qquad c = 59^\circ - 26',3.$$

Den Winkel, den die Fläche g mit irgend einer vordern oder hintern Endfläche bildet, findet man, indem ein sphärisches Dreieck aus dem Durchschnitt dieser Fläche mit der Endfläche und mit der Basis des Grundoctaëders construirt. In diesem Dreieck ist eine Seite $= 90^\circ$; überdiess sind zwei Winkel darin bekannt, nämlich die Neigung von g (oder $90^\circ - \frac{1}{2}\frac{g}{g}$) und von der Endfläche gegen die Basis; man kann also den dritten Winkel, nämlich die Neigung von g gegen die Endfläche, berechnen, vermöge der Formel

$$\cos. H = -\cos. G \cos. F,$$

welche aus der Einleitung bekannt ist.

Man findet so:

40) Neigung von g gegen P . . . . . $150^\circ - 52',4$

Neigung von g gegen x . . . . . $150 - 31,3.$

Diese beiden Werthe können uns zur Controlle dienen; denn P, g, T' und x, g, T liegen in einer Zone, also

$$180^\circ - \tfrac{g}{T'} + 180^\circ - \tfrac{g}{P} = 180^\circ - \tfrac{P}{T'} = \tfrac{P}{T}$$

$$\text{und } 180^\circ - \tfrac{g}{T} + 180^\circ - \tfrac{g}{x} = 180^\circ - \tfrac{x}{T},$$

welchen Gleichungen die oben gefundenen Werthe von $\frac{g}{T'}$, $\frac{g}{T}$, $\frac{g}{P}$, $\frac{g}{x}$, $\frac{P}{T}$, $\frac{x}{T}$ genügen müssen.

Diese letzte Formel kommt im Grunde mit derjenigen überein, welche wir angewendet haben, um die Neigungen der Endflächen P, x, t etc. gegen die Säulenflächen T und z zu finden.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Neigungen der Flächen, die durch die verschiedenen vordern und hintern Endkanten gehen, untereinander und gegen die Säulenflächen zu finden. Hiezu bedient man sich wieder der Gaussischen Formeln; denn je zwei dieser Flächen bilden immer mit einer durch die Endkanten und die Axe c gehenden Ebene ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt sind. Man hat so

41) im sphärischen Dreieck, welches aus dem Durchschnitt der eben bezeichneten Ebene und den Flächen o und T' entsteht,

$a = 180^\circ - r = 114^\circ - 12',7$ $\quad B = \frac{1}{2}\frac{o}{o} = 63^\circ - 7',2$ $\quad C = \frac{1}{2}\frac{T'}{T'} = 59^\circ - 24',3$

$\frac{1}{2}a = 57^\circ - 6',4$ $\quad \frac{1}{2}(B-C) = 1^\circ - 51',5$ $\quad \frac{1}{2}(B+C) = 61^\circ - 15',8$

woraus

$$A = 123^\circ - 1',6 \qquad b = 75^\circ - 59',4 \qquad c = 69^\circ - 26'\,8.$$

Hier ist A die Neigung von T' zu o, b der ebene Winkel zwischen den Kanten $T'o$ und $T'T'$, und c der ebene Winkel zwischen den Kanten $T'o$ und oo.

42) Im sphärischen Dreieck, welches von der oben bezeichneten Ebene und von den Flächen o und z' gebildet wird,

$$a = 114^\circ - 12',7 \qquad B = 63^\circ - 7',2 \qquad C = 29^\circ - 24',7$$
$$\tfrac{1}{2}a = 57^\circ - 6',4 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 16^\circ - 51',3 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 46^\circ - 16',0$$

woraus

$$A = 124^\circ - 59',6 \qquad b = 96^\circ - 46',5 \qquad c = 33^\circ - 8',5.$$

Hier ist A die Neigung von o zu z' und b, c sind die ebenen Winkel zwischen den Kanten oz' und $z'z'$, oz' und oo.

43) Für die Flächen s und T'

$$a = 114^\circ - 12',7 \qquad B = 59^\circ - 24',3 \qquad C = 33^\circ - 19',8$$
$$\tfrac{1}{2}a = 57^\circ - 6',4 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 13^\circ - 2',3 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 46^\circ - 22',1$$

woraus

$$A = 128^\circ - 15',6 \qquad b = 91^\circ - 7',1 \qquad c = 39^\circ - 39',3.$$

44) Für die Flächen u und T'

$$a = 180^\circ - \tfrac{\gamma}{Axe} \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{T}{T} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{u}{u}$$

woraus

$$A = 149^\circ - 40',4 \qquad b = 84^\circ - 42',4 \qquad c = 75^\circ - 59',4.$$

45) Für die Flächen u und o

$$a = 180^\circ - (r_{,} - \tfrac{\gamma}{Axe}) \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{o}{o} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{u}{u}$$

woraus

$$A = 153^\circ - 21',0 \qquad b = 95^\circ - 17',7 \qquad c = 69^\circ - 26',7.$$

46) Für die Flächen o und v

$$a = 180 - (r_{,} - \tfrac{\gamma}{Axe}) \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{o}{o} \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{v}{v}$$

woraus

$$A = 146^{\circ} - 1'2 \quad b = 126^{\circ} - 57',3 \quad c = 33^{\circ} - 7',7.$$

47) Für die Flächen v und T'

$$a = 180^{\circ} - \tfrac{\gamma}{Axe} \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{T}{T} \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{v}{v}$$

woraus

$$A = 146^{\circ} - 2',8 \quad b = 115^{\circ} - 47',3 \quad c = 39^{\circ} - 39',3.$$

48) Für die Flächen v und z'

$$a = 180^{\circ} - \tfrac{\gamma}{Axe} \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{v}{v} \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{z}{z}$$

woraus

$$A = 158^{\circ} - 58',4 \quad b = 96^{\circ} - 46',5 \quad c = 53^{\circ} - 2',7.$$

49) Für die Flächen v und n

$$a = r + \tfrac{\gamma}{Axe} \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n} \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{v}{v}$$

woraus

$$A = 129^{\circ} - 11',6 \quad b = 64^{\circ} - 12',7 \quad c = 50^{\circ} - 54',5.$$

50) Für die Flächen o und n

$$a = r + r_{,} \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{o}{o} \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n}$$

woraus

$$A = 136^{\circ} - 15',2 \quad b = 96^{\circ} - 49',8 \quad c = 51^{\circ} - 59'.2.$$

51) Für die Flächen n und T

$$a = 180^{\circ} - r \quad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{T}{T} \quad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n}$$

woraus

$$A = 128^{\circ} - 53',0 \quad b = 83^{\circ} - 10',1 \quad c = 54^{\circ} - 43',9.$$

Anf ähnliche Weise für n und T'

$$A = 95^{\circ} - 14',4 \quad b = 50^{\circ} - 54',5 \quad c = 39^{\circ} - 39',5.$$

52) Für die Flächen n und z

$$a = 180^\circ - r \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{z}{z}$$

woraus

$$A = 140^\circ - 12',4 \qquad b = 83^\circ - 13',8 \qquad c = 43^\circ - 32',8.$$

53) Für die Flächen g und o

$$a = \alpha + r, \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{g}{g} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{o}{o}$$

woraus

$$A = 153^\circ = 49',8 \qquad b = 110^\circ - 34',5 \qquad c = 60^\circ - 5',3.$$

54) Für die Flächen g und n

$$a = \alpha + r \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{g}{g} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n}$$

woraus

$$A = 143^\circ - 50',8 \qquad b = 136^\circ - 26',9 \qquad c = 30^\circ - 24',5.$$

55) Für die Flächen n und m

$$a = 180^\circ - (r - \tfrac{mm}{Axc}) \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{m}{m} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n}$$

woraus

$$A = 143^\circ - 35',0 \qquad b = 129^\circ - 5',5 \qquad c = 35^\circ - 12',1$$

56) Für die Flächen n und s

$$a = r + r' \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{s}{s}$$

woraus

$$A = 146^\circ - 58',8 \qquad b = 88^\circ - 52',9 \qquad c = 69^\circ - 53',9.$$

57) Für die Flächen n und d

$$a = 180^\circ - (r - \tfrac{l}{Axc}) \qquad B = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{d} \qquad C = \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{n}$$

woraus

$$A = 150^\circ - 0',2 \qquad b = 83^\circ - 10',1 \qquad c = 68^\circ - 14',3.$$

Eben so findet man:

59) Für die Fläche d und T $\begin{cases} A = 158^\circ - 53',0 \\ b = 111 - 45,7 \\ c = 54 - 43,9. \end{cases}$

59) Für die Flächen h und T $\begin{cases} A = 121 - 21,0 \\ b = 86 - 2,0 \\ c = 64 - 49,2. \end{cases}$

60) Für die Flächen i und T $\begin{cases} A = 127 - 4,0 \\ b = 104 - 22,8 \\ c = 20 - 53,2. \end{cases}$

Wir haben hier viele Neigungen berechnet, die man viel leichter aus ihrer Lage findet, z. B. wenn drei Flächen in dieselbe Zone fallen, so kann man eine Neigung aus den beiden andern berechnen. Es ist aber der Controlle wegen besser, sie alle drei besonders zu suchen. Hiebei ist zu bemerken, dass, wenn man mit fünfziffrigen Logarithmen rechnet, die Uebereinstimmung der auf verschiedenen Wegen gefundenen Werthe desselben Winkels nur bis auf einige zehntel Minuten gehen kann; derjenige Werth, der auf dem nächsten Wege gefunden wurde, ist den übrigen vorzuziehen.

Zusammenstellung der gefundenen Winkel.

I. Am Krystall Fig. 163.

a. Neigungen.

Neigung von *T* zu *M*	. . . . .	120° — 35,7
— — *T* zu *T*	. . . . .	118 — 48,6
— — *T* zu *P*	. . . . .	112 — 16,0
— — *T′* zu *x*	. . . . .	110 — 40,3
— — *T′* zu *o*	. . . . .	123 — 1,6
— — *P* zu *o*	. . . . .	124 — 42,5
— — *P* zu *x*	. . . . .	129 — 40,3
— — *x* zu *o*	. . . . .	153 — 7,2
— — *o* zu *M*	. . . . .	116 — 52,8

b. Ebene Winkel.

Ebener Winkel zwischen den Kanten *T′M* und *oM*	. .	114 — 12,7
— — — — — *oM* und *PM*	. .	129 — 40,3
— — — — — *PM* und *TM*	.	116 — 7,0
— — — — — *PT* und *TT*	. .	112 — 16,0
— — — — — *PT* und *PT*	. .	113 — 16,2
— — — — — *PT* und *PM*	. .	123 — 21,9
— — — — — *PM* und *Po*	. .	123 — 21,9
— — — — — *Px* und *Po*	. .	113 — 16,2
— — — — — *Po* und *ox*	. .	110 — 33,3
— — — — — *T′x* und *T′T′*	.	102 — 53,5
— — — — — *T′x* und *T′x*	. .	114 — 5,4

Ebener Winkel zwischen den Kanten *ox* und *T′x* . .	122° — 57′,3
— — — — — *oT′* und *T′M* .	104 — 0,6
— — — — — *oT′* und *xT′* . .	153 — 5,9

II. Am Krystall Fig. 164.

a. Neigungen.

Neigung von *P* zu *n*	135° — 3′,5
— — *T* zu *n*	128 — 53,0
— — *M* zu *n*	134 — 56,5
— — *o* zu *n*	136 — 15,2
— — *y* zu *o*	140 — 32,5
— — *y* zu *T′*	134 — 19,2
— — *y* zu *x*	149 — 57,2

b. Ebene Winkel.

Ebener Winkel zwischen den Kanten *on* und *nP* . .	96 — 49,8
— — — — — *on* und *ox* . .	51 — 59,2
— — — — — *yT′* und *T′T′* . .	125 — 16,1
— — — — — *yT′* und *yT′* . .	89 — 18,2
— — — — — *yT′* und *yo* . .	90 — 41,8
— — — — — *yo* und *yx* . .	134 — 39,1

III. Am Krystall Fig. 165.

a. Neigungen.

Neigung von *T* zu *k*	149° — 24′,3
— — *T* zu *z*	150 — 0,4
— — *z* zu *M*	150 — 35,3

Neigung von z' zu y'	113° — 29′,4
— — z' zu o	124 — 59,6
— — z zu n	140 — 12,4
— — q zu x	163 — 33,2
— — q zu P	146 — 7,1
— — q zu o	148 — 48,6
— — q zu n	125 — 59,4
— — P zu k	116 — 7,0
— — y zu k'	144 — 15,5

b. Ebene Winkel.

Ebener Winkel zwischen den Kanten $T'z'$ und yz' . .	140 — 26,2
— — — — — $z'M$ und oz' . .	83 — 13,5
— — — — — $T'y$ und $z'y$ . .	153 — 34,5
— — — — — $z'y$ und yo . .	117 — 7,3
— — — — — oM und oz' . .	146 — 51,5
— — — — — ox und oq . .	146 — 51,5
— — — — — oq und on . .	85 — 7,7
— — — — — oM und on . .	128 — 0,8

u. s. f.

IV. Am Krystall Fig. 168.

a. Neigungen.

Neigung von u zu y	146° — 59′,9
— — u zu o	153 — 21,0
— — u zu v	160 — 35,6

Neigung von u zu T'	149° — 40′,4
— — v zu T'	146 — 2,8
— — v zu z'	158 — 58,4
— — v zu M	142 — 24,5
— — v zu n	129 — 11,6
— — v zu o	146 — 1,2
— — n zu z	140 — 12,4
— — n zu t	122 — 16,9
— — t zu T	142 — 28,4
— — t zu z	116 — 54,0
— — t zu P	138 — 59,5
— — t zu x	157 — 7,5

b. Ebene Winkel.

Ebener Winkel zwischen den Kanten $T'u$ und yu . .	84° — 42,4
— — — — — $T'u$ und $T'y$ . .	130 — 43,3
— — — — — $T'v$ und $T'u$ . .	143 — 39,9
— — — — — $T'v$ und $T'z'$ . .	140 — 20,7
— — — — — $T'v$ und uv . .	115 — 47,3
— — — — — uv und ov . .	126 — 57,3
— — — — — uo und xo . .	69 — 26,7
— — — — — uo und vo . .	143 — 41,0
— — — — — ov und on . .	94 — 53,1
— — — — — on und oP . .	121 — 25,9

u. s. f.

V. An den übrigen Krystallen.

Neigung von *r* zu *T*	121° — 28′,5
— — *r* zu *k*	127 — 20,5
— — *r* zu *o*	150 — 18,0
— — *r* zu *z*	107 — 19,8
— — *q* zu *T′*	96 — 40,7
— — *q* zu *z′*	93 — 48,3
— — *g* zu *g*	74 — 28,2
— — *g* zu *T*	98 — 48,0
— — *g* zu *T′*	96 — 51,6
— — *g* zu *z*	104 — 3,2
— — *g* zu *z′*	102 — 56,0
— — *g* zu *P*	150 — 52,4
— — *g* zu *x*	150 — 31,3
— — *g* zu *o*	153 — 49,8
— — *g* zu *n*	143 — 50,8
— — *m* zu *m*	144 — 39,6
— — *m* zu *P*	146 — 30,6
— — *m* zu *t*	158 — 42,0
— — *m* zu *n*	143 — 35,0
— — *s* zu *s*	66 — 39,6
— — *s* zu *o*	150 — 12,6
— — *s* zu *T′*	128 — 15,6
— — *s* zu *n*	146 — 58,8

Neigung von *d* zu *d*	98° — 19′,4
— — *d* zu *T*	158 — 53,0
— — *d* zu *n*	150 — 0,2
— — *h* zu *h*	143 — 12,0
— — *h* zu *T*	121 — 21,0
— — *h* zu *x*	127 — 17,0
— — *i* zu *i*	36 — 56,4
— — *i* zu *T*	127 — 4,0
— — *i* zu *x*	101 — 40,1

und so fort.

Vom schiefen Rhomboïdoctaëder oder vom unsymmetrischen Octaëder.

Man denke sich drei Linien oder Axen von ungleicher Länge, die sich unter beliebigen Winkeln in ihren Mittelpuncten schneiden; man lege durch die Endpuncte dieser Axen Ebenen; diese Ebenen schneiden sich offenbar in Linien, die die Endpuncte je zweier Axen verbinden; es sind ungleichseitige Dreiecke; ihre Anzahl ist acht; der Körper den sie begrenzen, ist eben das unsymmetrische Octaëder, mit welchem wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Da bei diesem Octaëder alle Axen von ungleicher Länge sind, so ist es gleichgültig, welche von ihnen man als Hauptaxe ansieht; die Ebene, in welcher die beiden anderen Axen liegen, bildet alsdann die Basis des Octaëders; es giebt also in jedem Octaëder drei Ebenen die als Basen angesehen werden können; alle drei sind Rhomboïde. Wenn man Ebenen durch die Kanten des Octaëders legt, die einer Axe parallel gehen, so bilden diese Säulen mit rhomboïdischer Basis, und dieser Säulen giebt es eben so viele, als es Basen giebt, nämlich drei.

Das Prisma, das aus diesem Octaëder entsteht, wenn man vier mit der Hauptaxe parallele Ebenen durch die Basiskanten legt, und zwei Ebenen der Basis parallel durch beide Endpuncte der Axe zieht, ist ein schiefes Rhomboïdalprisma, in welchem die schiefangesetzte Endfläche schiefe Winkel mit beiden Ebenen macht, die man sich durch je zwei gegenüberliegende Kanten der Säule gelegt denken kann.

Um die Winkel eines solchen Octaëders zu berechnen, muss man nicht nur die Neigungen der Axen untereinander, sondern auch die Neigungen zweier Endkanten gegen die Axe wissen; es müssen also wenigstens fünf Stücke bekannt seyn. Man sieht leicht ein, dass der Gang der Rechnung sehr verschieden ausfallen muss, je nachdem diese oder jene fünf Stücke bekannt sind; wir wollen ihn jetzt nur ganz im Allgemeinen andeuten, und nachher die Ausführung an einem Beispiel zeigen.

Es sey Fig. 174 die Spitze eines solchen schiefen Rhomboïdoctaëders mit seinen Säulenflächen, nämlich R, S, T, U die Octaëderflächen, M, N, M', N' die Flächen der rhomboïdischen Säule, r, h, r', h' die Abstumpfungen der Seitenkanten der Säule. Wir wollen, wie immer, die halbe verticale Axe mit c, und von den horizontalen Axen (ich nenne sie hier aus Analogie horizontal, obgleich die Ebene, in der sie liegen, einen schiefen Winkel mit der verticalen Axe macht) die vordere Halbaxe mit a, die hintere mit $a_{,}$ die Halbaxe, die von M geschnitten wird, mit b, diejenige die von N geschnitten wird mit $b_{,}$ bezeichnen. Ich brauche nicht zu erinnern, dass r mit einer Ebene parallel ist, die man durch die Axen a, c legt, h mit einer Ebene, die durch die Axen b, c geht; die Säulenflächen sind der verticalen Axe parallel.

Um mit den Säulenflächen anzufangen, so denke man sich eine Ebene, welche die Säule queer durchschneidet, d. h. in einer Richtung, die senkrecht auf die verticale Axe c ist. Die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Flächen M, N, M', N' bilden offenbar ein Rhomboïd (Fig. 175), dessen Winkel den Neigungen dieser Flächen gleich sind, und dessen Diagonalen denselben Winkel mit einander machen, als die Flächen h, r Fig.

174. Bezeichnet man die Neigung der Diagonalen oder die Neigung von h zu r' mit α, die Neigung der kürzern Seite des Rhomboïds gegen die kürzere Diagonale oder $180° - \frac{N}{r}$ mit β; die Neigung der längern Seite des Rhomboïds gegen dieselbe Diagonale mit γ, so ist nach den beim schiefen Rhombenoctaëder entwickelten Formeln

$$\text{tg. } \alpha = \frac{2 \sin.\beta \sin.\gamma}{\sin.(\beta - \gamma)}$$

welche dazu dient, α aus β und γ zu finden. Diese Gleichung giebt auch, wenn man sie entwickelt:

$$\text{cot. } \gamma = \text{cot. } \beta + 2 \text{ cot. } \alpha$$

aus welcher man γ oder β berechnen kann, wenn α und β oder α und γ bekannt sind; nur muss man diese Formeln erst durch Einführung eines Hülfswinkels φ zur logarithmischen Rechnung bequem machen. Es sey $2 \text{ cot. } \alpha = \text{cot. } \varphi$, so ist:

$$\text{cot. } \gamma = \frac{\sin.(\beta + \varphi)}{\sin.\beta \sin.\varphi}$$
$$\text{cot. } \beta = \frac{\sin.(\varphi - \gamma)}{\sin.\varphi \sin.\gamma}.$$

Kommt noch irgend eine Säulenfläche vor, z. B. von der Form $nR^{o}_{s}x$, welche den rhomboïdischen Queerschnitt der Säule in der Linie Af schneidet, so dass $\frac{BC}{Cf} = \frac{1}{n}$ (siehe Fig. 176), so ist es auch leicht, ihre Neigung gegen die kürzere Diagonale AC des Queerschnitts, oder gegen eine Ebene, die durch die Axen a und c geht, zu finden. Bezeichnet man diesen Winkel fAC mit γ', so ist ebenfalls, wie beim schiefen Rhombenoctaëder:

$$\text{cot. } \gamma' = \frac{\text{cot.}\gamma + (n-1) \text{ cot.}\alpha}{n}$$

oder wenn man zur bequemeren Rechnung einen Hülfswinkel einführen will:

$$\text{cot } \gamma' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin.(\gamma + \varphi)}{\sin.\gamma \sin.\varphi}$$

worin $\text{cot. } \varphi = (n-1) \text{ cot. } \alpha$.

Diese Formel verwandelt sich, wenn $n = 2$, in folgende:

$$\cot. \gamma = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin.(\gamma+\alpha)}{\sin.\alpha \sin.\gamma}.$$

Es ist klar, dass man (ausser dem Werth von n, den man als bekannt voraussetzt) zwei Winkel wissen muss, um alle Neigungen der Säulenflächen untereinander zu finden. Sind nun noch drei Neigungen von R und S gegen die Säulenflächen oder untereinander bekannt, so lassen sich alle Winkel des Krystalls berechnen.

Man trifft immer eine Ecke an, in welcher drei Flächen oder zwei Flächen und eine von den durch die Axen gelegten Ebenen so zusammen kommen, dass in dem daraus gebildeten sphärischen Dreieck drei Stücke bekannt sind. Man berechnet alsdann die übrigen drei Stücke, wozu man in den meisten Fällen die Gaussischen Formeln mit grossem Nutzen anwenden kann. Indem man so immer weiter geht, und das Unbekannte aus dem Bekannten findet, wird am Ende alles bekannt.

Da in diesem System weder rechtwinklichte noch gleichseitige oder gleichschenklichte Dreiecke vorkommen, so leiden die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie keine Vereinfachung; obgleich also die Rechnung weitläuftiger ist, so ist doch die Anzahl der nöthigen Formeln viel beschränkter als bei den Systemen, die wir bisher betrachtet haben. Ein Beispiel wird uns hier am besten darüber belehren, was zu thun ist, und wir wählen hiezu den Kupfervitriol. Obgleich man eigentlich nur fünf (von einander unabhängige) Winkel zu wissen braucht, um alle übrigen zu finden, so führe ich hier doch alle Resultate meiner Messungen an, um sie untereinander zu controlliren; denn je mehr Winkel bekannt seyn

müssen, desto gewisser muss man seyn, dass sie keine grossen Fehler in sich schliessen.

Ich fand folgende Winkel (siehe Fig. 177):

(1)	Neigung von *P* zu *T*	127° — 40′
(2)	Neigung von *P* zu *r′* *)	103 — 27
(3)	Neigung von *T* zu *r′*	110 — 10
(4)	Neigung von *i* zu *r*	139 — 13
(5)	Neigung von *k* zu *n*	109 — 38
(6)	Neigung von *k* zu *r*	114 — 57
(7)	Neigung von *s* zu *n*	92 — 26
(8)	Neigung von *s* zu *r*	139 — 43
(9)	Neigung von *r* zu *n*	100 — 41
(10)	Neigung von *M* zu *T*	123 — 10
(11)	Neigung von *M* zu *r*	126 — 40

Von diesen Flächen liegen

r, *M*, *n*, *T*	*P*, *x*, *T′*
r, *i*, *P*	*P*, *u*, *M′*
r, *u*, *k*, *x*, *s*	

in derselben Zone.

Wir wollen die Flächen *P*, *i*, *k*, *s* als die Flächen des Grundoctaëders ansehen.

Man kann sich erst leicht überzeugen, dass die Messungen (3), (9), (10) und (11) gut untereinander stimmen. Nimmt man die Complemente

*) *r′* ist die der Fläche *r* parallele Fläche unter *P*.

der Messungen (3) und (11) zu 180° und addirt sie zummen, so findet man die Neigung von M zu T. Diese Complemente sind offenbar β und γ; setzt man ihre Werthe in die Formel

$$\text{tg. } \alpha = \frac{2 \sin. \beta \sin. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}$$

so findet man:

L. 2 = 0·30103	
L. sin. β = 9·97252	$\beta = 69° - 50'$
L. sin. γ = 9·90424	$\gamma = 53 - 20$
L. $\frac{1}{\sin.(\beta-\gamma)}$ = 0·54666	$\beta - \gamma = 16 - 30$
L. tg. α = 0·72445	$\alpha = 79 - 19{,}2.$

Die Messung (9) muss offenbar das Complement dieses Winkels zu 180° geben, wie es denn auch wirklich ist.

Wir werden nachher im Verlauf der Rechnung sehen, dass es von grossem Nutzen ist, die Neigungen der Octaëderflächen gegen die Flächen r und n zu wissen. Nun ist aber grade die Neigung von P zu n nicht gemessen worden, man muss sie also berechnen. Zu dem Ende denke man sich das sphärische Dreieck, welches aus dem Durchschnitt der Flächen P, T und r' entsteht, besonders (siehe Fig. 178); in demselben sind die drei Winkel, d. h. die Neigungen von P zu T, von T zu r' und von P zu r', bekannt; man kann also die Seiten desselben, oder die ebenen Winkel zwischen den Kanten PT und Tr', Tr' und Pr', Pr' und PT finden, nach den Formeln

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2}(A+B-C) \text{ cos.} \tfrac{1}{2}(A-B+C)}{\text{sin.} B \text{ sin.} C}}$$

$$\text{und cos. } \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2}(B+A-C) \text{ cos.} \tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sin.} A \text{ sin.} C}}.$$

A	$=103^\circ-27'$	A	$=103^\circ-27'$	B	$=127^\circ-40'$
$+B$	$=127-40$	$+C$	$=110-10$	$+C$	$=110-10$
	$231-7$		$213-37$		$237-50$
$-C$	$=110-10$	$-B$	$=127-40$	$-A$	$=103-27$
$(A+B-C)$	$=120-57$	$(A+C-B)$	$=85-57$	$(B+C-A)$	$=134-23$
$\frac{1}{2}(A+B-C)$	$=60-28{,}5$	$\frac{1}{2}(A+C-B)$	$=42-58{,}5$	$\frac{1}{2}(B+C-A)$	$=67-11{,}5$

L.cos.$(60^\circ-28',5)$ = 9·69267
L.cos.$(42-58',5)$ = 9·86430
L. $\frac{1}{\sin.(52^\circ-20')}$ = 0·10151
L. $\frac{1}{\sin.(69^\circ-50')}$ = 0·02748

L. $\cos.^2\frac{1}{2}a$ = 9·68596
L. $\cos.\frac{1}{2}a$ = 9·83298 $\frac{1}{2}a=45^\circ-50',77$ $a=\delta=91^\circ-41',5.$

L.cos.$(60^\circ-28',5)$ = 9·69267
L.cos.$(67-11,5)$ = 9·58844
L. $\frac{1}{\sin.(76^\circ-33')}$ = 0·01208
L. $\frac{1}{\sin.(69^\circ-50')}$ = 0·02748

L. $\cos.^2\frac{1}{2}b$ = 9·32067
L. $\cos.\frac{1}{2}b$ = 9·66035 $\frac{1}{2}b=62^\circ-46',64$ $b=\frac{Pr'}{Tr'}=125^\circ-33',3.$

Wir wollen gleich den dritten ebenen Winkel $c=\frac{PT}{Pr'}$ mit berechnen.

L.cos.$\frac{1}{2}(C+A-B)$ = 9·86430

L.cos.$\frac{1}{2}(C-A+B)$ = 9·58844

L. $\frac{1}{\sin.(76^\circ-33')}$ = 0·01208

L. $\frac{1}{\sin.(52^\circ-21')}$ = 0·10151

L. $\cos.^2\frac{1}{2}c$ = 9·56633

L. $\cos.\frac{1}{2}c$ = 9·78317 $\frac{1}{2}c = 52^\circ-37',75$ $c = \frac{PT}{Pr} = 105^\circ-15',5.$

Nun ist aber offenbar b das Complement der Neigung der vordern Endkante des Octaëders (oder von Pi) gegen die Axe zu 180°, also Neigung der vordern Endkante des von den Flächen P, i, k, s gebildeten Grundoctaëders, gegen die Axe . . $54^\circ-26',7$.

In dem sphärischen Dreieck, welches aus dem Durchschnitt der Flächen P, n, T gebildet wird, sind jetzt die Neigungen $\frac{P}{T}$, $\frac{n}{T}$ und der eingeschlossene ebene Winkel $\frac{PT}{nT} = 180^\circ - \delta$ bekannt: man kann also die übrigen Stücke vermöge der Gaussischen Formeln

$$\left.\begin{aligned} \text{tg. } \tfrac{1}{2}(b-c) &= \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-C)}{\sin.\frac{1}{2}(B+C)} \\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}(b+c) &= \text{tg. } \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)} \\ \cos. \tfrac{1}{2}A &= \sin. \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-C)}{\sin.\frac{1}{2}(b-c)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

finden. Hier ist nämlich $B = \frac{T}{n} = \alpha+\beta = 149^\circ-9',2$, $C = \frac{P}{T} = 127^\circ-40'$, $a = 180^\circ-\delta = 88^\circ-18',5$; also $\frac{1}{2}(B-C) = 10^\circ-44',6$, $\frac{1}{2}(B+C) = 138^\circ-24',6$, $\frac{1}{2}a = 44^\circ-9',2$.

L. tg. $\frac{1}{2}a$ = 9·98718	L. tg. $\frac{1}{2}a$ = 9·98718	L. sin. $\frac{1}{2}a$ = 9·84298
L.sin.$\frac{1}{2}(B-C)$ = 9·27047	L.cos.$\frac{1}{2}(B-C)$ = 9·99232	L.sin.$\frac{1}{2}(B-C)$ = 9·27047
L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(B+C)}$ = 0·17796	L. $\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)}$ = 0·12615(n)	L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(b-c)}$ = 0·57996
L. tg. $\frac{1}{2}(b-c)$ = 9·43561	L. tg. $\frac{1}{2}(b+c)$ = 0·10565(n)	L. cos. $\frac{1}{2}A$ = 9·69341

$\frac{1}{2}(b-c) = 15^\circ - 15',1$

$\frac{1}{2}(b+c) = 128 - 5,9$

$b = 143 - 21,0$

$c = 112 - 50,8 \qquad \frac{1}{2}A = 60^\circ - 25',2 \qquad A = 120^\circ - 50',4.$

Hier ist $c = \frac{Pn}{nT}$ das Complement der Neigung der Seitenendkante Pk gegen die Axe zu 180°. Also:

Neigung der Seitenendkante Pk gegen die Axe . . $67^\circ - 9',2$

Neigung von P zu n . . . . . $120 - 50,4.$

Man lege jetzt zwei Ebenen durch den Mittelpunct des Octaëders und die Endkanten Pi und is, so bilden diese mit der Fläche i ein sphärisches Dreieck, in welchem die Neigung von i gegen die durch die Kante iP und den Mittelpunct gelegte Ebene, oder $180^\circ - \frac{i}{r}$, aus den Messungen, die Neigung der beiden Ebenen aber, und die dazwischen liegende Neigung von Pi gegen die Axe durch Rechnung bekannt sind. Will man hier wieder die Gaussischen Formeln anwenden, so ist $B = 180^\circ - a = 100^\circ - 40',8$, $C = 180^\circ - \frac{i}{r} = 40^\circ - 47'$ $a = 54^\circ - 26',7$, mithin $\frac{1}{2}(B-C) = 29^\circ - 56',9$, $\frac{1}{2}(B+C) = 70^\circ - 43',9$ $\frac{1}{2}a = 27^\circ - 13',4$, woraus man auf dieselbe Weise wie oben findet:

$b = 68^\circ - 42',4 \qquad c = 38^\circ - 16',0 \qquad A = 59^\circ - 5',7.$

Hier ist offenbar b der ebene Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche i, c die Neigung der Seitenendkante is gegen die Axe und A das Complement der Neigung von i zu n zu 180°.

Die Ebenen, die durch den Mittelpunct und durch die Endkanten si und sk gehen, bilden mit der Fläche s ein ähnliches sphärisches Dreieck,

in welchem uns ebenfalls zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt sind, nämlich $C = \alpha = 79^\circ - 19',2$, $B = 180^\circ - \frac{s}{n} = 87^\circ - 34'$ $a = 38^\circ - 16'$; woraus

$$b = 73^\circ - 10',6 \qquad c = 70^\circ - 18',0 \qquad A = 40^\circ - 16',4.$$

Hier ist wieder b die Neigung der hintern Endkante sk gegen die Axe, c der ebene Winkel an der Spitze des Octaëders auf der Fläche s, und A das Complement $\frac{s}{r}$ zu 180°, das schon aus den Messungen bekannt ist.

Wir besitzen jetzt die fünf Stücke, die wir brauchen, um alle übrigen Winkel des unsymmetrischen Octaëders zu berechnen, nämlich vier Neigungen der Endkanten gegen die Axe und den Winkel α.

Aus diesen Werthen wollen wir gleich die Neigung von k zu r, von k zu n, und den ebenen Winkel an der Spitze des Octaëders auf der Fläche k berechnen. Man sieht nämlich leicht ein, dass in dem sphärischen Dreieck, welches die Fläche k mit zwei Ebenen bildet, die man sich durch die Endkanten sk und Pk und den Mittelpunct gelegt denkt, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind; diese Seiten sind nämlich die Neigungen der eben genannten Endkanten gegen die Axe, und der eingeschlossene Winkel ist $180^\circ - \alpha$. Man löst dieses Dreieck wieder vermöge der Gaussischen Formeln auf, denen man folgende Gestalt giebt:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg. } \tfrac{1}{2}(B-C) &= \text{cot. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b+c)} \\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}(B+C) &= \text{cot. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(b+c)} \\ \text{sin. } \tfrac{1}{2}a &= \text{cos. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II).}$$

Hier ist $A = 100^\circ - 40',8$; $b = 73^\circ - 10',6$; $c = 67^\circ - 9',2$; mithin $\frac{1}{2}A = 50^\circ - 20',4$; $\frac{1}{2}(b-c) = 3^\circ - 0',7$; $\frac{1}{2}(b+c) = 70^\circ - 9',9$; also:

L. cot. $\frac{1}{2}A$ = 9·91858	L. cot. $\frac{1}{2}A$ = 9·91858	L. cos. $\frac{1}{2}A$ = 9·80498
L. sin. $\frac{1}{2}(b-c)$ = 8·72048	L. cos. $\frac{1}{2}(b-c)$ = 9·99940	L. sin. $\frac{1}{2}(b-c)$ = 8·72048
L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(b+c)}$ = 0·02656	L. $\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}(b+c)}$ = 0·46940	L. $\frac{1}{\sin.(B-C)}$ = 1·33484
L. tg. $\frac{1}{2}(B-C)$ = 8·66562	L. tg. $\frac{1}{2}(B+C)$ = 0·38738	L. sin. $\frac{1}{2}a$ = 9·86020

$\frac{1}{2}(B-C) = 2^\circ - 39',1$ $\qquad$ $\frac{1}{2}a = 46^\circ - 27'$

$\frac{1}{2}(B+C) = 67 - 42,8$

$B = 70 - 21,9$

$C = 65 - 3,7$ $\qquad$ $a = 92 - 54.$

B und C sind die Complemente der Neigungen von k gegen n' und r' zu 180°, und a der ebene Winkel an der Spitze des Octaëders auf der Fläche k.

Obgleich wir die Neigung von P gegen die beiden Ebenen, die man sich durch die Endkante Pi, Pk und durch den Mittelpunct gelegt denken kann, schon bekannt sind, so wollen wir doch den ebenen Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche P nach derselben Formel berechnen, um eine Controlle für die beiden ersten Neigungen und mithin auch für die bisher gefundenen Neigungen der Endkanten gegen die Axe zu haben.

Wir haben $A = 79^\circ - 19'2$; $b = 67^\circ - 9',2$; $c = 54^\circ - 26',7$; mithin $\frac{1}{2}A = 39^\circ - 39',6$; $\frac{1}{2}(b-c) = 6^\circ - 21',3$; $\frac{1}{2}(b+c) = 60^\circ - 48',0$; woraus:

$B = 76^\circ - 33'$ $\qquad$ $C = 59^\circ - 9',6$ $\qquad$ $a = 68^\circ - 36',6.$

Die Winkel B und C sind die Complemente der Neigungen von P gegen r' und von P gegen n zu 180°; a aber ist der gesuchte ebene Winkel an der Spitze auf die Octaëderfläche P.

Um Uebereinstimmung in allen Puncten der Rechnung zu haben, ist es nothwendig, ausser den fünf Stücken, die durch die Erfahrung gegeben seyn müssen, nur berechnete Werthe einzuführen und die beobachteten auszuschliessen. Wir wollen deshalb die eben für die Flächen *k* und *P* geführte Rechnung auch für die Flächen *i* und *s* vornehmen, obgleich wir die Winkel dieser Flächen schon im Vorhergehenden zum Theil aus den Messungen, zum Theil durch Rechnung abgeleitet haben. Man findet vermöge derselben Formeln

Neigung von *i* gegen eine Ebene, die durch die Halbaxen *a*, *c* geht	40°	—	47′,0
Neigung von *i* gegen eine Ebene, die durch die Halbaxen *b*, *c* geht	59	—	6,0
Ebener Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche *i* .	68	—	42,6
Neigung von *s* gegen eine Ebene, die durch die Halbaxen *a*, *c* geht	40	—	16,4
Neigung von *s* gegen eine Ebene, die durch die Halbaxen *b*, *c* geht	87	—	34,0
Ebener Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche *s* .	70	—	18,0

Es ist jetzt ein leichtes die Winkel, die die Axen miteinander machen, zu berechnen. Bezeichnet man den Winkel zwischen den Axen *a* und *b* mit λ, den Winkel zwischen *a* und *c* mit μ, den Winkel zwischen *b* und *c* mit ν; ferner die Neigung der vordern Endkante des Octaëders gegen die Axe mit r, die Neigung der hintern Endkante gegen die Axe mit ϱ, die Neigung der Seitenendkante, die *b* schneidet, mit r', und die der Seitenendkante, die $b_{/}$ schneidet, mit ϱ', so ist, wie aus dem Vorhergehenden bekannt,

$$\text{tg. } \mu = \frac{2 \sin. r \cdot \sin. \varrho}{\sin. (r - \varrho)}$$

$$\text{tg. } \nu = \frac{2 \sin. r' \cdot \sin. \varrho'}{\sin. (r' - \varrho')}$$

woraus man findet:

$$\mu = 101^\circ - 39',0 \qquad \nu = 112^\circ - 56',3.$$

Um λ zu finden, construire man sich im Mittelpunct ein sphärisches Dreieck aus dem Durchschnitt der Basis mit den Ebenen, die man sich durch die Halbaxen a, c und b, c gelegt denken kann; in diesem Dreieck sind zwei Winkel, nämlich μ und ν, und der eingeschlossene Winkel, nämlich $180^\circ - \alpha$, bekannt. Man kann also die übrigen Stücke vermöge der oben angeführten Gaussischen Formeln finden. Man hat nämlich $A = 100^\circ - 40',8$, $b = 112^\circ - 56',3$, $c = 101^\circ - 39',0$, mithin $\frac{1}{2}A = 50^\circ - 20',4$, $\frac{1}{2}((b-c) = 5^\circ - 38',7$, $\frac{1}{2}(b+c) = 107^\circ - 17',7$ (dessen Complement $= 72^\circ - 42',3$); und:

L. cot. $\frac{1}{2}A = 9{\cdot}91858$	L. cot. $\frac{1}{2}A = 9{\cdot}91858$	L. cos. $\frac{1}{2}A = 9{\cdot}80498$
L. sin. $\frac{1}{2}(b-c) = 8{\cdot}99284$	L. cos. $\frac{1}{2}(b-c) = 9{\cdot}99789$	L. sin. $\frac{1}{2}(b-c) = 8{\cdot}99284$
L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(b+c)} = 0{\cdot}02010$	L. $\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}(b+c)} = 0{\cdot}52682(n)$	L. $\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(B-C)} = 1{\cdot}07006$
L. tg. $\frac{1}{2}(B-C) = 8{\cdot}93152$	L. tg. $\frac{1}{2}(B+C) = 0{\cdot}44329(n)$	L. sin. $\frac{1}{2}a = 9{\cdot}86788$

$$\frac{1}{2}(B-C) = 4^\circ - 52',9 \qquad \frac{1}{2}a = 47^\circ - 32',2$$
$$\frac{1}{2}(B+C) = 109 - 48,9 \qquad a = 95 - 4,4.$$
$$B = 114 - 41,8$$
$$C = 104 - 56,0.$$

Hier ist $a = \lambda$, B die Neigung der Ebenen, die man sich durch die Halbaxen a, c und a, b, C die Neigung der Ebenen, die man sich durch die Halbaxen b, c und a, b gelegt denkt.

Da uns in den (gradlinigten) Dreiecken, die von den Endkanten des Octaëders und von den Halbaxen gebildet werden, die Neigungen der erstern

gegen die verticale Axe, und die Neigungen der verticalen Axe gegen die horizontalen bekannt sind, so können wir die Neigungen der Endkanten gegen die horizontalen Axen berechnen, indem wir für jedes Dreieck die Summe der beiden bekannten Winkel von 180° abziehen. Man findet so:

Neigung der vordern Endkante gegen die Halbaxe a . . 23° — 54′,3
Neigung der hintern Endkante gegen die Halbaxe $a_{,}$ . . 28 — 28,4
Neigung der Seitenendkante si gegen die Halbaxe b . . 28 — 47,7
Neiguug der Seitenendkante Pk gegen die Halbaxe $b_{,}$. 45 — 47,1

Es bleibt uns jetzt noch übrig die Neigungen der Flächen des Octaëders gegen seine Basis zu berechnen, ferner die ebenen Winkel an der Basis derselben Flächen, und die Neigungen der Basiskanten gegen die horizontalen Halbaxen. Zu dem Ende benutzen wir die sphärischen Dreiecke, welche vom Durchschnitt der Octaëderfläche und der durch die Axen a, c und b, c gelegten Ebenen mit der Basis gebildet werden.

In jedem dieser Dreiecke sind uns zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt; in demjenigen z. *B.* welcher von der Octaëderfläche P, der Basis und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird, die Neigung von P gegen die eben bezeichnete Ebene, die Neigung derselben Ebene gegen die Basis, und der Winkel zwischen der vordern Endkante Pi und der Halbaxe a. Man wendet hier wieder die Gaussischen Formeln (I) an; man thut wohl, alle acht sphärischen Dreiecke zu berechnen, um eine Controlle für die gefundenen Werthe zu haben. Man findet so:

1) In dem sphärischen Dreieck, welches von der Fläche P, von der Basis und von der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 23'' - 54',3 \qquad B = 76^\circ - 33',0 \qquad C = 65^\circ - 18',2$$

$$\tfrac{1}{2}a = 11^\circ - 57',2 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 5^\circ - 37',4 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 70^\circ - 55',6$$

woraus

$$b = 34^\circ - 4',1 \qquad c = 31^\circ - 33',3 \qquad A = 44^\circ - 42',4.$$

Hier ist A die Neigung der Fläche P gegen die Basis, b der Winkel zwischen der Kante an der Basis, die unter P liegt, und der Halbaxe a; c ist der ebene Winkel der Octaëderfläche P vorn an der Basis.

2) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche i, von der Basis, und von der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 23^\circ - 54',3 \qquad B = 114^\circ - 41',8 \qquad C = 40^\circ - 47'$$

$$\tfrac{1}{2}a = 11^\circ - 57',2 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 36^\circ - 57',4 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 77^\circ - 44',4$$

woraus

$$b = 45^\circ - 57',9 \qquad c = 31^\circ - 7',3 \qquad A = 30^\circ - 48',6.$$

Hier ist A die Neigung der Fläche i gegen die Basis, b der ebene Winkel auf der Octaëderfläche i vorn an der Basis, und c der Winkel den die Axe a mit der Basiskante macht, die unter i liegt.

3) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche k, der Basis und der durch die Halbaxen a und c gelegten Ebenen gebildet wird:

$$a = 28^\circ - 28',4 \qquad B = 65^\circ - 18',2 \qquad C = 65^\circ - 3',7$$

$$\tfrac{1}{2}a = 14^\circ - 14',2 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 0^\circ - 7',3 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 65^\circ - 11',0$$

woraus

$$A = 56^\circ - 46',4 \qquad b = 31^\circ - 11',2 \qquad c = 31^\circ - 7',2.$$

Hier ist A die Neigung von k gegen die Basis des Grundoctaëders, b der ebene Winkel auf der Octaëderfläche k, hinten an der Basis, c die Neigung der Basiskante, die unter k liegt, gegen die Halbaxe a.

4) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche s, der Basis und der durch die Halbaxen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 28^\circ - 28',4 \qquad B = 114^\circ - 41',8 \qquad C = 40^\circ - 16',4$$

$$\tfrac{1}{2}a = 14^\circ - 14',2 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 37^\circ - 12',7 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 77^\circ - 29',1$$

woraus

$$A = 33^\circ - 24' \qquad b = 51^\circ - 55',9 \qquad c = 34^\circ - 4',1.$$

Hier ist A die Neigung von s gegen die Basis, b der ebene Winkel hinten an der Basis und c die Neigung der Basiskante, die unter s liegt, gegen die Halbaxe $a_{,}$

5) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche P, der Basis und der Ebene, die man sich durch die Halbaxe $b_{,}$ c gelegt denken kann, gebildet wird:

$$a = 45^\circ - 47',1 \qquad B = 104^\circ - 56' \qquad C = 59^\circ - 9',6$$

$$\tfrac{1}{2}a = 22^\circ - 53',6 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 22^\circ - 53',2 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 82^\circ - 2',8$$

woraus

$$A = 44^\circ - 42',4 \qquad b = 79^\circ - 50',2 \qquad c = 61^\circ - 0',4.$$

Hier ist A die Neigung von P gegen die Basis, b der ebene Winkel auf der Octaëderfläche P zur Seite an der Basis, c die Neigung der Basiskante, die unter P liegt, gegen die Halbaxe $b_{,}$

6) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche k, der Basis und der durch die Halbaxen $b_{,}$ c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 45^\circ - 47',1 \qquad B = 75^\circ - 4',0 \qquad C = 70^\circ - 21',9$$

$$\tfrac{1}{2}a = 22^\circ - 53',6 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 2^\circ - 21',1 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 72^\circ - 43',0$$

woraus

$$A = 56^\circ - 46',3 \qquad b = 55^\circ - 53',3 \qquad c = 53^\circ - 48',5.$$

Hier ist A die Neigung von k gegen die Basis, b der ebene Winkel auf der Octaëderfläche k, zur Seite an der Basis, c die Neigung der Basiskante, die unter k liegt, gegen die Halbaxe b.

7) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche i, der Basis und einer durch die Halbaxen b, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 28^\circ - 47',7 \qquad B = 104^\circ - 56' \qquad C = 59^\circ - 6'.$$

$$\tfrac{1}{2}a = 14^\circ - 23',9 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 22^\circ - 55' \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 82^\circ - 1'$$

woraus

$$A = 30^\circ - 49',3 \qquad b = 65^\circ - 20',2 \qquad c = 53^\circ - 48',4.$$

Hier ist A die Neigung von i gegen die Basis, b der ebene Winkel auf der Octaëderfläche i zur Seite an der Basis und c die Neigung der Basiskante, die unter i liegt, gegen die Halbaxe b.

8) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche s, der Basis und der durch die Halbaxen b, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 28^\circ - 47',7 \qquad B = 87^\circ - 34',0 \qquad C = 75^\circ - 4'$$

$$\tfrac{1}{2}a = 14^\circ - 23',9 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 6^\circ - 15' \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 81^\circ - 19'$$

woraus

$$A = 33^\circ - 23',3 \qquad b = 61^\circ - 0',7 \qquad c = 57^\circ - 46',3.$$

Hier ist A die Neigung von s gegen die Basis, b die Neigung der Basiskante, die unter s liegt, gegen die Halbaxe b, und c der ebeee Winkel der Octaëderfläche s zur Seite an der Basis.

Man sieht aus der bisher geführten Rechnung, dass der Hauptvortheil der Gaussischen Formeln darin besteht, mit Leichtigkeit mehrere Winkel zugleich zu finden, und indem man denselben Winkel mehrere Male berechnet, eine sichere Controlle für die Richtigkeit der Rechnung zu haben.

Wir sehen aus dem Vorhergehenden, dass die Neigung der Basiskanten des von den Flächen P, i, s, k gebildeten unsymmetrischen Octaëders gleich $65^\circ - 11',3$ ist. Die Neigung von M zu T ist aber $123^\circ - 10'$, es ist also nicht möglich, dass die Säulenflächen M, T die dem Grundoctaëder angehörigen seyn können.

Um die Neigung der Säulenflächen zu finden, welche durch die Basiskanten des Grundoctaëders gehen und zugleich parallel mit der Axe c sind, betrachte man die sphärischen Dreiecke für sich, welche von einer der Säulenflächen, von der Basis des Octaëders und von einer Ebene gebildet werden, die durch die Axen a, c geht. In jedem dieser sphärischen Dreiecke sind uns drei Stücke bekannt, nämlich zwei Seiten, d. h. die Neigung der Basiskante des Octaëders gegen die Halbaxe a, und die Neigung der vordern Säulenkante gegen dieselbe Halbaxe oder μ; und der eingeschlossene Winkel, d. h. die Neigung der Basis gegen die Ebene, die man sich durch die Axen a, c gelegt denkt. Berechnet man diese sphärischen Dreiecke nach den Gaussischen Formeln (II), so findet man:

1) Im sphärischen Dreieck, welches von der Basis des Octaëders, von der durch die Axen a, c gelegten Ebene und von derjenigen Säulenfläche gebildet wird, die unter i liegt:

$$A = 65^\circ - 18',2 \qquad b = 101^\circ - 39' \qquad c = 31^\circ - 7',2$$

$$\tfrac{1}{2}A = 32^\circ - 39',1 \qquad \tfrac{1}{2}(b-c) = 35^\circ - 15',9 \qquad \tfrac{1}{2}(b+c) = 66^\circ - 23',1$$

woraus

$$B = 117^\circ - 3',9 \qquad C = 28^\circ - 1',7 \qquad a = 51^\circ - 52',8.$$

Hier ist B die Neigung der Basis gegen die Säulenfläche die unter i liegt, C die Neigung derselben Säulenfläche gegen eine durch a, c gelegte

Ebene, und a die Neigung der Basiskante, die unter i liegt, gegen die vordere Säulenkante.

2) Im sphärischen Dreieck, welches von der Basis des Octaëders, von der durch die Axen a, c gelegten Ebene und von der Säulenfläche gebildet wird, die unter P liegt:

$$A = 114^\circ - 41',8 \qquad b = 101^\circ - 39' \qquad c = 34^\circ - 4',1$$

$$\tfrac{1}{2}A = 57^\circ - 20',9 \qquad \tfrac{1}{2}(b-c) = 33^\circ - 47',5 \qquad \tfrac{1}{2}(b+c) = 67^\circ - 51',6$$

woraus

$$B = 75^\circ - 45',4 \qquad C = 33^\circ - 40',0 \qquad a = 113^\circ - 22',0.$$

Hier ist B die Neigung der Basis gegen die Säulenfläche die unter P liegt, C die Neigung derselben Säulenfläche gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene, a endlich der ebene Winkel zwischen der Basiskante, die unter P liegt, und der vordern Säulenkante.

Bezeichnet man nun die eben berechnete Neigung der Säulenfläche, die unter i liegt, gegen die Ebene, die man sich durch die Axen a, c gelegt denkt, mit γ', so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\cot.\gamma = \frac{\cot.\gamma' + (n-1)\cot.\alpha}{n}$$

$$\text{oder } n = \frac{\cot.\gamma' - \cot.\alpha}{\cot.\gamma - \cot.\alpha} = \frac{\sin.\gamma \sin.(\alpha-\gamma')}{\sin.\gamma' \sin.(\alpha-\gamma')}.$$

Setzt man hierin $\alpha = 79^\circ - 19',2$, $\gamma' = 28^\circ - 1',7$, und $\gamma = 53^\circ - 20'$, wie die Messungen geben, so findet man

$$n = 3{,}040$$

also sehr nahe gleich 3, woraus folgt, dass $3R^\circ x$ das krystallographische Zeichen der Flächen M und $3S^\circ x$ das Zeichen der Fläche T ist.

Will man nun die Neigungen der Flächen M und T gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene genauer finden, als es durch Messung geschehen konnte, so braucht man dazu die Formeln

$$\cot.\gamma = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin.(\gamma'+\varphi)}{\sin.\gamma' \sin.\varphi}$$

$$\cot.\beta = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin.(\varphi-\beta')}{\sin.\beta' \sin.\varphi}$$

in welchem $\cot.\varphi = (n-1)\cot.\alpha$.

Hier ist $n = 3$, $\alpha = 79^\circ - 19',2$, $\beta' = 33^\circ - 40',0$, $\gamma' = 28^\circ - 1',7$, also

$$\beta = 69^\circ - 27',5$$

$$\gamma = 53 - 3,6.$$

Diese Werthe weichen bedeutend von den durch Messung gefundenen ab, aber bei Salzen, deren Krystallisation oft durch zufällige Umstände gestört wird, und deren Flächen fast nie vollkommen spiegelnd sind, ist oft eine grössere Genauigkeit nicht zu erlangen.

Es ist jetzt nicht schwer auch die Neigungen der Octaëderflächen i, P, k, s gegen die neuen Säulenflächen M, T, M', T' zu finden, die nun auch von den Resultaten der Messung ein wenig abweichen werden. In den sphärischen Dreiecken, welche vom Durchschnitt dieser Flächen mit der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet werden, sind uns die Neigungen dieser Flächen gegen die eben bezeichnete Ebene, und die Neigungen der Endkanten des Octaëders gegen die vordere und hintere Säulenkante bekannt; wir können uns also wieder der Gaussischen Formeln (I) bedienen, um die übrigen Stücke zu finden. Wir haben nämlich:

1) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen i, M und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 125^\circ - 33',3 \qquad B = 53^\circ - 3',6 \qquad C = 40^\circ - 47',0$$

$$\tfrac{1}{2}a = 62^\circ - 46',7 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 6^\circ - 8',3 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 46^\circ - 55',3$$

woraus

$$A = 139^\circ - 20',6 \qquad b = 86^\circ - 25',4 \qquad c = 54^\circ - 39',2.$$

Hier ist A die Neigung von i zu M, b der ebene Winkel zwischen der Endflante iP und der Kante iM, und c der ebene Winkel zwischen den Kanten iM und MT.

2) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen P, T und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 125^\circ - 33',3 \qquad B = 76^\circ - 33' \qquad C = 69^\circ - 27',5$$

$$\tfrac{1}{2}a = 62^\circ - 46',7 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 3^\circ - 32',8 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 73^\circ - 0',3$$

woraus

$$A = 127^\circ - 40',6 \qquad b = 88^\circ - 36',0 \qquad c = 74^\circ - 16',0.$$

Hier ist A die Neigung von P zu T, b der ebene Winkel zwischen den Endkanten PT und MT, c der ebene Winkel zwischen den Kanten Pi und PT.

3) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen k, M' und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 106^\circ - 49',4 \qquad B = 65^\circ - 3',7 \qquad C = 53^\circ - 3',6$$

$$\tfrac{1}{2}a = 53^\circ - 24',7 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 6^\circ - 0',1 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 59^\circ - 3',7$$

woraus

$$A = 117^\circ - 35',3 \qquad b = 78^\circ - 19',8 \qquad c = 59^\circ - 50',8$$

Hier ist A die Neigung von k gegen M', c der ebene Winkel zwischen den Kanten sk und kM', und b der ebene Winkel zwischen den Kanten kM' und $M'T'$.

4) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen s, T' und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 106^\circ - 49',4 \qquad B = 69^\circ - 27',5 \qquad C = 40^\circ - 16',4$$
$$\tfrac{1}{2}a = 53^\circ - 24',7 \qquad \tfrac{1}{2}(B-C) = 14^\circ - 35'.6 \qquad \tfrac{1}{2}(B+C) = 54^\circ - 52',0$$

woraus

$$A = 116^\circ - 17',2 \qquad b = 88^\circ - 43',1 \qquad c = 43^\circ - 38',5.$$

Hier ist A die Neigung von s zu T', b der ebene Winkel zwischen den Kanten sk und sT', und c der ebene Winkel zwischen den Kanten sT' und $T'M'$.

Wir haben an unsern Krystall noch zwei secundäre Flächen, x und u. Die erstere stumpft die Kante PT' ab, und liegt zugleich in der Zone der Flächen s, k, welches ihre Lage hinlänglich bestimmt, ihr Zeichen ist $3Tx$, oder nach Weiss $\overline{|a_{,} : 3b_{,} : c|}$, wenn man sich erlaubt, die schiefwinklichten Axen des Grundoctaëders als Weissische Axen anzunehmen. Die Fläche u stumpft die Kante PM' ab und liegt in derselben Zone, ihr Zeichen ist also $\frac{1}{3}Tx$ oder nach Weiss $\overline{|a_{,} : \frac{1}{3}b_{,} : c|}$. Man kann die Neigungen dieser Flächen auf folgende Art berechnen.

Man lege eine Ebene queer durch die Flächen s, k, s', k', so dass sie mit denselben einen rechten Winkel macht; auf dieser Ebene werden die Flächen s, k, s', k' ein Rhomboïd abschneiden, in welchem die Neigungen der Seiten gegen die eine Diagonale den Neigungen von s, k gegen die durch die Axen a, c gelegte Ebene gleich sind, und in welchem die an-

dere Diagonale mit der Axe b zusammenfällt. Nennt man die Neigung dieser Diagonalen untereinander α, die Neigung der kürzeren Seite des Rhomboïds gegen die erste Diagonale β. und die Neigung der längeren Seite des Rhomboïds gegen dieselbe Diagonale γ, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\text{tg. } \alpha = \frac{2 \sin.\beta \sin.\gamma}{\sin.(\beta-\gamma)}.$$

Setzt man hierin $\beta = 65^\circ - 3',7$, $\gamma = 40^\circ - 16',4$, so findet man $\alpha = 70^\circ - 19',2$ dessen Complement $109^\circ - 40',8$.

Diess wäre zugleich die Neigung einer graden (d. h. mit der Axe b parallelen) Abstumpfung der hintern Endkante gegen die durch die Halbaxen a, c gelegte Ebene.

Um nun aus dieser Neigung die Neigung von x oder u gegen dieselbe durch die Halbaxen a, c gelegte Ebene zu berechnen, bedient man sich der folgenden Formel, die wir schon bei den Säulenflächen angewendet haben:

$$\text{cot. } \gamma' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin.(\gamma+\varphi)}{\sin.\gamma \sin.\varphi}$$

$$\text{worin cot. } \varphi = (n-1) \text{ cot. } \alpha.$$

Hierin ist γ' die gesuchte Neigung der neuen Fläche gegen die durch die Axen a, c gelegte Ebene; für die Fläche x haben wir $n = 3$, für die Fläche u, $n = \frac{1}{3}$; in beiden Fällen ist $\alpha = 109^\circ - 40',8$ und $\gamma = 65^\circ - 3',7$. Man findet so:

Neigung von x gegen die durch die Axen a, c gelegte Ebene

$(180^\circ - \frac{x}{r})$ . . . . . $94^\circ - 46',2$

Neigung von u gegen dieselbe Ebene $(180^\circ - \frac{u}{r})$ . . $44 - 37,0$

Man gelangt zu denselben Resultaten, wenn man die beiden sphärischen Dreiecke auflöset, welche von den Flächen x oder u, und den beiden Ebenen, die man durch die Axen a, c und b, c legen kann, gebildet werden. In jedem dieser Dreiecke kann man drei Stücke als bekannt ansehen, einen Winkel, nämlich die Neigung der eben bezeichneten Ebenen, und die beiden einschliessenden Seiten, nämlich die Neigung der hintern Endkante gegen die Axe, und die Neigung derjenigen Linie gegen die Axe, welche aus dem Durchschnitt der Fläche x oder u mit der durch die Axen b, c gelegten Ebene entsteht. Man berechnet erst diese letzteren Neigungen, indem man in der obigen Formel $\alpha = \nu = 112^\circ - 56',3$, $\gamma = 67^\circ - 9',2$ *), und für x, $n = 3$, für u aber $n = \frac{1}{3}$ macht. Man findet:

Neigung der Durchschnittslinie von x und der durch die Axen

b, c gelegten Ebene gegen die Axe . . . . $98^\circ - 3',9$

Neigung der Durchschnittslinie von u und der durch die Axen

b, c gelegten Ebene gegen die Axe . . . . $45 - 27,2$

Nun kann man die beiden eben erwähnten sphärischen Dreiecke vermittelst der Gaussischen Formeln auflösen. Man hat nämlich:

1) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche x und den beiden durch die Axen a, c und b, c gelegten Ebenen gebildet wird:

$$A = 100^\circ - 40',8 \qquad b = 98^\circ - 3',9 \qquad c = 73^\circ - 10',6$$

$$\tfrac{1}{2}A = 50^\circ - 20',4 \qquad \tfrac{1}{2}(b-c) = 12^\circ - 26',7 \qquad \tfrac{1}{2}(b+c) = 85^\circ - 37',3$$

woraus

$$a = 102^\circ - 29',2 \qquad B = 94^\circ - 46',3 \qquad C = 74^\circ - 27',3.$$

---

*) Diess ist die Neigung der Seitenendkante Pk gegen die Axe.

Hier ist a der ebene Winkel zwischen den Durchschnittslinien der Fläche x mit den beiden durch die Axen a, c und b, c gelegten Ebenen; B ist die Neigung von x gegen die erste; C die Neigung von x gegen die zweite von diesen Ebenen.

2) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche u und den beiden durch die Axen a, c und b, c gelegten Ebenen gebildet wird:

$$A = 100^\circ - 40',8 \qquad b = 73^\circ - 10',6 \qquad c = 45^\circ - 27',2$$

$$\tfrac{1}{2}A = 50^\circ - 20',4 \qquad \tfrac{1}{2}(b-c) = 13^\circ - 51',7 \qquad \tfrac{1}{2}(b+c) = 59^\circ - 18',9$$

woraus

$$a = 85^\circ - 36',3 \qquad B = 70^\circ - 37',8 \qquad C = 44^\circ - 37',2.$$

Hier ist a der ebene Winkel zwischen der Durchschnittslinie der Fläche u mit den beiden durch die Axen a, c und a, b gelegten Ebenen; C ist die Neigung von u gegen die erste, B die Neigung von u gegen die zweite dieser Ebenen.

Man kann es sich noch zur Aufgabe machen, die Neigungen der Flächen x und u gegen die Flächen P und i zu finden; zu dem Ende braucht man nur die sphärischen Dreiecke zu betrachten, welche aus dem Durchschnitt je zweier dieser Flächen mit der durch die Axen a, c gelegten Ebene entstehen; in jedem dieser Dreiecke sind uns zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt, nämlich die Neigungen der Flächen P, i, u, x gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene, und die Neigung der vordern Endkante des Grundoctaëders gegen die hintere. Man findet so:

1) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche x, P, und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$a = 54^\circ - 26',7 + 73^\circ - 10',6 = 127^\circ - 37',3$ $B = 94^\circ - 46',2$ $C = 76^\circ - 33',0$

$\frac{1}{2}a = 63^\circ - 48',7$ $\frac{1}{2}(B-C) = 9^\circ - 6',6$ $\frac{1}{2}(B+C) = 85^\circ - 39',6$

woraus

$$A = 124^\circ - 54',7 \quad b = 105^\circ - 44',0 \quad c = 69^\circ - 57',0.$$

Hier ist A die Neigung von P zu x, b ist der ebene Winkel zwischen den Kanten Px und Pi, c der ebene Winkel zwischen den Kanten Px und xs (oder xk).

2) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen i, x und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 127^\circ - 37',3 \quad B = 85^\circ - 13',8 \quad C = 40^\circ - 47',0$$

$\frac{1}{2}a = 63^\circ - 48',7$ $\frac{1}{2}(B-C) = 22^\circ - 13',4$ $\frac{1}{2}(B+C) = 63^\circ - 0',4$

woraus

$$A = 117^\circ - 24',6 \quad b = 119^\circ - 57',1 \quad c = 38^\circ - 21',7.$$

Hier ist A die Neigung von x zu i, b der ebene Winkel zwischen den Kanten ix und Pi, c der ebene Winkel zwischen den Kanten ix und xs.

3) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen u, P und der durch die Axen a, c gelegten Ebene gebildet wird:

$$a = 127^\circ - 37',3 \quad B = 76^\circ - 33' \quad C = 44^\circ - 37',0$$

$\frac{1}{2}a = 63^\circ - 48',7$ $\frac{1}{2}(B-C) = 15^\circ - 58'$ $\frac{1}{2}(B+C) = 60^\circ - 35$

woraus

$$A = 125^\circ - 38' \quad b = 108^\circ - 36',1 \quad c = 43^\circ - 11',5.$$

Hier ist A die Neigung von P zu u, b der ebene Winkel zwischen den Kanten Pu und ux, c der ebene Winkel zwischen den Kanten Pu und Pi.

Haüy hat noch drei andere Flächen am Kupfervitriol beobachtet, die er mit l, y und z bezeichnet. Die erste ist eine Säulenfläche und stumpft die Kante Tr' ab; die zweite stumpft die Kante Pr' und die dritte die Kante xs ab, Ihre Zeichen sind folgende:

nach Haüy.	nach Weiss.	nach uns.
$l = {}^3G$	$\overline{\lvert a : \frac{1}{3}b : \infty c \rvert}$	$\frac{1}{3}S^{\circ}x.$
$y = \overset{2}{I}$	$\overline{\lvert a : \frac{1}{2}b : c \rvert}$	$\frac{1}{2}Sx.$
$z = ({}^3EG^1B^2)$	$\overline{\lvert a : 3b : c \rvert}$	$3Ux.$

Die Haüyschen Zeichen beziehen sich auf die Fig. 180, die unsrigen auf die Fig. 174.

Die Neigungen dieser Flächen gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene werden eben so gefunden, wie die Neigungen der Flächen T, x und u gegen dieselbe Ebene. Sie sind:

Neigung von l gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene $37^{\circ} - 55',3.$

Neigung von y gegen dieselbe Ebene . . . . . $54 - 48,3.$

Neigung von z gegen dieselbe Ebene . . . . . $57 - 40,0.$

Zusammenstellung der im Vorhergehenden erhaltenen Resultate.

Zeichen der Flächen

nach Haüy,		nach Weiss.		nach uns (s. Fig. 174).
$i = \overset{2}{\breve{E}}$	=	$a : b : c$	=	R
$P = P$	=	$a : b_{,} : c$	=	S
$k = \overset{2}{A}$	=	$a_{,} : b_{,} : c$	=	T
$s = {}^{2}E$	=	$a_{,} : b : c$	=	U
$M = M$	=	$a : 3b : \infty c$	=	$3R^{\circ}x$
$T = T$	=	$a : 3b_{,} : \infty c$	=	$3S^{\circ}x$
$x = \overset{1}{B}$	=	$a_{,} : 3b_{,} : c$	=	$3Tx$
$z = (\overset{1}{E}G^{1}B^{2})$ *)	=	$a_{,} : 3b : c$	=	$3Ux$
$u = \overset{1}{C}$	=	$a_{,} : \frac{3}{2}b_{,} : c$	=	$\frac{1}{2}Tx$
$y = \overset{2}{\breve{I}}$ *)	=	$a : \frac{3}{2}b_{,} : c$	=	$\frac{1}{2}Sx$
$n = {}^{1}H^{1}$	=	$a : \infty b : \infty c$	=	x°
$r = {}^{1}G^{1}$	=	$\infty a : b : \infty c$	=	y°
$l = {}^{3}G$	=	$a : \frac{1}{2}b_{,} : \infty c$	=	$\frac{1}{2}S^{\circ}x.$

Winkel des von den Flächen i, P, k, s gebildeten Grundoctaëders:

Neigung der Halbaxe a gegen die Halbaxe b . . .	95° — 4′,4
Neigung der Halbaxe a gegen die Halbaxe c . . .	101 — 39,0
Neigung der Halbaxe b gegen die Halbaxe c . . .	112 — 56,3
Neigung der Ebenen, die man durch die Halbaxen a, c und b, c legen kann	100 — 40,8

*) Siehe Fig. 179.

Neigung der Ebenen, die man durch die Halbaxen *a*, *b* und *a*, *c* legen kann	114° — 41′,8
Neigung der Ebenen, die man durch die Halbaxen *a*, *b* und *b*, *c* legen kann	104 — 56,0
Neigung von *i* gegen die Ebene, die man durch die Axen *a*, *c* legen kann	40 — 47,0
Neigung von *P* gegen dieselbe Ebene	76 — 33,0
Neigung von *k* gegen dieselbe Ebene	65 — 3,7
Neigung von *s* gegen dieselbe Ebene	40 — 16,4
Neigung von *i* zu *P*	117 — 20,0
Neigung von *k* zu *s*	105 — 20,1
Neigung von *i* gegen eine durch die Ebenen *b*, *c* gelegte Ebene	59 — 6,0
Neigung von *s* gegen dieselbe Ebene	87 — 34,0
Neigung von *P* gegen dieselbe Ebene	59 — 9,6
Neigung von *k* gegen dieselbe Ebene	70 — 21,9
Neigung von *i* zu *s*	146 — 40,0
Neigung von *P* zu *k*	129 — 31,5
Neigung von *i* gegen die Basis	30 — 48,6
Neigung von *P*′ gegen die Basis	44 — 42,4
Neigung von *k* gegen die Basis	56 — 46,4
Neigung von *s* gegen die Basis	33 — 24,0
Neigung von *i* gegen *k*′	87 — 35,0
Neigung von *P* gegen *s*′	78 — 6,4
Neigung der vordern Endkante *Pi* gegen die Axe . .	54 — 26,7
Neigung der hintern Endkante *sk* gen die Axe . . .	73 — 10,6

Neigung der Seitenendkante *is* gegen die Axe . . .	38° — 16′,0
Neigung der Seitenendkante *Pk* gegen die Axe . . .	67 — 9,2
Neigung der Basiskante *ik′* gegen die Halbaxe *a* . .	31 — 7,2
Neigung der Basiskante *Ps′* gegen die Halbaxe *a* . .	34 — 4,1
Ebener Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche *i* .	68 — 42,6
Ebener Winkel vorn an der Basis auf derselben Fläche .	45 — 57,9
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Fläche	65 — 19,5
Ebener Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche *P* .	68 — 36,6
Ebener Winkel vorn an der Basis auf derselben Fläche .	31 — 33,3
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Fläche	79 — 50,1
Ebener Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche *k* .	92 — 54,0
Ebener Winkel hinten an der Basis auf derselben Fläche	31 — 11,2
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Fläche	55 — 54,8
Ebener Winkel an der Spitze auf der Octaëderfläche *s* .	70 — 18,0
Ebener Winkel hinten an der Basis auf derselben Fläche	51 — 55,9
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Fläche	57 — 46,1

Neigungen der secundären Flächen untereinander und gegen die primären, nebst einigen ebenen Winkeln.

Neigung von *M* zu *T*	122° — 31′,1
Neigung von *M* zu *n*	153 — 44,4
Neigung von *T* zu *n*	148 — 46,7
Neigung von *M* zu *r*	126 — 56,4
Neigung von *T* zu *r′*	110 — 32,5
Neigung von *l* zu *r′*	142 — 4,7

Neigung von *l* zu *T*	148° — 27′,8
Neigung von *i* zu *M*	139 — 20,6
Neigung von *i* zu *r*	139 — 13,0
Neigung von *i* zu *n*	120 — 54,0
Neigung von *i* zu *x*	117 — 24,6
Neigung von *P* zu *T*	127 — 40,6
Neigung von *P* zu *r′*	103 — 27,0
Neigung von *P* zu *y*	158 — 15,3
Neigung von *P* zu *n*	120 — 50,4
Neigung von *P* zu *x*	124 — 54,7
Neigung von *P* zu *u*	125 — 38,0
Neigung von *k* zu *M′*	117 — 35,3
Neigung von *k* zu *r′*	114 — 56,3
Neigung von *k* zu *n′*	109 — 38,1
Neigung von *k* zu *u*	159 — 33,3
Neigung von *k* zu *x*	129 — 50,8
Neigung von *s* zu *T′*	116 — 17,2
Neigung von *s* zu *r*	139 — 43,6
Neigung von *s* zu *n′*	92 — 26,0
Neigung von *s* zu *x*	135 — 2,6
Neigung von *s* zu *z*	162 — 36,4
Neigung von *x* zu *r′*	85 — 13,8
Neigung von *x* zu *n′*	105 — 32,7
Neigung von *u* zu *r′*	135 — 23,0
Neigung von *u* zu *n′*	109 — 22,2

Neigung von *x* zu *z*	152° — 26′,2
Neigung von *y* zu *r′*	125 — 11,7
Neigung von *z* zu *r*	122 — 20,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pi* und *Mi* . .	86 — 25,4
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Mi* und *MT* . .	54 — 39,2
Ebener Winkel zwischen den Kanten *PT* und *MT* . .	88 — 36,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pi* und *PT* . .	74 — 16,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *sk* und *kM′* . .	78 — 19,8
Ebener Winkel zwischen den Kanten *kM′* und *M′T′* .	59 — 50,8
Ebener Winkel zwischen den Kanten *sk* und *sT′* . .	88 — 43,1
Ebener Winkel zwischen den Kanten *sT′* und *T′M′* .	43 — 38,5
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Px* und *Pi* . .	105 — 44,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Px* und *kx* . .	110 — 3,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *ix* und *Pi* . .	119 — 57,1
Ebener Winkel zwischen den Kanten *ix* und *xs* . .	141 — 38,3
Ebener Winkel cwischen den Kanten *Pu* und *ux* . .	108 — 36,1
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pu* und *Pi* . .	43 — 11,5

ANHANG.

Vom dnppeltschiefen Rhombenoctaëder.

Man denke sich eine rhombische Säule mit einer Endfläche, die schief auf die vordere Seitenkante der Säule aufgesetzt ist, so hat man den Grundtypus eines besonderen Krystallsystems, das Mitscherlich am unterschwefelsauren Kalk entdeckt und in Poggendorfs Annalen Bd. VIII. p. 427 be-

schrieben hat. Die Axen des Octaëders, welches dieser Form zum Grunde liegt, machen ebenfalls lauter schiefe Winkel miteinander, wie die des unsymmetrischen Octaëders; aber zwei Ebenen durch die Axen *a*, *c* und *b*, *c* gelegt, sind rechtwinklicht gegeneinander geneigt, welches beim eigentlichen unsymmetrischen Octaëder, z. B. bei dem des Kupfervitriols, nicht der Fall ist.

Man sieht gleich, dass auf diese Weise eines von den fünf Elementen, deren Kenntniss zur Berechnung der Winkel am unsymmetrischen Octaëder nothwendig ist, wegfällt, und man nur vier Stücke zu wissen braucht, um alle übrigen zu finden.

Man könnte dieses neue Krystallsystem, wenn man der Mohsischen Benennungsweise, die hier die bequemste scheint, treu bleiben will, das tritoprismatische nennen, indem es zwischen dem hemiprismatischen und tetartoprismatischen mitten inne steht. Die Figuren 180 bis 184, welche die vorzüglichsten Krystallformen des unterschwefelsauren Kalkes vorstellen, machen jede weitere Erklärung überflüssig, und wir wenden uns gleich zur Rechnung.

Mitscherlich fand am unterschwefelsauren Kalk:

Neigung von *M* zu *M'*	78° — 10′
Neigung von *P* zu *a*	107 — 2
Neigung von *P* zu *b*	98 — 21
Neigung von *P* zu *f*	110 — 58

siehe die Figuren 181 — 185.

Die gegenseitige Lage der Flächen ist folgende:

f stumpft die Kante zwischen den Flächen *l*, *n* ab; *g* die Kante zwischen

n und k: ferner liegt c in Bezug auf k eben so, wie f in Bezug auf l. Alles dieses wird aus der Fig. 184 deutlich. Wenn man also f, g, c, i als die graden (d. h. mit den horizontalen Axen parallelen) Abstumpfungsflächen der Endkanten eines Rhomboïdoctaëders ansieht, so sind l, n, k drei Flächen dieses Octaëders. Dieselbe Bewandtniss hat es mit den Flächen e, h, d und m, die einem niedrigeren Octaëder gehören. Da m die Kante zwischen f und g abstumpft, so ist die Axe des zweiten Octaëders bei gleicher Basis, offenbar nur halb so lang, als bei dem von den Flächen l, n, k gebildeten Grundoctaëder. An beiden Octaëdern, die P zur gemeinschaftlichen Basis haben, erscheinen die Säulenfläche M als Abstumpfungsfläche der Basiskanten.

Die Flächen a, b, P bilden ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, in welchem (ausser dem rechten) zwei Winkel bekannt sind, nämlich $\frac{P}{a}$, $\frac{P}{b}$; man kann also die Seiten desselben $\frac{Pa}{ab}$, $\frac{Pa}{Pb}$, $\frac{Pb}{ab}$ berechnen.

Man findet

$$\frac{Pa}{ab} = 98^\circ - 44',2, \quad \frac{Pa}{Pb} = 87^\circ - 25',4, \quad \frac{Pb}{ab} = 107^\circ - 13',3.$$

Wenn man die Winkel, welche die drei Axen des zum Grunde liegenden schiefen Rhomboïdoctaëders untereinander machen, mit λ, μ, ν bezeichnet, nämlich den Winkel zwischen den Halbaxen a und b mit λ, den Winkel zwischen a und c mit μ und den Winkel zwischen b und c mit ν, so ist offenbar

$$\frac{Pa}{Pb} = 180^\circ - \lambda$$
$$\frac{Pb}{ab} = \mu$$
$$\frac{Pa}{ab} = 180^\circ - \nu,$$

denn die Kanten Pb, Pa, ab sind mit den Axen des Octaëders a, b, c parallel. Es ist also

$$\lambda = 92^\circ - 34',6$$
$$\mu = 107 - 13,3$$
$$\nu = 81 - 15,8.$$

Legt man jetzt eine Ebene durch die vordere Säulenkante MM' und den Mittelpunct (oder durch die Halbaxen a und c), so bildet diese mit den Flächen M und P ein sphärisches Dreieck, in welchem die Neigung von P gegen die eben bezeichnete Ebene (welche mit der Fläche b parallel geht), der Winkel zwischen der Durchschnittslinie dieser Ebene und der Fläche P und der vordern Säulenkante, und die halbe Neigung $\frac{M'}{M}$ an der Säulenkante bekannt sind, so dass man die übrigen Stücke durch Rechnung finden kann. Man findet vermöge der Gaussischen Formeln, deren Gebrauch ich jetzt als hinlänglich bekannt voraussetzen kann:

Neigung von P gegen M	$94^\circ - 7',7$
Ebener Winkel (r) zwischen der Kante PM und der Halbaxe a	$37 - 8,3$
Ebener Winkel (s) zwischen den Kanten PM und MM'	$108 - 39$

Auf ähnliche Art erhält man:

Neigung von P zu M'	$107 - 18,4$
Ebener Winkel (t) zwischen der Kante PM' und der Halbaxe a	$39 - 6,2$
Ebener Winkel (o) zwischen den Kanten PM' und MM'	$98 - 10,8$

Legt man eine Ebene durch die Axen a, c, so bildet diese mit den Flächen f und a' ein rechtwinklichtes sphärisches Dreieck, in welchem zwei Stücke bekannt sind, nämlich die Neigung von f zu a', und der ebene Winkel zwischen der Kante fa' und der Durchschnittlinie der Fläche a'

mit der Ebene, die durch die Axen a, c geht; der erste dieser Winkel ist $= \frac{P}{a'} + 180° - \frac{P}{f} = 142° - 0'$, der zweite $= \nu = 81° - 15'',8$. Berechnet man dieses Dreieck, so findet man:

Neigung von f gegen eine Ebene, die durch die Axen a, c geht, oder $180° - \frac{f}{b}$ . . . . . $84° - 38',1$

Neigung der hintern Endkante des Grundoctaëders gegen die Axe . . . . . $37 - 40,6$

Neigung derselben Endkante gegen die Kante fa' . . $96 - 54.3$

An der hintern Ecke an der Basis des Grundoctaëders wissen wir jetzt die Neigung der hintern Endkante gegen die Halbaxe $a_{,} = \mu - 37° - 40',6 = 69° - 32',7$; die Neigung der hintern Basiskante gegen die Halbaxe $a_{,} = r = 37° - 8',3$; ferner die Neigung einer durch die Halbaxen a, c gelegten Ebene gegen die Basis $\frac{P}{b} = 98° - 21$; man kann also die Neigungen der hintern Octaëderfläche gegen die Ebene, die man durch die Halbaxen a, c legen kann, und gegen die Basis, ferner den ebenen Winkel der Octaëderfläche hinten an der Basis, berechnen, nach den bekannten Formeln:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sin.}\frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(B+C) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}a = \text{cos. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sin.}\frac{1}{2}(B-C)}$$

worin also

$\frac{1}{2}A = 49° - 10',5$ $\quad \frac{1}{2}(b-c) = 16° - 12'2$ $\quad \frac{1}{2}(b+c) = 53° - 20',5$.

Man findet so:

Neigung der hintern Octaëderfläche (l) gegen eine durch die Halbaxen b, c gelegte Ebene $(180° - \frac{l}{b})$ . . $37° - 31'9$

Neigung derselben Octaëderfläche gegen die Basis $(180^\circ - \frac{l}{p})$ $70^\circ - 59',1$

Ebener Winkel der Octaëderfläche hinten an der Basis . 78 — 40,2

Setzt man in diese Formeln für A sein Complement zu 180°, und für r den Winkel $t = 39^\circ - 6'2$, so findet man, da alsdann

$\frac{1}{2}A = 40^\circ - 49',5$ $\frac{1}{2}(b-c) = 15^\circ - 13',3$ $\frac{1}{2}(b+c) = 54^\circ - 19',5$

Neigung der hintern Octaëderfläche (n) gegen gegen eine durch die Halbaxen a, c gelegte Ebene $(180^\circ - \frac{n}{b'})$ . . $41^\circ - 55',1$

Neigung derselben Octaëderfläche gegen die Basis $(180^\circ - \frac{n}{p})$ 82 — 56,5

Ebener Winkel der Octaëderfläche hinten an der Basis . 69 — 4,9

Um dieselben Rechnungen an der vordern Ecke an der Basis des Octaëders zu wiederholen, muss man die Neigung der vordern Endkante gegen die Halbaxe a wissen, die man denn auch leicht findet, da man die Neigung der hintern Endkante gegen die Axe c, und die Neigung der Axen a und c untereinander kennt, nach der für's schiefe Rhombenoctaëder bereits entwickelten Formel. Man findet:

Neigung der vordern Octaëderendkante gegen die Axe c . $27^\circ - 34',5$

Neigung der vordern Octaëderendkante gegen die Halbaxe a 45 — 12,2

Man kann jetzt die obigen Formeln auch auf die Stücke der vordern Ecke an der Basis des Octaëders anwenden, und findet alsdann:

Neigung der vordern Octaëderfläche (die über M' liegen würde) gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene . $45^\circ - 24',6$

Neigung derselben Octaëderfläche gegen die Basis . . 53 — 14,6

Ebener Winkel auf derselben Octaëderfläche vorn an der Basis 61 — 12,8

Neigung der vordern Octaëderfläche (k) gegen eine durch die Axen a, c gelegte Ebene $(180^\circ - \frac{k}{b'})$ . . . 49 — 50,9

Neigung derselben Octaëderfläche gegen die Basis ($180^\circ - \frac{k}{P}$) $63^\circ - 56',9$

Ebener Winkel auf derselben Octaëderfläche, vorn an der Basis . . . . . $51 - 23,8$

Theilt man nun durch Ebenen, die man durch die Axen *a*, *c* und *a*, *b* legt, die Spitzen des Octaëders in vier gleiche Theile, so bekommt man eben so viele rechtwinklichte sphärische Dreiecke, in deren jedem ein Winkel und eine Seite, nämlich die Neigung einer Octaëderfläche gegen die durch die Axen *a*, *c* gelegte Ebene, und die Neigung der vordern oder hintern Endkante des Octaëders gegen die Axe *c*, aus dem Vorhergehenden bekannt sind; man kann also die übrigen Stücke berechnen. Man findet so:

Neigung der vordern Octaëderfläche (die über *M'* liegen würde) gegen eine durch die Axen *b*, *c* gelegte Ebene $50^\circ - 51',4$

Ebener Winkel an der Spitze derselben Octaëderfläche . $36 - 38,8$

Neigung der Seitenendkante des Octaëders, die von *i* abgestumpft wird, gegen die Axe . . . . . $25 - 9,2$

Neigung der vordern Octaëderfläche *k* gegen eine durch die Axen *b*, *c* gelegte Ebene ($180^\circ - \frac{k}{a}$) . . . $47 - 21,0$

Ebener Winkel an der Spitze derselben Octaëderfläche . $39 - 0,3$

Neigung der Seitenendkante des Octaëders, die von *g* abgestumpft wird, gegen die Axe *c* . . . . . $28 - 45,3$

Neigung der hintern Octaëderfläche *l* gegen eine durch die Axen *b*, *c* gelegte Ebene ($180^\circ - \frac{l}{a'}$) . . . $61 - 10,3$

Ebener Winkel an der Spitze dieser Octaëderfläche . . $44 - 14.4$

Neigung der hintern Octaëderfläche *n* gegen eine durch die Axen *b*, *c* gelegte Ebene ($180^\circ - \frac{n}{a'}$) . . . $58 - 4,7$

Ebener Winkel an der Spitze dieser Octaëderfläche . . 46° — 3′,8

Da uns jetzt auf jeder Octaëderfläche zwei ebene Winkel bekannt sind, so ist es leicht den dritten zu finden.

Ebener Winkel zur Seite an der Basis der vordern Octaëderfläche, die über *M′* liegen würde . . . . . 82° — 8′,4

Ebener Winkel zur Seite an der Basis der vordern Octaëderfläche *k* . . . . . 89 — 35,9

Ebener Winkel zur Seite an der Basis der hintern Octaëderfläche *l* . . . . . 57 — 5,4

Ebener Winkel zur Seite an der Basis der hintern Octaëderfläche *n* . . . . . 64 — 51,3

Man kann die eben berechneten Werthe controlliren, indem man die sphärischen Dreiecke, welche aus dem Durchschnitt der Octaëderflächen und der durch die Axen *a*, *c* und *b*, *c* gelegten Ebenen entstehen, und in welchen uns alles bekannt ist, noch besonders berechnet.

Was die Neigungen der Flächen *f*, *i*, *c*, *g* betrifft, welche die Endkanten der Octaëder abstumpfen, so bildet jede von ihnen mit der anliegenden Octaëderfläche und der hinlänglich verlängerten Basis ein sphärisches Dreieck, in welchem die Neigung der Octaëderfläche gegen die Verlängerung der Basis und die beiden einschliessenden ebenen Winkel bekannt sind; man kann also vermöge der zuletzt angeführten (Gaussischen) Formeln die übrigen Stücke berechnen. Man hat nämlich:

1) Im sphärischen Dreieck, welches von der Fläche *i*, von der Octaëderfläche, die über *M′* liegen würde (die man sich beide durch die End-

kante des Octaëders gehend denken muss), und von der hinlänglich verlängerten Basis gebildet wird:

$A = 126° - 45',4$ $\quad b = 82° - 8',4$ $\quad c = t = 39° - 6',2$; also

$\frac{1}{2}A = 63° - 22',7$ $\quad \frac{1}{2}(b-c) = 21° - 31',1$ $\quad \frac{1}{2}(b+c) = 60° - 37',3$

woraus man findet:

Neigung von i gegen die Octaëderfläche, die über M' liegen würde . . . . . $148° - 22',0$

Neigung von i gegen die Basis des Octaëders $(180° - \frac{P}{i})$. $55 - 27,6$

Ebener Winkel zwischen der Endkante des Octaëders und der Durchschnittslinie von i und der Basis . . . $105 - 32,2$

2) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen i und l (die man sich beide durch die Endkante des Octaëders gehend denken muss) und der von der hinlänglich verlängerten Basis gebildet wird:

$A = 109° - 0',9$ $\quad b = 57° - 5,4$ $\quad c = r = 37° - 8',3$; also

$\frac{1}{2}A = 54° - 30',5$ $\quad \frac{1}{2}(b-c) = 9° - 58',6$ $\quad \frac{1}{2}(b+c) = 47° - 6',9$

woraus:

Neigung von i gegen l . . . . . $143° - 40',1$

Ebener Winkel zwischen der Endkante des Octaëders, die von i abgestumpft wird, und der Durchschnittslinie von i und der verlängerten Basis . . . $74 - 27,4$ *)

3) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen g und k, und der hinlänglich verlängerten Basis gebildet wird:

---

*) Dieser Winkel ist offenbar das Complement des letzten Winkels der vorhergehenden Nummer zu 180°, und kann zur Controlle dienen, so wie die Neigung von i gegen die Basis, die man deshalb auch hier mit berechnet. Mit Logarithmen mit 5 Decimalen mit denen wir bisher gerechnet haben, lässt sich keine grössere Uebereinstimmung als in den ganzen Minuten erwarten.

$A = 116^\circ - 3',1$ $b = 89^\circ - 35',9$ $c = 37^\circ - 8',3$; also

$\frac{1}{2}A = 58^\circ - 1',6$ $\frac{1}{2}(b-c) = 26^\circ - 13',8$ $\frac{1}{2}(b+c) = 63^\circ - 22',1$

woraus

Neigung von k gegen g . . . . . $145^\circ - 49',7$

Ebener Winkel zwischen der Endkante des Octaëders, die von g abgestumpft wird, und der Durchschnittslinie von g und der verlängerten Basis . . . . . 105 — 3,0

Neigung von g gegen die Basis des Octaëders . . . 68 — 28,5

4) Im sphärischen Dreieck, welches von den Flächen g und n, und der hinlänglich verlängerten Basis gebildet wird;

$A = 97^\circ - 3',5$ $b = 64^\circ - 51',3$ $c = 39^\circ - 6',2$; also

$\frac{1}{2}A = 48^\circ - 31'',8$ $\frac{1}{2}(b-c) = 12^\circ - 52',6$ $\frac{1}{2}(b+c) = 51^\circ - 58',8$

woraus

Neigung von n gegen g . . . . . $139^\circ - 35',9$

Ebener Winkel zwischen der Endkante des Octaëders, die von g abgestumpft wird, und der Durchschnittslinie von g und der verlängerten Basis . . . . . 74 — 57,5

5) Auf ähnliche Art findet man für die Flächen f und c:

Neigung von c gegen k . . . . . 135 — 46,7

Neigung von c gegen die Basis . . . . . 45 — 6,9

Ebener Winkel zwischen der Endkante des Grundoctaëders, die von c abgestumpft wird, und der Durchschnittslinie von c und der verlängerten Basis . . . . 82 — 16,0

Neigung von f gegen l . . . . . 132 — 53,9

Neigung von f gegen n . . . . . 126 — 33,1

Neigung von *f* gegen die Basis . . . . . 69° — 2′,0 *)

Ebener Winkel zwischen der Endkante, die von *f* abgestumpft wird, und der Durchschnittslinie von *f* und der verlängerten Basis . . . . . 96 — 54,4 *)

Da wir die Neigungen der Abstumpfungsflächen *f*, *g*, *c*, *i* gegen die zugehörigen Octaëderflächen, und die Neigungen der Octaëderflächen gegen die Ebenen, die man sich durch die Axen *a*, *c* und *b*, c gelegt denken kann, kennen, so giebt uns eine einfache Addition die Neigungen der Abstumpfungsflächen gegen die eben bezeichneten Ebenen. Man findet nämlich:

Neigung von *c* gegen die Ebene, die man sich durch die Axen *a*, *c* gelegt denkt . . . . . 85° — 55′,8

Neigung von *f* gegen dieselbe Ebene . . . . . 84 — 38,1

Neigung von *i* gegen die Ebene, die man sich durch die Axen *b*, *c* gelegt denken kann . . . . . 82 — 29,4

Neigung von *g* gegen dieselbe Ebene . . . . . 81 — 31,3

Man kann jetzt das von den Flächen *f*, *i*, *c*, *g* gebildete (nächst stumpfere) Octaëder, in welchem uns manche Winkel noch unbekannt sind, weiter berechnen.

Wenn man eine Ebene durch eine von den Endkanten dieses stumpfen Octaëders und die Axe legt, so bildet diese mit den Ebenen, die durch die Axen *a*, *c* oder *b*, *c* gehen, und mit den Flächen *f*, *i*, *c* oder *g* ein sphärisches Dreieck, in welchem die Neigungen der Flächen *f*, *i*, *c* oder *g* gegen

*) Schon aus dem Vorhergehenden bekannt.

die Ebenen, die durch die Axen a, c oder b, c gehen, ferner die Neigungen der Durchschnittslinien der eben genannten Flächen mit den Ebenen der Axen a, c oder b, c (oder die Neigungen der Endkanten des Grundoctaëders gegen die Axe) und die Neigungen der Ebenen der Axen a, c oder b, c gegen die Ebenen, die durch die Endkanten des stumpfen Octaëders und die Axen gehen, bekannt sind.

In demjenigen Dreieck, in welchem sich die Fläche f befindet, ist der erste von den bekannten Winkeln gleich $84^\circ - 38',1$, der zweite gleich $37^\circ - 40',6$: die dritte gleich $\frac{1}{2}\frac{M}{M'} = 39^\circ - 5'$; die erste und letzte Neigung sind die die mittlere, als Seite, einschliessenden Winkel. Solcher sphärischen Dreiecke giebt es offenbar acht, nämlich zwei an jeder Endkante des von den Flächen f, i, c, g gebildeten Octaëders. Die Gaussischen Formeln finden auch hier ihre Anwendung; wir wollen uns hier begnügen, die Endresultate der Rechnung herzusetzen:

(1) Neigung von f gegen die Ebene, die man sich durch die Endkante fi und durch die Axe gelegt denkt . $64^\circ - 54',0$

(2) Neigung derselben Endkante gegen die Axe . . . $42 - 13,3$

(3) Ebener Winkel zwischen derselben Endkante und der hintern Endkante des eingeschlossenen Grundoctaëders $25 - 11,1$

(4) Neigung der Fläche f gegen die Ebene, die man sich durch die Endkante fg und die Axe gelegt denkt . . $55 - 18,0$

(5) Neigung der Endkante fg gegen die Axe . . . $47 - 45,1$

(6) Ebener Winkel zwischen derselben Endkante und der hintern Endkante des eingeschlossenen Grundoctaëders $27 - 57,1$

(7) Neigung der Fläche *i* gegen die Ebene, die man sich durch die Endkante *fi* und durch die Axe gelegt denkt . 38° — 50′,0

(8) Ebener Winkel zwischen der Endkante *fi* und der Seitenendkante des eingeschlossenen Grundoctaëders, die von *i* abgestumpft wird . . . . . 31 — 44,9

(9) Neigung der Fläche *i* gegen die Ebene, die man sich durch die Endkante *ic* und die Axe gelegt denkt . . 52 — 6,8

(10) Neigung der Endkante *ic* gegen die Axe . . . 32 — 16,6

(11) Ebener Winkel zwischen der Endkante *ic* und der in (8) bezeichneten Seitenendkante des eingeschlossenen Grundoctaëders . . . . . 24 — 42,8

(12) Neigung der Fläche *c* gegen die in (9) bezeichnete Ebene 59 — 51,0

(13) Ebener Winkel zwischen der Endkante *ic* und der vordern Endkante des eingeschlossenen Grundoctaëders 19 — 43,6

(14) Neigung der Fläche *c* gegen die Ebene, die man sich durch die Endkante *cg* und die Axe gelegt denkt . . 52 — 14,0

(15) Neigung der Endkante *cg* gegen die Axe . . . 35 — 44,7

(16) Ebener Winkel zwischen der Endkante *cg* und der vordern Endkante des eingeschlossenen Grundoctaëders 21 — 40,1

(17) Neigung der Fläche *g* gegen die in (14) bezeichnete Ebene 54 — 32,6

(18) Ebener Winkel zwischen der Endkante *cg* und der Seitenendkante des Grundoctaëders, die von *g* abgestumpft wird . . . . . 27 — 17,3

(19) Neigung von *g* gegen die Ebene, die man sich durch die Endkante *fg* und die Axe gelegt denkt . . . 40 — 0,4

(20) Ebener Winkel zwischen der Endkante fg und der Seitenendkante des eingeschlossenen Octaëders, die von g abgestumpft wird . . . . . $35^{\circ} — 31',0$

Und hieraus:

Neigung von f zu i oder Summe von (1) und (7) . . 103 — 44,0

Neigung von f zu g oder Summe von (4) und (19) . . 95 — 18,4

Neigung von c zu i oder Summe von (9) und (12) . . 111 — 57,8

Neigung von c zu g oder Summe von (14) und (17) . 106 — 46,6

Ebener Winkel an der Spitze der hintern Octaëderfläche f oder Summe von (3) und (6) . . . . . 53 — 8,2

Ebener Winkel an der Spitze der vordern Octaëderfläche c oder Summe von (13) und (16) . . . . 41 — 23,7

Ebener Winkel an der Spitze der Octaëderfläche i oder Summe von (8) und (11) . . . . . 56 — 27,7

Ebener Winkel an der Spitze der Octaëderfläche g oder Summe von (18) und (20) . . . . . 62 — 48,3

Es ist jetzt nicht schwer, zur Berechnung der Neigungen der Flächen m, e, d, h überzugehen. Die Fläche m gehört, wie wir schon im Vorhergehenden gezeigt haben, einem Octaëder von der Form R_s^2 oder $\boxed{2a : 2b : c}$; die Neigungen seiner Endkanten gegen die Axe müssen also nach der Formel

$\cot. \varrho = \frac{\sin.(\alpha+r)}{2 \sin.\alpha \sin.r}$ *) (s. die Formeln fürs schiefe Rhombenoctaëder)

berechnet werden, indem man für α hintereinander die Werthe von μ

*) In den gradlinigen Dreiecken, welche von den Axen a, c oder b, c und den Endkanten des Octaëders gebildet werden, ist α das Complement des Winkels zwischen a und c oder b und c zu 180°.

und dessen Complement, und den Werth von ν und dessen Complement, und für r hintereinander die Werthe der Neigungen der Endkanten des Grundoctaëders gegen die Axe substituirt. Man findet auf diese Weise:

Neigung der Endkante, welche von d abgestumpft wird, gegen die Axe . . . . . $41^\circ - 57',2$

Neigung der Endkante, welche von e abgestumpft wird, gegen die Axe . . . . . $63 - 46,8$

Neigung der Endkante, welche von h abgestumpft wird, gegen die Axe . . . . . $50 - 9,6$

Also:

Neigung der Endkante, die von d abgestumpft wird, gegen die Axe a . . . . . $30 - 49',5$

Neigung der Endkante, die von e abgestumpft wird, gegen die Axe $a_{,}$ . . . . . $43 - 26,5$

Neigung der Endkante, die von h abgestumpft wird, gegen die Axe b . . . . . $48 - 34,6$

Legt man nun Ebenen durch diese Endkanten und die Axe, so bilden diese mit der Basis des Octaëders und mit der Fläche m, ferner mit der Basis und den Flächen d, e, h zweierlei sphärische Dreiecke, in deren jedem ein Winkel und die beiden einschliessenden Seiten bekannt sind.

Die Fläche m nämlich bildet mit der Basis des Octaëders und einer durch die Axen $a_{,}$, c gelegten Ebene ein sphärisches Dreieck, in welchem der Winkel $A = 81^\circ - 39'$ (die Neigung der Basis gegen die durch die Axen $a_{,}$ c gelegte Ebene, oder $180^\circ - \frac{P}{b}$), und die einschliessenden Seiten $b = 43^\circ - 26',5$ (die Neigung der von e abgestumpften Endkante gegen

die Axe $a_{,}$) und $c = 39^{\circ} - 6',2$ (die Neigung (t) der Durchschnittslinie von m und der Basis gegen die Axe $a_{,}$) bekannt sind; man kann also dieses Dreieck nach den Gaussischen Formeln berechnen, und findet alsdann:

Neigung von m gegen eine durch die Axen $a_{,}$, c gelegte Ebene $53^{\circ} - 11',1$

Neigung von m gegen die Basis $(180^{\circ} - \frac{P}{m})$ . . . . $60 - 47,1$

Ebener Winkel hinten an der Basis der Fläche m, als Fläche eines stumpferen Octaëders betrachtet . . . $51 - 12,8$

Dieselbe Fläche m bildet mit der Basis und einer durch die Axen b, c gelegten Ebene ein sphärisches Dreieck, in welchem $A = 72^{\circ} - 58'$ (oder $180^{\circ} - \frac{P}{a}$), $b = 53^{\circ} - 28',4$ (oder $\lambda - t$), $c = 48^{\circ} - 34',6$ (oder Neigung der Endkante, die von h abgestumpft wird, gegen die Axe); woraus:

Neigung von m gegen eine durch die Axen b, c gelegte Ebene $69^{\circ} - 17',1$

Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf der Fläche m, als Fläche eines stumpferen Octaëders betrachtet . . $55 - 13,7$

also ebener Winkel an der Spitze der Octaëderfläche m . . $73 - 33,5$

Um die gefundenen Werthe zu controlliren, kann man auch das rechtwinklichte sphärische Dreieck berechnen, welches aus dem Durchschnitt der Fläche m mit den durch die Axen b, c und a, c gelegten Ebenen entsteht.

In dem sphärischen Dreieck, welches von der Fläche e, der Basis und der Ebene, die man sich durch die Axen $a_{,}$, c gelegt denkt, gebildet wird, ist wieder $A = 81^{\circ} - 39'$, $b = 92^{\circ} - 34',6$ (oder λ) und $c = 43^{\circ} - 26',5$; woraus man findet:

Neigung von e gegen eine durch die Axen $a_{,}$, c gelegte Ebene $97^{\circ} - 50',9$

Neigung von e gegen die Basis . . . . . $42 - 59,3$

Ebener Winkel zwischen den beiden Durchschnittslinien der Fläche *e* mit der Basis und mit der durch die Axen a, c gelegten Ebene . . . . . 86° — 9′,2

Setzt man für *A* und *b* ihre Complemente zu 180°, so bekommt man dieselben Stücke auf der andern Seite der Ebene, die durch die Axen a, c gelegt ist, und diese Werthe können uns dazu dienen, die eben gefundenen Werthe zu controlliren.

In dem sphärischen Dreieck, welches von den Flächen *h*, der Basis und der Ebene, die man sich durch die Axen *b*, *c* gelegt denkt, gebildet wird, ist $A = 72° - 58'$, $b = 92° - 34'.6$, $c = 48° - 34',6$, also:

Neigung von *h* gegen eine durch die Axen *b*, *c* gelegte Ebene 103° — 23′,2

Neigung von *h* gegen die Basis . . . . . 46 — 54,2

Ebener Winkel zwischen den beiden Durchschnittslinien der Fläche *h* mit der Basis und mit der durch die Axen *b*, *c* gelegten Ebene . . . . . 79 — 4,0

Ferner, in dem sphärischen Dreieck, welches von der Fläche *d*, der Basis und der Ebene, die man sich durch die Axen *a*, *c* gelegt denkt, gebildet wird, ist $A = 81° - 39'$, $b = 87° - 25',4$ (oder $180° - \lambda$) und $c = 30° - 49',5$ (oder die Neigung der Endkante, die von *d* abgestumpft wird, gegen die Axe *a*); also:

Neigung von *d* gegen eine durch die Axen *a*, *c* gelegte Ebene 95° — 51′,9

Neigung von *d* gegen die Basis . . . . . 30 — 40,9

Ebener Winkel zwischen den beiden Durchschnittslinien der Fläche *d* mit der Basis und mit der durch die Axen *a*, *c* gelegten Ebene . . . . . 83 — 31,0

Es bleibt uns noch übrig die Neigungen von m gegen e, h, f nnd g zu berechnen, die man am leichtesten findet, indem man die sphärischen Dreiecke, welche von je zwei benachbarten dieser Flächen mit der Fläche P gebildet werden, besonders betrachtet.

In dem sphärischen Dreieck, welches von dem Durchschnitt der Fläche m, e, P entsteht, sind uns eine Seite, nämlich $\frac{Pe}{Pm} = 126^\circ - 31',6$ *), und die beiden einschliessenden Winkel $\frac{P}{e} = 137^\circ - 0',7$ und $\frac{P}{m} = 119^\circ - 12',9$ bekannt; man kann also leicht die übrigen Stücke finden, am besten wieder vermöge der Gaussischen Formeln, um wieder eine Controlle für die ebenen Winkel zu bekommen. Man erhält so:

Neigung von m zu e	$135^\circ - 20',1$
Ebener Winkel zwischen den Kanten Pe und em . .	86 — 9,1
Ebener Winkel zwischen den Kanten Pm und em . .	128 — 47,3

Eben so für das aus dem Durchschnitt der Flächen h, m, P entstehende sphärische Dreieck, in welchem die bekannte Seite $\frac{Pm}{Ph} = 180^\circ - t = 140^\circ - 53',8$, und die beiden bekannten Winkel $\frac{P}{m} = 119^\circ - 12',9$ und $\frac{P}{h} = 133^\circ - 5',8$ sind:

Neigung von m zu h	$145^\circ - 53',8$
Ebener Winkel zwischen den Kanten Pm und hm . .	124 — 46,3
Ebener Winkel zwischen den Kanten Ph und hm . .	79 — 4,0

Man verfährt eben so mit den Flächen f und g, die man sich über die Flächen e und h weg bis zum Durchschnitt mit P verlängert denkt. Man hat alsdann, für die Gaussischen Formeln, erst $a = 126^\circ - 31',6$, $B = 119^\circ - 12',9$

*) gleich $t + 180^\circ - \lambda$.

$C = \frac{P}{f} = 110° - 58'$; dann $a = 140° - 53',8$, $B = 119° - 12',9$, $C = \frac{P}{g} = 111° - 31',5$ und findet:

Neigung von *m* zu *f*	141°	17′,0
Ebener Winkel zwischen Kanten *fm* und *fe* (oder *fP*) .	131	2,8*)
Ebener Winkel zwischen den Kanten *fm* und *mP* . .	93	7,8
Neigung von *m* zu *g*	144	0,8
Ebener Winkel zwischen den Kanten *gm* und *gh* (oder *gP*)	110	28,5
Ebener Winkel zwischen den Kanten *gm* und *mP* . .	86	52,1

Dieselbe Rechnung mit den Flächen *h*, *k*, *d* vorgenommen, giebt:

Neigung von *h* gegen *k*	145	22,8
Ebener Winkel zwischen den Kanten *hk* und *hP* . .	72	42,2
Ebener Winkel zwischen den Kanten *hk* und *kP* . .	129	7,0
Neigung von *d* gegen *k*	132	7,0
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pd* und *kd* . .	68	41,2
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pk* und *kd* . .	148	3,2

Und eben so für die Flächen *e* und *l*, *i* und *d*:

Neigung von *e* gegen *l*	130	33,8
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pe* und *el* . .	73	11,1
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pl* und *el* . .	136	20,5
Neigung von *d* gegen *i*	114	44,3
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pd* und *di* . .	111	19,1
Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pi* und *di* . .	144	45,5

*) Dieser Winkel ist offenbar gleich der Summe des ebenen Winkels zwischen der Endkante *fg* und der hintern Endkante des Grundoctaëders, und der Neigung der letztern Endkante gegen die Kante *fa'*.

Zusammenstellung aller berechneten Winkel am unterschwefelsauren Kalk.

a. Winkel am Grundoctaëder, welches von den Flächen *n*, *k*, *l* (die vierte über *M'* fehlt) gebildet wird.

Neigung der Axe *a* gegen die Axe *b*	92° — 34′,6
Neigung der Axe *a* gegen die Axe *c*	107 — 13.3
Neigung der Axe *b* gegen die Axe *c*	81 — 15,8
Neigung der vordern Endkante gegen die Axe . . .	27 — 34,5
Neigung der hintern Endkante gegen die Axe . . .	37 — 40,6
Neigung der Seitenendkante, die von *g* abgsetumpft wird, gegen die Axe	28 — 45,3
Neigung der Seitenendkante, die von *i* abgestumpft wird, gegen die Axe	25 — 9,2
Neigung der Basiskante, die unter *k* liegt, gegen die Axe *a*	37 — 8,3
Neigung derselben Basiskante gegen die Axe *b* . . .	50 — 17,1
Neigung der Basiskante, die durch *M'* geht, gegen die Axe *a*	39 — 6,2
Neigung derselben Basiskante gegen die Axe *b* . . .	53 — 28,4
Neigung der Basiskanten gegeneinander, vorn . . .	76 — 14,5
Neigung der Octaëderflächen an der vordern Endkante .	95 — 15,5
Neigung der Octaëderflächen (*n*, *l*) an der hintern Endkante	79 — 27,0
Neigung der Octaëderflächen (*k*, *n*) an der Seitenendkante, die von *g* abgestumpft wird	105 — 25,7
Neigung der Octaëderflächen an der Seitenendkante, die von *i* abgestumpft wird	112 — 1,7

Neigung der Octaëderflächen, an der Basiskante, die unter *k* liegt	134°	— 56,0
Neigung der Octaëderflächen, an der Basiskante, die über *M'* liegt	136	— 11,1
Ebener Winkel an der Spitze auf der vordern Octaëderfläche *k*	39	— 0,3
Ebener Winkel vorn an der Basis auf derselben Octaëderfläche	51	— 23,8
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Octaëderfläche	89	— 35,9
Ebener Winkel an der Spitze auf der vordern Octaëderfläche, die über *M'* liegen würde	36	— 38,8
Ebener Winkel vorn an der Basis auf derselben Octaëderfläche	61	— 12,8
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Octaëderfläche	82	— 8,4
Ebener Winkel an der Spitze auf der hintern Octaëderfläche *n*	46	— 3,8
Ebener Winkel hinten an der Basis auf derselben Octaëderfläche	69	— 4,9
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Octaëderfläche	64	— 51,3
Ebener Winkel an der Spitze auf der hintern Octaëderfläche *l*	44	— 14,4
Ebener Winkel hinten an der Basis auf derselben Octaëderfläche	78	— 40,2
Ebener Winkel zur Seite an der Basis auf derselben Octaëderfläche	57	— 5,4
Länge der Axe *c*	1,00000	
Länge der Axe *b*	0,51199	
Länge der Axe *a*	0,65235 *)	

*) Ich brauche hier nicht erst zu erinnern, dass man die Länge der Axen aus den Dreiecken abnehmen kann, welche je zwei von ihnen mit einer Endkante des Grundoctaëders bilden, und an welchem sich die Seiten verhalten, wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel.

b. Uebrige Neigungen benachbarter Flächen.

Säulenwinkel oder Neigung von *M* zu *M′*	78° — 10′,0
Neigung von *M* gegen *P*	94 — 7,7
Neigung von *M′* gegen *P*	107 — 18,4
Neigung von *P* gegen *a*	107 — 2,0
Neigung von *P* gegen *b*	98 — 21,0
Neigung von *P* gegen *m*	119 — 12,9
Neigung von *P* gegen *e*	137 — 0,7
Neigung von *P* gegen *h*	133 — 5,8
Neigung von *P* gegen *d*	149 — 19,1
Neigung von *P* gegen *n*	97 — 3,5
Neigung von *P* gegen *l*	109 — 0,9
Neigung von *P* gegen *k*	114 — 3,1
Neigung von *P* gegen *f*	110 — 58,0
Neigung von *P* gegen *g*	111 — 31,5
Neigung von *P* gegen *c*	134 — 53,1
Neigung von *P* gegen *i*	124 — 32,4
Neigung von *M* gegen *k*	160 — 4,6
Neigung von *M″* gegen *l*	156 — 51,4
Neigung von *M‴* gegen *n*	155 — 38,1
Neigung von *M‴* gegen *m*	133 — 28,7
Neigung von *a* gegen *c*	152 — 8,9
Neigung von *a* gegen *d*	137 — 42,9
Neigung von *a* gegen *k*	132 — 39,0
Neigung von *a′* gegen *f*	142 — 0,0

Neigung von a' gegen e	115 — 57,3
Neigung von a' gegen n	121 — 55,3
Neigung von a' gegen l	118 — 49,7
Neigung von b gegen i	153 — 48,6
Neigung von b gegen l	142 — 28,1
Neigung von b' gegen g	150 — 7,5
Neigung von b' gegen h	128 — 33,2
Neigung von b gegen n	138 — 4,9
Neigung von b' gegen k	130 — 9,1
Neigung von k gegen c	135 — 46,7
Neigung von k gegen d	132 — 7,0
Neigung von k gegen g	145 — 49,7
Neigung von k gegen h	145 — 22,8
Neigung von m gegen n	157 — 50,6
Neigung von m gegen h	145 — 53,8
Neigung von m gegen e	135 — 20,1
Neigung von m gegen g	144 — 0,8
Neigung von m gegen f	131 — 17,0
Neigung von n gegen g	139 — 35,9
Neigung von n gegen f	126 — 33,2
Neigung von l gegen e	130 — 33,8
Neigung von l gegen f	132 — 53,8
Neigung von l gegen i	143 — 40,1
Neigung von i gegen d	114 — 44,3
Neigung von f zu g	95 — 18,4

Neigung von *g* zu *c*	106° — 46′,6
Neigung von *c* zu *i*	111 — 57, 8
Neigung von *i* zu *f*	103 — 44, 0
Neigung von *f* zu *e*	153 — 57, 3
Neigung von *g* zu *h*	158 — 25, 7
Neigung von *c* zu *d*	165 — 34,0

c. Ebene Winkel.

	Ebener Winkel zwischen den Kanten *PM* und *MM′* .	108° — 39′0
	— — — — — *PM′* und *MM′* .	98 — 10,8
	— — — — — *PM* und *PM′* .	76 — 14,5
(*P*)	Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pe* und *Pm* .	126 — 31,6
(*P*)	— — — — — *Ph* und *Pm* .	140 — 53,8
(*P*)	— — — — — *Ph* und *Pk* .	142 — 51,7
(*P*)	— — — — — *Pd* und *Pk* .	129 — 42,9
(*P*)	— — — — — *Pd* und *Pi* .	87 — 25,4
(*e*)	— — — — — *Pe* und *me* .	86 — 9,2
(*e*)	— — — — — *Pe* und *le* .	73 — 11,1
(*f*)	— — — — — *ef* und *mf* .	111 — 2,8
(*f*)	— — — — — *mf* und *nf* .	152 — 2,9
(*f*)	— — — — — *nf* und *af* .	96 — 54,3
(*m*)	— — — — — *Pm* und *me* .	128 — 47,2
(*m*)	— — — — — *me* und *mf* .	144 — 20,6
(*m*)	— — — — — *Pm* und *mh* .	124 — 46,3
(*m*)	— — — — — *mh* und *gm* .	142 — 5,9
(*m*)	— — — — — *gm* und *mn* .	93 — 7,8

(*n*)	Ebener	Winkel	zwischen	den	Kanten	*mn* und *fn* .	110°	55′,1
	—	—	—	—	—	*mn* und *gn* .	115	8,7
(*h*)	—	—	—	—	—	*Ph* und *hm* .	79	4,0
	—	—	—	—	—	*Ph* und *hk* .	72	42,2
(*g*)	—	—	—	—	—	*gh* und *mg* .	110	28,5
	—	—	—	—	—	*mg* und *ng* .	144	29,0
	—	—	—	—	—	*ng* und *b′g* .	105	3,0
(*k*)	—	—	—	—	—	*Pk* und *hk* .	129	7,0
	—	—	—	—	—	*hk* und *gk* .	141	17,1
	—	—	—	—	—	*gk* und *Mk* .	89	35,9
	—	—	—	—	—	*Pk* und *kd* .	148	3,2
	—	—	—	—	—	*kd* und *kc* .	160	33,0
	—	—	—	—	—	*kc* und *kM* .	51	23,8
(*d*)	—	—	—	—	—	*Pd* und *kd* .	68	41,2
	—	—	—	—	—	*Pd* und *di* .	111	19,1
(*c*)	—	—	—	—	—	*dc* und *kc* .	97	44,0
	—	—	—	—	—	*dc* und *cM′* .	60	35,9
(*i*)	—	—	—	—	—	*Pi* und *di* .	144	45,5
	—	—	—	—	—	*di* und *M′i* .	109	41,8
	—	—	—	—	—	*M′i* und *ib* .	106	12,7
	—	—	—	—	—	*bi* und *li* .	105	32,2
(*M′*)	—	—	—	—	—	*aM′* und *cM′*	144	5,3
	—	—	—	—	—	*cM′* und *PM′*	133	55,5
	—	—	—	—	—	*PM′* und *iM′*	124	2,5
	—	—	—	—	—	*iM′* und *M′b*	137	46,7

(*l*)	Ebener Winkel zwischen den Kanten *Pl* und *li* .	122° — 54,6
	— — — — — *Pl* und *le* .	136 — 20,5
	— — — — — *el* und *lf* .	144 — 59,3
	— — — — — *lf* und *lM″* .	78 — 40,2
	— — — — — *lM″* und *Pi* .	57 — 5,4
	Ebener Winkel zwischen den Kanten *Ma* und *ac* . .	81 — 15,8
	— — — — — *M′b* und *bi* . .	107 — 13,3

Wenn man das tritoprismatische System mit dem tetartoprismatischen vergleicht, so sieht man im Gange, den die Rechnung nehmen muss, eine grosse Aehnlichkeit; nur trifft man beim tritoprismatischen System (da die durch die Axen *a*, *c* und *b*, *c* gelegten Ebenen rechtwinklicht sind) zuweilen auf rechte Winkel, welches beim tetartoprismatischen nie geschieht, und welches die Rechnung sehr vereinfacht.

Das tritoprismatische System kommt selten in der Natur vor; ausser dem unterschwefelsauren Kalk scheinen nur noch einige Arten des Feldspaths hieher zu gehören. Die schiefangesetzte Fläche *P* ist bald rechts hin, bald links hin geneigt, und diess giebt neue Unterscheidungsmerkmale. Siehe mehr hierüber in Breithaupts Abhandlung über das Geschlecht des Feldspaths in Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie. Bd. VIII. p. 79.

DRITTES KAPITEL.

Analytische Krystallonomie.

Da alle bisher aufgestellten und aufgelösten Aufgaben die Neigungswinkel von Ebenen und ihrer Durchschnittslinien betreffen, so müssen sich die entwickelten Formeln eben so gut aus der analytischen Geometrie der Ebenen herleiten lassen, als aus der sphärischen Trigonometrie. Es wäre indess weitläuftig und unnütz, diese Formeln hier noch einmal zu finden; wir wollen unsere in der Einleitung erworbenen Kenntnisse in der analytischen Geometrie der Ebenen nur dazu anwenden, manche Puncte, die zur allgemeinen Theorie der Krystallisation gehören, zu betrachten; wir fühlen uns jetzt doppelt geschickt dazu, nachdem wir alle Einzelnheiten durchgegangen sind; und die allgemeinsten Ansichten über den Zusammenhang der Ebenen, welche eine gewisse Form begrenzen, liefert keine andere Behandlung so vollständig, als die analytische.

Erst müssen wir aber sehen, wie die zu gewinnenden Kenntnisse mit unsern schon erlangten in Uebereinstimmung zu bringen sind, indem wir den Uebergang aus der bisher befolgten Methode zu der jetzt anzuwendenden zeigen. Wir müssen wissen, wie wir aus den schon erworbenen

Kenntnissen die Gleichung einer Krystallfläche construiren können; diese Aufgabe kann nicht eher gelöst werden, als bis zwei andere Fragen beantwortet sind, nämlich, welches die Bedeutung der Constanten A, B, C, D der allgemeinen Gleichung der Ebene sey, und wo man die Coordinatenaxen legen müsse — und mit diesen Fragen wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = o$$

$x = y = o$ macht, so bekommt man offenbar einen Werth von z, der dem Stück der Axe der z gleich ist, das zwischen dem Anfangspunct der Coordinaten und dem Durchschnittspunct der Ebene mit der Axe der z enthalten ist.

Auf ähnliche Weise findet man das Stück der Axe der x und der Axe der y, das zwischen dem Anfangspunct der Coordinaten und den Durchschnittspuncten der Ebene mit diesen Axen enthalten ist, wenn man nacheinander $y = z = o$, $x = z = o$ macht. Bezeichnet man diese drei Stücke der Axen z, y und x, welche zwischen dem Anfangspunct der Coordinaten und den Durchschnittspuncten der Ebene mit diesen Axen enthalten sind, mit $\overline{z}$, $\overline{y}$ und $\overline{x}$, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \overline{z} &= -\frac{D}{C} \\ \overline{y} &= -\frac{D}{B} \\ \overline{x} &= -\frac{D}{A} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{\overline{x}} &= \frac{A}{C} \\ \frac{\overline{z}}{\overline{y}} &= \frac{B}{C} \\ \frac{\overline{x}}{\overline{y}} &= \frac{B}{A} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wir wollen diese letzten Grössen mit t, t', t'' bezeichnen, so dass

$$\frac{A}{C} = t$$
$$\frac{B}{C} = t'$$
$$\frac{B}{A} = t''.$$

Man sieht aus den Gleichungen (1), dass A, B, C, D eigentlich unbestimmte Grössen sind. Die Linien $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ sind offenbar hinreichend, die Lage einer Ebene zu bestimmen, denn man kann sich durch drei Puncte immer nur eine Ebene gelegt denken. Der Zusammenhang dieser Grössen mit A, B, C, D ist aber nur durch drei Gleichungen gegeben, die offenbar nicht hinreichen, vier unbekannte Grössen zu bestimmen. A, B, C, D sind also allerdings im Grunde unbestimmte Grössen, und nur ihre Verhältnisse $\frac{D}{C}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{D}{A}$ sind gegeben, und müssen gegeben seyn, wenn die Lage der Ebene bestimmt seyn soll. Dasselbe gilt von den Gleichungen (2), wo drei unbekannte Grössen in zwei Gleichungen enthalten sind; denn die dritte ist nicht als eigne Gleichung zu betrachten, da sie aus den beiden andern fliesst.

Bei den Krystallebenen, wo es nur darauf ankommt, ihre Winkel zu berechnen, braucht man nicht einmal die absoluten Werthe von $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ zu wissen; die Kenntniss der Verhältnisse dieser Grössen untereinander reicht für diesen Zweck hin; und man kann den in der Einleitung entwickelten Formeln für die Neigungen der Ebenen und Linien eine solche

Form geben, dass nur diese Verhältnisse darin vorkommen. Wir müssen also die Grössen t, t', t'' in die Gleichungen der Krystallebenen einführen, und das ist sehr leicht.

Wenn man die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = o$$

durch C dividirt, so bekommt man

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + z + \frac{D}{C} = o.$$

$-\frac{D}{C}$ ist, nach (1), das Stück Axe der z, welches zwischen dem Anfangspunct der Coordinaten und dem Durchschnittspunct der Ebene und dieser Axe enthalten ist. Da es für die Aufgaben der Krystallonomie ganz gleichgültig ist, wie gross wir dieses Stück machen, so wollen wir $-\frac{D}{C} = 1$ setzen. Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung, und substituirt zugleich t für $\frac{A}{C}$, t' für $\frac{B}{C}$, so haben wir:

$$tx + t'y + z - 1 = o \quad \ldots\ldots (3)$$

welches die für unsern Zweck bequemste Form der Gleichung einer Krystallebene ist.

Man kann die allgemeine Gleichung der Ebene auch anders modificiren. Wenn man sie durch A dividirt, so findet man:

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z + \frac{D}{A} = o.$$

In dieser Gleichung ist $-\frac{D}{A}$ das Stück Axe der x, welches zwischen dem Anfangspunct der Coordinaten und dem Durchschnitt dieser Axe mit der Ebene enthalten ist. Setzt man $-\frac{D}{A} = 1$, und substituirt für $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ ihre eingeführten Zeichen t'' und $\frac{1}{t}$, so hat man

$$x + t''y + \frac{1}{t}z - 1 = o \quad \ldots (4).$$

Auf dieselbe Art findet man eine dritte Form der Gleichung einer Krystallebene

$$\frac{1}{t'}x + y + \frac{1}{t}z - 1 = 0 \quad \cdots \quad (5)$$

indem man $-\frac{D}{B} = 1$ setzt.

Diese drei Gleichungen genügen für alle Fälle, die denkbar sind. Für alle Ebenen, welche eine gewisse Neigung gegen die Axe der z haben, ist die Gleichung (3) brauchbar; für Ebenen, die parallel mit dieser Axe sind, und wo $t = t' = 0$ wird, schicken sich die Gleichungen (4) und (5).

Wir wollen jetzt ganz davon abstrahiren, durch welche Suppositionen diese Gleichungen entstanden sind: es ist klar, dass man sie als particuläre Fälle der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ansehen kann. Vergleicht man sie mit dieser allgemeinen Gleichung, so findet man, dass, um die Gleichung (3) zu erhalten,

$$A = t$$
$$B = t'$$
$$C = 1$$

gemacht worden ist. Um die Gleichung (4) zu bekommen, hat man

$$A = 1$$
$$B = t''$$
$$C = \frac{1}{t}$$

gesetzt und so fort. Das sind also die Werthe der Coefficienten von x, y, z, die man in die Formeln der Einleitung zu substituiren hat, wenn man die Winkel, welche die Krystallebenen und ihre Durchschnittslinien mit einander machen, finden will.

Die Werthe von t, t', t'' sind aus den Gleichungen (2) bekannt. Sind die Coordinaten rechtwinklicht, so ist t offenbar die Cotangente der Neigung der Durchschnittslinie der Krystallebene mit der Ebene der xz gegen die Axe der z; t' ist die Cotangente der Neigung der Durchschnittslinie der Krystallebene mit der Ebene der yz gegen die Axe der z; t'' ist die Cotangente der Neigung der Durchschnittslinie der Krystallebene mit der Ebene der xy gegen die Axe der x. Hieraus folgt, dass wenn man beim Rhombenoctaëder den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct des Octaëders legt, und die Coordinatenaxen mit den drei aufeinander senkrechten Axen des Octaëders zusammenfallen lässt, die Gleichung der Octaëderfläche folgende seyn wird:

$$\text{cot. } r \cdot x + \text{cot. } r' \cdot y + z = 1,$$

wo r, r', wie immer, die Neigungswinkel der Endkanten des Octaëders gegen die Axe bedeuten.

Die Gleichung der Säulenfläche oder die grade Abstumpfungsfläche der Kanten an der Basis des Octaëders wird seyn:

$$x + \text{cot. } g \cdot y + o \cdot z = 1$$

oder

$$\text{tg. } g \cdot x + y + o \cdot z = 1$$

indem man mit g die Neigung der Kanten an der Basis gegen die Axe der x bezeichnet. Es ist also nicht schwer, die Gleichung einer Krystallebene zu finden, wenn man erst über die Lage, die man den Coordinaten geben will, mit sich einig geworden ist.

Hat man das Weissische Zeichen einer Krystallebene vor sich, so ist es noch leichter die analytische Gleichung derselben zu finden. Da D eine

willkührliche Grösse ist, so ist es erlaubt $D = -1$ zu setzen; dadurch bekommt die allgemeine Gleichung folgende Gestalt:

$$Ax + By + Cz = 1.$$

Setzt man hier nacheinander $x = y = o$, $x = z = o$, $y = z = o$, so findet man die Werthe der Stücke der Coordinatenaxen, die zwischen dem Anfangspunct der Coordinaten und den Durchschnittspuncten der Coordinaten und der Krystallebene enthalten sind; bezeichnet man diese Stücke nämlich, wie oben, mit $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, so ist

$$\overline{x} = \frac{1}{A}$$
$$\overline{y} = \frac{1}{B}$$
$$\overline{z} = \frac{1}{C}.$$

Nund sind aber die Weissischen Zeichen so eingerichtet, dass

$$\alpha a = \overline{x}$$
$$\beta b = \overline{y}$$
$$\gamma c = \overline{z}$$

wo α, β, γ die Coefficienten der Weissischen Zeichen bedeuten. Es ist also

$$A = \frac{1}{\alpha a}$$
$$B = \frac{1}{\beta b}$$
$$C = \frac{1}{\gamma c}$$

und die analytische Gleichung der Krystallebene, deren Weissisches Zeichen $|\overline{\alpha a : \beta b : \gamma c}|$ ist, gewinnt folgende Gestalt:

$$\frac{1}{\alpha a}x + \frac{1}{\beta b}y + \frac{1}{\gamma c}z - 1 = o$$

wo es ganz gleichgültig ist, ob die Axen rechte Winkel untereinander machen oder nicht.

Die Gleichung einer Linie wird durch zwei Ebenen bestimmt, in deren Durchschnitt sie liegt. Es seyen zum Beispiel

$$Ax + By + Cz - 1 = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z - 1 = o$$

die Gleichungen zweier Ebenen, so ist nach der Einleitung, wenn

$$cx + az - 1 = o$$
$$cy + bz - 1 = o$$

die Gleichungen der Durchschnittslinie dieser Ebenen sind:

$$e = A_{(1)}B - AB_{(1)}$$
$$b = A_{(1)}C - AC_{(1)}$$
$$a = BC_{(1)} - B_{(1)}C.$$

Bezeichnet man die Coefficienten der Weissischen Zeichen der beiden Ebenen mit α, β, γ und α', β', γ'; so ist, da $A = \frac{1}{aa}$, $B = \frac{1}{\beta b}$ etc.;

$$c = \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{\alpha'\beta} - \frac{1}{a\beta'}\right)$$
$$b = \frac{1}{ac}\left(\frac{1}{\alpha'\gamma} - \frac{1}{a\gamma'}\right)$$
$$a = \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{\beta\gamma'} - \frac{1}{\beta'\gamma}\right).$$ *)

Jede allgemeine Gleichung einer Ebene kann acht Formen annehmen, durch successive Veränderung der Zeichen. Diese acht Formen sind folgende:

---

*) Man muss hier die Coefficienten a, b, c, die in den ersten Gliedern der Gleichungen stehen, mit den Axen a, b, c, in den zweiten Gliedern, nicht verwechseln.

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$Ax + By - Cz + D = o$$
$$Ax - By + Cz + D = o$$
$$Ax - By - Cz + D = o$$
$$-Ax + By + Cz + D = o$$
$$-Ax + By - Cz + D = o$$
$$-Ax - By + Cz + D = o$$
$$-Ax - By - Cz + D = o.$$

Dies sind die Gleichungen der acht Flächen eines Octaëders, welche man deshalb als Flächen derselben Art ansieht und in den Abbildungen der Krystalle mit demselben Buchstaben bezeichnet; da hingegen die Flächen eines Rectangulär-octaëders nicht durch dieselben Constanten gegeben werden können. Man kann diesen Umstand als einen Beweggrund ansehen, das Rectangulär-octaëder aus der Zahl der Grundformen zu verbannen, weil es nämlich keine einfache, das heisst aus gleichartigen Flächen zusammengesetzte, Form ist. Beim Rhomboëder und Dihexaëder wird die Frage, welches die Flächen seyen, welche den acht Gleichungen entsprechen, etwas complicirter, und wir wollen uns vorbehalten, später wieder darauf zurückzukommen.

Es ist allerdings am einfachsten, die Coordinatenaxen, auf welche man die Gleichung einer Ebene beziehen will, rechtwinklicht zu nehmen: aber das ist nicht immer möglich. Beim regulären Octaëder, beim Quadratoctaëder und Rhombenoctaëder, deren drei Axen rechte Winkel mit einander machen, ist es am besten, diese dazu zu wählen. Wir haben oben gesehen, dass alle Ebenen desselben Krystalls diese Axen in rationalen Ver-

hältnissen schneiden: dieser Umstand mit der Rechtwinklichkeit der Axen verbunden, macht die Formeln zur Berechnung der Neigungen der Krystallebenen sehr einfach.

Beim schiefen Rhombenoctaëder und Rhomboïdoctaëder werden die Axen, wie bei allen anderen Formen, auch in einfachen Verhältnissen geschnitten; aber die Axen sind nicht rechtwinklicht und die Formeln werden viel complicirter: überdiess muss man, um die Rechnungen führen zu können, nicht nur die Coefficienten der Gleichungen kennen, sondern auch die Winkel der Coordinatenaxen, also drei bis fünf Stücke, statt zweier; es ist also klar, von welcher Wichtigkeit die Untersuchung ist, ob es nicht für ein gewisses System von Flächen auch rechtwinklichte Coordinatenaxen giebt, die eben so von den Flächen in rationalen Verhältnissen geschnitten werden, als die schiefwinklichten Coordinatenaxen, die man fürs Erste eingeführt hat. Diese Untersuchung besteht aber aus zwei Theilen; wir müssen erst erforschen, welche Linien alle als Coordinatenaxen für ein System von Flächen dienen können, mit der Bedingung, dass diese Coordinatenaxen so beschaffen seyn müssen, dass sie von den Krystallebenen in einfachen Verhältnissen geschnitten werden; dann wollen wir sehen, ob sich unter diesen Linien welche befinden, welche rechtwinklicht sind.

Es seyen

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$
$$A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} = o$$

u. s. w.

die Gleichungen mehrerer Krystallebenen auf Coordinatenaxen bezogen, deren Winkel λ, μ, ν sind; und zwar so, dass

$$A = mA_{(1)} = nA_{(2)} = \text{etc.}$$
$$B = m'B_{(1)} = n'B_{(2)} = \text{etc.}$$
$$C = m''C_{(1)} = n''C_{(2)} = \text{etc.}$$

wo m, m', m'', n, n', n'' etc. rationale Zahlen bedeuten, wie 1, $\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 etc.

Es sey ein Punct gegeben, dessen Coordinaten seyen x', y', z'. Durch diesen Punct gehen drei Linien, die uns als drei neue Covrdinatenaxen dienen sollen; deren Gleichungen seyen folgende;

$$\left.\begin{aligned} c(x-x') + a(z-z') &= o \\ c(y-y') + b(z-z') &= o \end{aligned}\right\} \text{Gleichung der neuen Axe der } z.$$

$$\left.\begin{aligned} c'(x-x') + a'(z-z') &= o \\ c'(y-y') + b'(z-z') &= o \end{aligned}\right\} \text{Gleichung der neuen Axe der } x.$$

$$\left.\begin{aligned} c''(x-x') + a''(z-z') &= o \\ c''(y-y') + b''(z-z') &= o \end{aligned}\right\} \text{Gleichung der neuen Axe der } y.$$

Es seyen nun x'', y'', z'' die Coordinaten des Durchschnittspunctes der ersten Krystallebene mit der neuen Axe des z; x''', y''', z''' seyen die Coordinaten des Durchschnittspunctes derselben Ebene mit der neuen Axe der x, und x^{IV}, y^{IV}, z^{IV} die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Ebene mit der neuen Axe der y; so müssen diese Coordinaten den Gleichungen der Linien, in welchen diese Durchschnittspuncte liegen, und zugleich der Gleichung der ersten Ebene, Genüge leisten. Wir haben also für den ersten Durchschnittspunct

$$c(x''-x') + a(z''-z') = o$$
$$c(y''-y') + b(z''-z') = o$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = o.$$

Aus der Combination dieser Gleichungen kann man x'', y'' und z'' finden. Es ist nämlich:

$$x'' = \frac{(Cc-Bb)x' + Bay' + Caz' + Da}{Cc - Aa - Bb}$$
$$y'' = \frac{(Cc-Aa)y' + Abx' + Chz' + Db}{Cc - Aa - Bb}$$
$$z'' = -\frac{(Bb+Aa)z' + Bcy' + Acx' + Dc}{Cc - Aa - Bb}$$

Wenn man in diesen Ausdrücken a', b', c' für a, b, c substituirt, so hat man die Werthe von x''', y''', z'''; setzt man a'', b'', c'' für a, b, c, so hat man die Werthe von x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}.

Die Länge der neuen Axe der z, von der neuen Coordinaten Anfangspuncte, dessen Coordinaten x', y', z' sind, an, bis zu dem Durchschnittspuncte der untern Ebene mit dieser Axe, dessen Coordinaten x'', y'', z'' sind, ist nach der Formel der Einleitung, wenn wir sie mit p bezeichnen:

$$p = V\Big((x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2+2(x''-x')(y''-y')\cos.\lambda+2(x''-x')(z''-z')\cos.\mu+2(y''-y')(z''-z')\cos.\nu\Big).$$

Eben so die Länge der neuen Axe der x, von dem Anfangspuncte der neuen Coordinaten an, bis zum Durchschnittspuncte der ersten Ebene mit dieser Axe:

$$q = V\left((x'''-x')^2 + (y'''-y')^2 + (z'''-z')^2 + 2(x'''-x')(y'''-y')\cos.\lambda + 2(x'''-x')(z'''-z')\cos.\mu + 2(y'''-y')(z'''-z')\cos.\nu\right)$$

und eben so dasselbe Stück auf der neuen Axe der y:

$$r = V\Big((x^{IV}-x')^2+(y^{IV}-y')^2+(z^{IV}-z')^2+2(x^{IV}-x')(y^{IV}-y')\cos.\lambda+2(x^{IV}-x')(z^{IV}-z')\cos.\mu+2(y^{IV}-y')(z^{IV}-z')\cos.\nu\Big).$$

Substituirt man in diesen Gleichungen die oben gefundenen Werthe von x'', y'', z''; x''', y''', z'''; x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}, so bekommt man, wenn man $Ax' + By' + Cz' + D$ mit K bezeichnet, und

$$Cc - Bb - Aa = N$$
$$Cc' - Bb' - Aa' = N'$$
$$Cc'' - Bb'' - Aa'' = N''$$

setzt, folgende Werthe von p, q, r:

$$p = \frac{K}{N} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos.\lambda - 2ac \cos.\mu - 2bc \cos.\nu)}$$
$$q = \frac{K}{N'} \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2a'b' \cos.\lambda - 2a'c' \cos.\mu - 2b'c' \cos,\nu)}$$
$$r = \frac{K}{N''} \sqrt{(a''^2 + b''^2 + c''^2 + 2a''b'' \cos.\lambda - 2a''c'' \cos.\mu - 2b''c'' \cos.\nu.}$$

Wenn man in den Werthen von K, N, N', N'' $A_{(1)}$ für A, $B_{(1)}$ für B, $C_{(1)}$ für C und $D_{(1)}$ für D setzt, so haben wir die Stücke der neuen Coordinatenaxen, von ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct an bis zu dem Puncte, wo sie von der zweiten Ebene geschnitten werden, deren Gleichung

$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$

ist. Bezeichnet man diese Stücke mit $p_{(1)}$, $q_{(1)}$, $r_{(1)}$, und das, was aus K, N,N, N wird, wenn man in deren Ausdrücken $A_{(1)}$ für A, $B_{(1)}$ für B, $C_{(1)}$ für C und $D_{(1)}$ für D setzt, mit $K_{(1)}$, $N_{(1)}$, $N'_{(1)}$, $N''_{(1)}$, so hat man:

$$p_{(1)} = \frac{K_{(1)}}{N_{(1)}} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos.\lambda - ac \cos.\mu - 2bc \cos.\nu)}$$
$$q_{(1)} = \frac{K_{(1)}}{N'_{(1)}} \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2a'b' \cos.\lambda - 2a'c' \cos.\mu - 2b'c' \cos.\nu)}$$
$$r_{(1)} = \frac{K_{(1)}}{N''_{(1)}} \sqrt{(a''^2 + b''^2 + c''^2 + 2a''b'' \cos.\lambda - 2a''b'' \cos.\mu - 2b''c'' \cos.\nu).}$$

Nun soll die Lage der neuen Coordinatenaxen so beschaffen seyn, dass sie von den Krystallebenen in rationalen Verhältnissen geschnitten werden, dass also $\frac{q_{(1)}}{p_{(1)}} : \frac{q}{p}$, $\frac{r_{(1)}}{p_{(1)}} : \frac{r}{p}$, $\frac{r_{(1)}}{q_{(1)}} : \frac{r}{q}$ rationale Grössen seyen. Es ist aber nach dem Obigen

$$\frac{q_{(1)} \cdot p}{p_{(1)} \cdot q} = \frac{N' \cdot N_{(1)}}{N'_{(1)} \cdot N}$$
$$\frac{r_{(1)} \cdot p}{p_{(1)} \cdot r} = \frac{N'' \cdot N_{(1)}}{N''_{(1)} \cdot N}$$
$$\frac{r_{(1)} \cdot q}{q_{(1)} \cdot r} = \frac{N'' \cdot N'_{(1)}}{N'_{(1)} \cdot N''}$$

Wenn man also diese rationalen Grössen mit v, v', v'' bezeichnet, und für N, N', N'', $N_{(1)}$, $N'_{(1)}$, $N''_{(1)}$ ihre Werthe substituirt, so haben wir folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(Cc' - Bb' - Aa')\ (C_{(1)}c - B_{(1)}b - A_{(1)}a)}{(C_{(1)}c' - B_{(1)}b' - A_{(1)}a')\ (Cc - Bb - Aa)} = v \\ \frac{(Cc'' - Bb'' - Aa'')\ (C_{(1)}c - B_{(1)}b - A_{(1)}a)}{(C_{(1)}c'' - B_{(1)}b'' - A_{(1)}a'')\ (Cc - Bb - Aa)} = v' \\ \frac{(Cc'' - Bb'' - Aa'')\ (C_{(1)}c' - B_{(1)}b' - A_{(1)}a')}{(C_{(1)}c'' - B_{(1)}b'' - A_{(1)}a'')\ (Cc' - Bb' - Aa')} = v'' \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(l)}$$

Das sind die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt seyn müssen, damit Linien, deren Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} c(x'-x) + a(z'-z) = o \\ c(y'-y) + b(z'-z) = o \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l} c'(x'-x) + a'(z'-z) = o \\ c'(y'-y) + b'(z'-z) = o \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l} c''(x'-x) + a''(z'-z) = o \\ c''(y'-y) + b''(z'-z) = o \end{array}\right\}$$

sind und welche durch denselben Punct gehen, von Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$

sind, so geschnitten werden, dass die Verhältnisse der Stücke, welche zwischen dem Durchschnittspuncte der Linien und den Durchschnittspuncten der ersten Ebene mit diesen Linien enthalten sind, sich rational verhalten zu den gleichnamigen Verhältnissen der Stücke, welche zwischen dem Durchschnittspunct der Linien und den Durchschnittspuncten der zweiten Ebene mit diesen Linien enthalten sind.

Diese Bedingungsgleichungen werden von allen Linien erfüllt, die aus dem Durchschnitt anderer Ebenen desselben Krystalls entstehen. Es seyen

$$A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} = o$$
$$A_{(3)}x + B_{(3)}y + C_{(3)}z + D_{(3)} = o$$
$$A_{(4)}x + B_{(4)}y + C_{(4)}z + D_{(4)} = o$$

drei andere Ebenen desselben Krystalls, deren Durchschnittslinien durch die obigen Gleichungen der neuen Coordinatenaxen gegeben seyen, so ist, nach der 1sten Aufgabe der 14ten Nummer der Einleitung

$$c = A_{(3)}B_{(2)} - A_{(2)}B_{(3)}$$
$$b = A_{(3)}C_{(2)} - A_{(2)}C_{(3)}$$
$$a = B_{(2)}C_{(3)} - B_{(3)}C_{(2)}$$
$$c' = A_{(4)}B_{(2)} - A_{(2)}B_{(4)}$$
$$b' = A_{(4)}C_{(2)} - A_{(2)}C_{(4)}$$
$$a' = B_{(2)}C_{(4)} - B_{(4)}C_{(2)}$$
$$c'' = A_{(3)}B_{(4)} - A_{(4)}B_{(3)}$$
$$b'' = A_{(3)}C_{(4)} - A_{(4)}C_{(3)}$$
$$a'' = B_{(4)}C_{(3)} - B_{(3)}C_{(4)}.$$

Also:

$$Cc = A_{(3)}B_{(2)}C - A_{(2)}B_{(3)}C$$
$$Bb = A_{(3)}C_{(2)}B - A_{(2)}C_{(3)}B$$
$$Aa = B_{(2)}C_{(3)}A - B_{(3)}C_{(2)}A$$
$$Cc' = A_{(4)}B_{(2)}C - A_{(2)}B_{(4)}C$$
$$Bb' = A_{(4)}C_{(2)}B - A_{(2)}C_{(4)}B$$
$$Aa' = B_{(2)}C_{(4)}A - B_{(4)}C_{(2)}A$$

und so fort. Da nun bei allen Krystallebenen die Coefficienten A, B, C, $A_{(1)}$, $B_{(1)}$, $C_{(1)}$, $A_{(2)}$, $B_{(2)}$, $C_{(2)}$ etc. sich rational zu einander verhalten, oder die Verhältnisse $\frac{A}{A_{(1)}}$, $\frac{A}{A_{(2)}}$, $\frac{A}{A_{(3)}}$ etc.; $\frac{B}{B_{(1)}}$, $\frac{B}{B_{(2)}}$ etc.; $\frac{C}{C_{(1)}}$, $\frac{C}{C_{(2)}}$ etc. rationale Grössen sind, so kann man den Werthen von Cc, Bb, Aa, Cc', Bb', Aa' etc. auch folgende Formen geben:

$$Cc = f \cdot ABC$$
$$Bb = g \cdot ABC$$
$$Aa = h \cdot ABC$$
$$Cc' = i \cdot ABC$$
$$Bb' = k \cdot ABC$$

etc.

wo f, g, h, i, k etc. wieder rationale Grössen sind.

Setzt man diese Werthe in die obigen Bedingungsgleichungen, so bekommt man wieder rationale Grössen; die Bedingungsgleichungen werden also von diesen Linien erfüllt.

Diess giebt uns folgenden allgemeinen Lehrsatz: Alle Durchschnittslinien der Flächen, die an einem Krystall vorkommen können und vorkommen, können als Coordinatenaxen für dieselben dienen, und werden von diesen

Flächen in rationalen Verhältnissen geschnitten. Es versteht sich von selbt, dass man den Flächen eine solche Lage geben muss, dass sich die drei Linien in einem Puncte durchschneiden; diess ist immer möglich, denn man kann, wie ich schon oft erinnert habe, für jede Krystallebene eine ihr parallele substituiren, ohne dass darum die Formeln eine Aenderung erlitten.

Befinden sich unter diesen Durchschnittslinien der Krystallebenen drei Linien, die rechte Winkel miteinander machen, so sind rechtwinklichte Coordinatenaxen möglich; zum Beispiel, wenn die Basis einer Säule rhombisch ist, und es Endflächen giebt, die auf den Säulenflächen grade aufgesetzt sind.

Wir wollen jetzt noch untersuchen, wie sich die Neigungswinkel der Ebenen, die zu demselben Flächensystem gehören, gegen die Ceordinatenebenen zu einander verhalten. Es seyen wieder λ, μ, ν die Neigungswinkel der Coordinatenaxen gegeneinander. Man muss, wie wir in der Einleitung Nr. 15 gefunden haben, um die Gleichungen der Coordinatenebenen zu bekommen, in der allgemeinen Gleichung der Ebene $D = o$ machen, und auch die übrigen Coefficienten abwechselnd verschwinden lassen. Nämlich:

für die Ebene der xz: $A = o$, $C = o$

füe die Ebene der yz: $B = o$, $C = o$

für die Ebene der xy: $A = o$, $B = o$.

Es seyen jetzt, wie früher,

$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o$$
$$A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} = o$$
$$A_{(3)}x + B_{(3)}y + C_{(3)}z + D_{(3)} = o \text{ etc.}$$

die Gleichungen der Krystallebenen, auf diese Coordinatenaxen bezogen und demselben Krystall angehörig, so dass:

$$A_{(1)} = mA_{(2)} = nA_{(3)} = \text{etc.}$$
$$B_{(1)} = m'B_{(2)} = n'B_{(3)} = \text{etc.}$$
$$C_{(1)} = m''C_{(2)} = n''C_{(3)} = \text{etc.}$$

wo m, n, m', n', m'', n'' etc. einfache rationale Zahlen sind.

Der Winkel, den die erste Ebene mit der Ebene der xz macht, lässt sich nach den Formeln der Einleitung finden; wir haben dort den Winkel zweier Ebenen, deren Gleichungen gegeben sind, berechnen gelernt (siehe Nr. 14, 9te Aufgabe). Setzt man in der dort entwickelten Gleichung $A = o$, $C = o$ (Werthe dieser Coefficienten in der Gleichung der Ebene xz), so findet man, wenn man die Neigung der ersten Ebene gegen die Ebene der xz mit $W_{(1)}$ bezeichnet:

$$\cos.W_{(1)} = \frac{B_{(1)} \sin.^2\mu + A_{(1)} (\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda) + C_{(1)} (\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}{\sin.\mu \sqrt{(A_{(1)}{}^2 \sin.^2\nu + B_{(1)}{}^2 \sin.^2\mu + C_{(1)}{}^2 \sin.^2\lambda + 2A_{(1)}B_{(1)} (\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda) + 2A_{(1)}C_{(1)} (\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu) + 2B_{(1)}C_{(1)} (\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)}}$$

Wir haben schon längst gesehen, dass es die Tangenten der Neigungswinkel der Ebenen gegen die Coordinatenaxen sind, die in gewissen Fällen in einfachen Verhältnissen zu einander stehen, wir wollen also die Tangente des Winkels $W_{(1)}$ suchen. Man findet, nach den gehörigen Reductionen

$$\text{tg.}^2 W_{(1)} = \frac{(1 - \cos.^2 W_{(1)})}{\cos.^2 W_{(1)}}$$
$$= \frac{\sin.^2\mu [A_{(1)}{}^2 \sin.^2\nu + C_{(1)}{}^2 \sin.^2\lambda + 2A_{(1)}C_{(1)} (\cos.\lambda \cos.\nu - \cos.\mu)] - [A_{(1)} (\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda) + C_{(1)} (\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)]^2}{[B_{(1)} \sin.^2\mu + A_{(1)} (\cos.\mu \cos.\nu - \cos.\lambda) + C_{(1)} (\cos.\lambda \cos.\mu - \cos.\nu)]^2}$$

Man findet die Werthe von tg. $W_{(2)}$, tg. $W_{(3)}$, tg. $W_{(4)}$ etc., indem man in dem Ausdruck von tg. $W_{(1)}$ den Exponenten (1) in (2), (3),

(4) etc. verwandelt. $W_{(2)}$, $W_{(3)}$, $W_{(4)}$ etc. sind nämlich die Neigungen der übrigen Krystallebenen gegen die Ebene der xz.

Es mögen sich jetzt alle Ebenen in einer Linie schneiden, das heisst in der Linie, welche die Durchschnittslinie der ersten Ebene mit der Ebene der xz ist. Wenn man die Coefficienten der allgemeinen Gleichungen dieser Linie mit a, b, c bezeichnet, so ist nach der 1sten Aufgabe der 14ten Nummer der Einleitung, wenn man dabei berücksichtiget, dass $A = C = o$,

$$c = A_{(1)}B$$
$$b = o$$
$$a = BC_{(1)}.$$

Da nun alle Ebenen sich in einer Linie schneiden sollen, so ist nach der dritten Aufgabe der 14ten Nummer

$$c = A_{(1)}B = A_{(2)}B = A_{(3)}B = \text{etc.}$$
$$b = o$$
$$a = BC_{(1)} = BC_{(2)} = BC_{(3)} = \text{etc.}$$

und hieraus folgt:

$$A_{(1)} = A_{(2)} = A_{(3)} = A_{(4)} = \text{etc.}$$
$$C_{(1)} = C_{(2)} = C_{(3)} = C_{(4)} = \text{etc.}$$

Wenn man in den nach der oben gegebenen Formel entwickelten Werthen von $W_{(1)}$, $W_{(2)}$, $W_{(3)}$ etc.: $A_{(1)} = A_{(2)} = A_{(3)} = \text{etc.}$ und $C_{(1)} = C_{(2)} = C_{(3)} = \text{etc.}$ macht, und die gefundenen Ausdrücke je zwei und zwei durch einander dividirt, so erhält man:

$$\frac{\text{tg.}\,W_{(1)}}{\text{tg.}\,W_{(2)}} = \frac{B_{(2)}\sin.^2\mu + A_{(1)}(\cos.\mu\cos.\nu - \cos.\lambda) + C_{(1)}(\cos.\lambda\cos.\mu - \cos.\nu)}{B_{(1)}\sin.^2\mu + A_{(1)}(\cos.\mu\cos.\nu - \cos.\lambda) + C_{(1)}(\cos.\lambda\cos.\mu - \cos.\nu)}.$$

Man findet $\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(3)}}$, $\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(4)}}$ etc., indem man in diesem Ausdruck für $B_{(2)}$ nacheinander $B_{(3)}$, $B_{(4)}$ etc. setzt. Es ist klar, dass man auch $\frac{B_{(1)}}{m'}$, $\frac{B_{(1)}}{n'}$ etc. für $B_{(2)}$, $B_{(3)}$ etc. setzen kann.

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen die Ausdrücke $\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(2)}}$, $\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(3)}}$ etc. einfach und rational werden, oder welche Eigenschaften die Axen haben müssen, damit sich die Tangenten des Neigungswinkel der Ebenen, die durch dieselbe in der Ebene der xz liegenden Linie gehen, gegen diese Ebene, einfach zu einander verhalten.

Macht man $\lambda = \nu = 90°$, so verschwinden die Coefficienten von $A_{(1)}$ und $C_{(1)}$, und man bekommt:

$$\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(2)}} = \frac{B_{(2)}}{B_{(1)}} = \frac{1}{m'}.$$

Es ist aber $\frac{1}{m'}$ eine einfache rationale Grösse. Die Krystallisationssysteme also, deren Flächen sich auf rechtwinklichte Axen beziehen lassen, sind alle tautometrisch.

Setzt man $\mu = \nu = 90°$, so bekommt der Werth von $\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(2)}}$ folgende Gestalt:

$$\frac{\text{tg.}W_{(1)}}{\text{tg.}W_{(2)}} = \frac{B_{(2)} - A_{(1)}\cos.\lambda}{B_{(1)} - A_{(1)}\cos.\lambda}.$$

Dieser Ausdruck kann auf zweierlei Art einfach und rational werden: erstens, wenn $A_{(1)} = B_{(1)}$ und cos. λ eine einfache Grösse ist, z. B. beim Rhomboëder oder Dihexaëder, wo die beiden horizontalen Axen einander gleich sind, und wo $\lambda = 120°$ oder $\lambda = 60°$, also cos. $\lambda = \pm \frac{1}{2}$; zweitens, wenn $A_{(1)} = B_{(1)}$ cos. λ, und cos.$^2\lambda$ eine einfache Grösse ist, z. B. beim Dihexaëder, wenn man eine Linie aus den Mittelpunct nach der Mitte der Basiskante gezogen, als eine von den horizontalen Axen ansehen will; drittens endlich, wenn $B_{(1)}$ irgend ein einfaches Multipel von $A_{(1)}$ cos. λ ist,

d. h. wenn eine Linie, senkrecht auf die eine horizontale Axe durch den Endpunct derselben gezogen, die zweite verlängerte Axe so schneidet, dass dieser Abschnitt ein einfaches Multipel der zweiten Axe ist.

Man sieht leicht ein, dass in allen diesen Fällen in der die horizontalen Axen verbindenden Ebene immer zwei miteinander rechtwinklichte Linien möglich sind, die man für die Axen substituiren kann; so dass im Grunde auch die letzten Regeln mit der ersten identisch sind, nämlich dass $\lambda = \mu = \nu\ 90^\circ$ seyn solle.

Die obige Gleichung zeigt uns auch, dass es in einem tautometrischen System Axen geben kann, bei welchen die Flächenneigungen gegen eine der Coordinatenebenen nicht diese Eigenschaft haben, die wir mit Tautometrie bezeichnen. Wenn man z. B. die drei Endkanten eines Rhomboëders als Axen nehmen wollte, so wären sie alle drei untereinander gleich, so wie ihre Neigungswinkel; führt man diese Supposition in die obige Gleichung ein, so findet man, dass nur in dem Falle Tautometrie eintritt, wo cos. λ = cos. μ = cos. ν eine einfache Grösse ist. Ein solches Rhomboëder, wo dieses der Fall sey, kömmt nicht vor.

Analytische Theorie der Zonen.

Man sagt von Flächen, deren Durchschnittslinien einander parallel sind, dass sie in dieselbe Zone fallen.

Die Beachtung der Zonen ist oft bei der Bestimmung der Lage unbekannter Flächen von grosser Wichtigkeit; es ist klar, dass, wenn eine Fläche in zwei Zonen zugleich fältt, ihre Lage vollkommen bestimmt ist. Es sey

$$Ax + By + Cz + D = o \cdots (f)$$

die allgemeine Gleichung einer Krystallebene, deren Lage unbekannt ist. Es mögen sich noch vier andere Ebenen am Krystall befinden, deren Lage bekannt ist, und deren Gleichungen folgende sind:

$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z + D_{(1)} = o \cdots (1)$$
$$A_{(2)}x + B_{(2)}y + C_{(2)}z + D_{(2)} = o \cdots (2)$$
$$A_{(3)}x + B_{(3)}y + C_{(3)}z + D_{(3)} = o \cdots (3)$$
$$A_{(4)}x + B_{(4)}y + C_{(4)}z + D_{(4)} = o \cdots (4)$$

Die Lage der unbekannten Ebene, deren Gleichung in (f) gegeben ist, sey nun so, dass sie sowol mit den Ebenen (1) und (2), als auch mit den Ebenen (3) und (4) parallele Durchschnittslinien bildet — oder dass sie sowol in die Zone der Ebenen (1) und (2), als auch in die Zone der Ebenen (3) und (4) fällt *) Es ist klar, dass diess dasselbe ist, als wenn man sagt, die Ebene geht durch die Durchschnittslinien der Ebenen (1) und (2) und der Ebenen (3) und (4); die Lage einer Ebene aber, die durch zwei Linien geht, ist dadurch vollkommen bestimmt. Es fragt sich nur noch,

---

* Es ist klar, dass diese vier Ebenen nicht in dieselbe Zone fallen dürfen.

wie man aus diesen Bedingungen die Coefficienten der Gleichung der Ebene (f) findet.

Es seyen

$$cx + az + \alpha = o$$
$$cy + bz + \beta = o$$

die Gleichungen der Linie, die aus dem Durchschnitt der Ebenen (f) und (1) entsteht, so ist, wie in der Einleitung bewiesen worden ist:

$$c = A_{(1)}B - AB_{(1)}$$
$$b = A_{(1)}C - AC_{(1)}$$
$$a = BC_{(1)} - B_{(1)}C.$$

Soll nun diese Linie mit einer andern Linie, die aus dem Durchschnitt der Ebene (f) mit der Ebene (2) entsteht, parallel seyn, so muss (siehe die Einleitung)

$$a'c - ac' = o,\ b'c = bc' = o \quad \cdots \quad (5)$$

seyn; hier bedeuten a', b', c', was aus a, b, c wird, wenn man die Coefficienten der Gleichung (2) für die Coefficienten der Gleichung (1) setzt, oder $C_{(2)}$ für $C_{(1)}$, $B_{(2)}$ für $B_{(1)}$ und $A_{(2)}$ für $A_{(1)}$ substituirt.

Dehnt man nun dieselben Schlüsse auch auf die Durchschnittslinien der Ebenen (f) mit den Ebenen (3) und (4) aus, so müssen, wenn diese untereinander parallel seyn sollen, die obigen Bedingungsgleichungen des Parallelismus zweier Linien auch gelten, nachdem man in denselben $A_{(3)}$, $B_{(3)}$, $C_{(3)}$ für $A_{(1)}$, $B_{(1)}$, $C_{(1)}$ und $A_{(4)}$, $B_{(4)}$, $C_{(4)}$ für $A_{(2)}$, $B_{(2)}$, $C_{(2)}$ substituirt hat.

Führt man diese Rechnungen aus, so gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen, welche hinreichen, die unbekannten Grössen zu bestimmen:

Setzt man diese Werthe in die obigen beiden Gleichungen (*g*), aus welchen man die Coefficienten der unbekannten Ebene bestimmen soll, so hat man

$$p(r'q'' - r''q') + p'(qr'' - q''r) + p''(q'r - r'q) = o$$
$$p(r'''q^{IV} - r^{IV}q''') + p'''(qr^{IV} - q^{IV}r) + p^{IV}(q'''r - qr''') = o.$$

In diesen beiden Gleichungen kann man eine von den Grössen der Einheit gleich setzen und dann die beiden übrigen finden. Es versteht sich von selbst, dass man, wenn man die Werthe dieser Grössen in Zahlen ausdrücken will, sehr Acht darauf geben muss, ob sie positiv oder negativ sind, das heisst, ob die Fläche vorn oder hinten, oben oder unten liegt. Ein Beispiel wird dieses alles deutlicher machen, und zugleich zeigen, dass diese Rechnung nicht so weitläuftig ist, als sie anfangs scheinen könnte.

Beim Kupfervitriol (Fig. 179), dessen Winkel wir im Vorhergehenden berechnet haben (siehe die Berechnung der Winkel des schiefen Rhomboïdoctaëders), liegen folgende Flächen in derselben Zone:

$$r', u, k, x, s$$
$$P, u, M'$$
$$P, x, T'.$$

Die Fläche *u* liegt also in der Zone der Flächen *k* und *r'*, und zugleich in der Zone der Flächen *P* und *M'*.

Die Weissischen Zeichen der beiden ersten Flächen sind:

$$\boxed{a_{,} : b_{,} : c_{,}} \text{ und } \boxed{\infty a : b_{,} : \infty c}$$

und die der beiden andern:

$$\boxed{a : b_{,} : c} \text{ und } \boxed{a_{,} : 3b_{,} : \infty c}$$

also:

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} p' = -1 & p'' = 0 & p''' = 1 & p^{IV} = -1 \\ q' = -1 & q'' = -1 & q''' = -1 & q^{IV} = -\frac{1}{3} \\ r' = 1 & r'' = 0 & r''' = 1 & r^{IV} = 0. \end{array}$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, so bekommen sie folgende einfache Gestalt:

$$-p - r = o$$
$$-\tfrac{1}{3}p + q + \tfrac{4}{3}r = o.$$

Setzt man hierin $r = 1$, so findet man

$$p = -1$$
$$q = -\tfrac{5}{3}$$
$$r = 1.$$

Das Weissische Zeichen Zeichen der Fläche l ist also

$$\overline{|a, : \tfrac{3}{5}b, : c|}.$$

Auf eben dieselbe Weise findet man das Zeichen der Fläche x. Diese Fläche liegt nämlich in der Zone von k und s, und in der Zone von P und T'. Hier ist also

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} p' = -1 & p'' = -1 & p''' = 1 & p^{IV} = -1 \\ q' = -1 & q'' = 1 & q''' = -1 & q^{IV} = \frac{1}{3} \\ r' = 1 & r'' = 1 & r''' = 1 & r^{IV} = 0. \end{array}$$

Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, so findet man:

$$p + r = o$$
$$\tfrac{1}{3}p + \tfrac{2}{3}r + q = o$$

woraus, wenn man $r = 1$ setzt,

$$p = -1$$

$$q = -\tfrac{1}{3}$$

$$r = 1;$$

das Weissische Zeiche der Fläche x ist also

$$\boxed{a_{,} : 3b_{,} : c}.$$

Von den Axen.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass jedwede drei Durchschnittslinien in einem System von Krystallflächen als Axen dienen können. Dieser Linien giebt es aber viele, und es frägt sich, welche von ihnen man vorzugsweise als Axen ansehen soll.

Die meisten Krystalle sind so gebildet, dass immer mehrere Flächen sich unter parallelen Linien schneiden. Auf diese Weise erscheinen an denselben mehrere Zonen von Flächen, deren Axen man vorzugsweise als Axen des ganzen Systems von Flächen, welche den Krystall ausmachen, ansehen kann. Aber auch dieser Axen giebt es gewöhnlich mehr als drei, und wir müssen wieder unter ihnen wählen. Man unterscheidet deshalb gewisse Hauptzonen als diejenigen, in welchen die allermeisten Flächen liegen; unter den Axen dieser Hauptzonen giebt es in den meisten Fällen drei, die rechte oder überhaupt solche Winkel untereinander machen, welche Tautometrie herbeiführen; und diese nimmt man alsdann als die wahren Axen an. Wo sich alle diese Axen unter schiefen Winkeln schneiden, ist die Wahl willkührlicher; aber auch in diesen Fall lassen sich gewisse Regeln vorschreiben, mit denen wir uns jetzt ausführlicher beschäftigen wollen. Die Hauptzonen sind nach Weiss:

1) Die horizontale Zone oder die Zone der Säulenflächen, deren Axe vertical ist.
2) Die verticalen Zonen; es giebt ihrer mehrere; ihre Axen sind horizontal.
3) Die Diagonalzonen; deren Axen den Diagonalen der Flächen der Grundform parallel sind.

4) Die Kantenzonen, deren Axen den Endkanten der Grundform parallel laufen.

Beim regulären Octaëder z. B. haben wir in der verticalen Zone erst die gerade Abstumpfungsfläche der Endspitze oder die Würfelfläche, dann die grade Abstumpfungsfläche der Endkante oder die Granatoëderfläche, hierauf wieder eine Würfelfläche und so fort. Eine andere verticale Zone geht über die Octaëderflächen hin, und zählt als erstes Glied die Leucitoëderfläche, dann die Octaëderfläche, hierauf die Fläche des Pyramidenoctaëders als Zuschärfung, und endlich wieder eine Granatoëderfläche als grade Abstumpfung der Kante an der Basis.

In der horizontalen Zone des regulären Octaëders liegen die Würfelfläche, die Granatoëderfläche, als grade Abstumpfung der Würfelkante, und die verschiedenen Flächen, die zwischen diesen beiden liegen, z. B. die Pyritoëderfläche.

In der Kantenzone des regulären Octaëders liegen die verschiedenen Pyramidenoctaëderflächen.

In der Diagonalzone endlich liegen alle diejenigen Flächen, deren gemeinschaftliche Durchschnittslinie mit einer Diagonale der Octaëderfläche parallel laufen, z. B. die verschiedenen Achtundvierzigflächner.

Man sieht, dass die Hauptzonen in der engsten Verbindung mit der Grundform stehen, und unmittelbar auf dieselbe hindeuten. In den Systemen des Rhomboëders und der graden Octaëder ist dieser Zusammenhang besonders deutlich wahrzunehmen, so dass man bei diesen Formen nur der Vertheilung der parallelkantigen Flächen zu folgen braucht, um sogleich die Grundform zu erkennen; da ferner bei diesen Systemen

die horizontalen Axen mit der verticalen, und bei den Octaëdern auch die horizontalen Axen untereinander rechte Winkel machen sollen, so ist die Wahl unter mehreren Axen, die sich dem Beobachter darbieten, so beschränkt, dass hier fast nichts der Willkühr überlassen bleibt. Nur beim Rhomboëder und Quadratoctaëder kann die Wahl zwischen den Axen der fürs Erste angenommenen Grundform und den Axen des nächst stumpfern Körpers zweifelhaft bleiben.

Verfährt man eben so bei den Systemen der schiefen Octaëder, d. h. geht man nur von der respectiven Lage wirklich und in grosser Anzahl existirender und nicht von der Lage bloss denkbarer Flächen aus, so wird man nothwendig *) auf schiefwinklichte Axen geführt.

Es sey Fig. 185 der durch die Axen a, c gelegte Durchschnitt eines schiefen Rhombenoctaëders; BD ist die Halbaxe a_s; AD die Halbaxe c; AB ist eine vordere Endkante, deren grade Abstumpfungsfläche, auf die schiefwinklichten Axen BD, AD bezogen, folgendes Zeichen hat:

$$\boxed{a_s : \infty b : c}.$$

Wir wollen nun eine mit AC rechtwinklichte Axe BC ziehen; so kann man BD auch als eine Endkante ansehen, an dem graden Rhombenoctaëder, dessen Axen mit den Linien AC, BC zusammenfallen. Die Weissischen, auf rechtwinklichte Axen bezogenen Zeichen der graden Abstumpfungsflächen der Endkanten BD und AB seyen:

$$\boxed{a : \infty b : pc}$$
$$\boxed{a : \infty b : mc}$$

*) Die wenigen Fälle ausgenommen, wo eine Reduction auf rechtwinkli hte Axen sich gewissermassen von selbst darbietet, z. B. beim Pyroxen.

so ist offenbar, wenn man $EC = c$ setzt,

$$DC = p : AC = m$$

mithin

$$AD = m - p.$$

Es sey EF eine andere vordere Endkante, deren grade Abstumpfungsfläche

$$\overline{|c : \infty b : m'c|}$$

zum Zeichen habe: alsdann ist $FC = m'$, also

$$FD = m - p.$$

Die Zeichen der Abstumpfungsflächen der Kanten AB, FB, auf die schiefwinklichten Axen ED, AD bezogen, sind hiernach offenbar, wenn man $ED = a_1$ setzt:

$$\overline{|a_1 : \infty b : (m-p)\,c|}$$

$$\overline{|a_1 : \infty b : (m'-p)\,c|}.$$

Will man dem Zeichen der graden Abstumpfungsfläche der Endkante AB, auf die schiefwinklichten Axen bezogen, die Form

$$\overline{|a_1 : \infty b : c|}$$

geben, so muss man die Coefficienten von c in den obigen Zeichen mit $(m-p)$ dividiren, und erhält so

$$\frac{m'-p}{m-p}$$

als den Werth des Coefficienten von c im Zeichen der Abstumpfungsfläche irgend einer vordern Endkante, auf schiefwinklichte Axen bezogen, deren Weissisches Zeichen

$$\overline{|a : \infty b : mc|}$$

ist.

Ist $m' < p$, oder trifft die Endkante die Axe AC unterhalb D, z. B. in G (Fig. 186), so wird der Coefficient von c im Zeichen, welches sich auf schiefwinklichte Axen bezieht, negativ, welches anzeigt, dass die in Frage stehende Endkante am schiefen Rhombenoctaëder hinten liegt, während sie beim graden vorn liegt.

Liegt endlich die grade Abstumpfungsfläche der Endkante, deren Weissisches Zeichen

$$\boxed{a' : \infty b : m''c}$$

sey, hinten, wie z. B. $B'H'$ (Fig. 187), so ist offenbar, wenn man BH mit $B'H'$ parallel macht,

$$HD = CD + CH.$$

Es ist aber $CD = p$, $HC = CH' = m''$; HD ist der Coefficient von c im Zeichen der Abstumpfungsfläche, das sich auf schiefwinklichte Axen bezieht, der aber noch erst mit $m - p$ dividirt werden muss; dieser Coefficient ist also:

$$\frac{p + m''}{m - p}.$$

Ich will mich jetzt bemühen an einem Beispiel darzulegen, wie willkührlich und gezwungen die Zeichen oft ausfallen, wenn man einem schiefen Rhombenoctaëder ein grades substituirt; und wie durch die umgekehrte Substitution oft die Zeichen einfach werden.

Der Titanit (oder Sphen) krystallisirt in den Formen, die Fig. 188 — 192 abgebildet sind; sie sind aus der Abhandlung entnommen, die G. Rose über diesen Gegenstand bekannt gemacht hat *). Die Grundform ist nach

*) Ueber das Krystallisationssystem des Titanits (und Sphens) von Dr. Gustav Rose, in Leonhard's Taschenbuch.

Base ein grades Rhombenoctaëder, dessen hintere Endkante von der Fläche P', dessen Basiskanten von den Flächen M, M grade abgestumpft werden.

Die Weissischen (auf rechtwinklichte Axen zu beziehenden) Zeichen aller vorkommenden Flächen, sind nach ihm folgende:

Säulenflächen:

$$M = |a : b : \infty c|$$

$$l = |a : 3b : \infty c|$$

$$q = |\infty a : b : \infty c|$$

Abstumpfungsflächen vorderer und hinterer Endkanten:

$$P' = |a' : \infty b : c|$$

$$f = |a : \infty b : 5c| *$$

$$g' = |a' : \infty b : 7c| *$$

$$x = |a : \infty b : 9c|$$

$$y = |a : \infty b : 17c|$$

$$v' = |a' : \infty b : 19c|$$

$$z = |a : \infty b : 27c|$$

$$h' = |a' : \infty b : 55c| *$$

Zuspitzungsflächen oder Flächen abgeleiteter Octaëder:

$$o' = |a_{,} : \tfrac{1}{2}b : c|$$

$$r' = |a_{,} : \tfrac{1}{6}b : c|$$

$$u = |\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b : c|$$

$$n = |\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{4}b : c|$$

$$d = |\tfrac{1}{7}a : \tfrac{1}{12}b : c|$$

$w' = |\frac{1}{\infty}a : \frac{1}{\infty}b : c|$ Flächen

$i' = |\frac{1}{10}a : \frac{1}{\infty}b : c|$ chen.

$k = |\frac{1}{11}a : \frac{1}{2}b : c|$ ie Coefficienten von c in

$s = |\frac{1}{11}a : \frac{1}{11}b : c|$ ungsflächen der vor-

$t' = |\frac{1}{19}a : \frac{1}{12}b : c|$

Die Accente zeigen an, dass die so bezeichneten Flächen hinten

Die mit einem Stern bezeichneten Abstumpfungsflächen vorderer oder hinterer Endkanten kommen nicht wirklich vor; man hat sie nur mit hergesetzt, um zu zeigen, welche Flächen dieser Art noch in der Entwickelung des Systems möglich sind; die Endkanten, welche von diesen Flächen abgestumpft werden und deren Lage man aus den Coefficienten von a ersehen kann, sind, bis auf die letzte h', Durchschnittslinien vorkommender Flächen; f stumpft nämlich die Endkante nn ab; g' die Endkante $w'w'$. Man kann diese Liste noch mit folgenden Flächen vermehren:

$$\zeta' = |a' : \infty b : 10c| \ *$$

$$\vartheta = |a : \infty b : 11c| \ *$$

welche die Endkanten $i'i'$ und kk abstumpfen.

Bei der ersten Ansicht dieser Zeichen ist es schon auffallend, wie viel weniger einfach die Coefficienten von a sind, als diejenigen von b; in der That, wenn man nicht die rechte Grundform in Bezug auf die Axe a getroffen hat, so kann der Erfolg davon nur in den Coefficienten von a sichtbar werden. Wir wollen deshalb versuchen, ein schiefes Rhombenoctaëder als Grundform anzunehmen; die Coefficienten selbst sollen uns in der Wahl desselben leiten.

Es sey wieder die Figur 194 der Durchschnitt eines schiefen Rhombenoctaëders, durch die Halbaxen a_s, c gelegt, und BC senkrecht auf AC; es sey AB die vordere Endkante, BD die Halbaxe a_s und AH' die hintere Endkante des schiefen Rhombenoctaëders. Man ziehe BH parallel mit AH', so ist offenbar

$$AC = 2DC + CH.$$

Nun ist aber, nach dem Vorhergehenden, AC gleich dem Coefficienten von c im Weissischen Zeichen der Abstumpfungsfläche von AB oder der vordern Endkante, DC gleich dem Coefficienten von c im Weissischen Zeichen der Abstumpfungsfläche von BD oder der Basis, und endlich CH gleich dem Coefficienten von c im Weissischen Zeichen der Abstumpfungsfläche der hintern Endkante des schiefen Rhombenoctaëders. Wenn aber drei Coefficienten von c in den oben angeführten Zeichen das durch diese Gleichung ausgedrückte Verhältniss zu einander haben, so kann man von den ihnen zugehörigen Flächen die eine als Basis, die beiden andern als grade Abstumpfungsflächen der vordern und hintern Endkante des schiefen Rhombenoctaëders ansehen. Die Zahlen 5, 7 und 10 genügen der obigen Gleichung, denn

$$17 = 2 \times 5 + 7;$$

man kann also f als die Basis, y als die grade Abstumpfungsfläche der vordern, g' als die grade Abstumpfungsfläche der hintern Endkante eines schiefen Rhombenoctaëders ansehen, auf das wir nun auch die übrigen Flächen beziehen wollen.

Die Coefficienten von c für die übrigen graden Abstumpfungsflächen der Endkanten, auf schiefwinklichte Axen bezogen, sind nach dem Vorhergehenden

3) f als die Basis, ϑ als die Abstumpfungsfläche der vordern Endkante und P' als die der hintern.

Diese drei Suppositionen werden drei verschiedene Reihen von Coefficienten von c geben, unter denen man zu wählen hat, und welche in der folgenden Tabelle enthalten sind:

Coefficienten von c	in der 1sten	in der 2ten	in der 3ten Supposition.
für P'	0	0	1
für f	1	$\frac{1}{2}$	0
für g'	1	$\frac{1}{2}$	2
für x	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
für y	3	1	2
für v'	3	1	4
für z	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$
für k'	9	3	10
für ζ'	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
für ϑ	2	$\frac{2}{3}$	1.

Man sieht leicht ein, dass man die Suppositionen noch sehr vervielfältigen kann; man kann z. B. bloss zwei Flächen wählen, von denen man die eine als Basis, die andere als Abstumpfung der vordern Endkante ansieht; es kann alsdann geschehen, dass die Abstumpfung der hintern Endkante ganz fehlt. Wir wollen z. B. f als Basis und v' als grade Abstumpfung der hintern Endkante des Grundoctaëders nehmen, so ist $p = 5$, $m = 29$; und die Coefficienten von c für die übrigen Flächen bekommen folgende Werthe:

für P' —— $\frac{1}{4}$

für f —— 0

für g' —— $\frac{1}{2}$

für x —— $\frac{1}{6}$

für y —— $\frac{1}{2}$

für v' —— 1

für z —— $\frac{11}{12}$

für h' —— $\frac{5}{2}$

für ζ' —— $\frac{5}{8}$

für ϑ —— $\frac{1}{4}$.

Man hat nun die Wahl unter diesen verschiedenen Suppositionen. Sieht man dasjenige schiefe Rhombenoctaëder als die Grundform, an, dessen Basis f ist, dessen vordere Endkante von der Fläche y und dessen hintere Endkante von der Fläche g' abgestumpft wird, so hat man folgende Zeichen der Flächen, die am Titanit oder Sphen vorkommen:

Grade Abstumpfungen von Endkanten:

Von vorne.	Von hinten.
$x = \boxed{3a_s : \infty b : c}$	$P' = \boxed{2a'_s : \infty b : c}$
$y = \boxed{a_s : \infty b : c}$	$v' = \boxed{\frac{1}{2}a'_s : \infty b : c}$
$z = \boxed{\frac{1}{2}a_s : \infty b : c}$ *)	

Von Seitenendkanten:

$$u = \boxed{\infty a_s : 6b : c}$$

$$n = \boxed{\infty a_s : 3b : c}$$

$$d = \boxed{\infty a_s : b : c}$$

*) Der Coefficient von a_s ist hier eigentlich $\frac{6}{11}$, da aber z wegen der Kleinheit der Fläche schwerlich mit Genauigkeit bestimmt werden konnte, so habe ich diesen Coefficienten gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt.

Zuspitzungsflächen:

Vordere.	Hintere.
$s = \boxed{a_s : \frac{1}{2}b : c}$	$w' = \boxed{a'_s : \frac{1}{2}b : c}$
$k = \boxed{2a_s : 6b : c}$	$i' = \boxed{\frac{1}{2}a'_s : 4b : c}$
	$o' = \boxed{2a'_s : 6b : c}$
	$r' = \boxed{2a'_s : 2b : c}$
	$t' = \boxed{\frac{1}{2}a'_s : b : c}$

Säulenflächen:

$$M = \boxed{a_s : b : \infty c}$$

$$l = \boxed{a_s : 3b : \infty c}$$

$$q = \boxed{\infty a_s : b : \infty c}.$$

Da die Coefficienten von c durch 12 dividirt, mithin, bei Uebertragung der Coefficienten von c auf a, die Coefficienten dieser letztern Halbaxe mit 12 multiplicirt worden sind, so muss man offenbar auch die Coefficienten von b in den Rose'schen Zeichen mit 12 multipliciren, welches auch geschehen ist. Die Säulenflächen haben wir unverändert gelassen.

Sind erst die Zeichen einiger Flächen bekannt, so kann man auch die der übrigen aus ihrer respectiven Lage bestimmen, je nachdem sie in die eine oder in die andere Zone fallen. Eine Fläche, die in zwei bekannte Zonen fällt, ist hinlänglich bestimmt; eben so ist es, wenn eine Zone, in welche sie fällt, und ein Coefficient in ihrem Zeichen (ausser dem Coefficienten von c, den wir immer der Einheit gleich setzen) bekannt sind.

Die Fläche n fällt in die Zone der Flächen x, M', zugleich in die Zone der Flächen y, l' (s. Fig. 188). Wir haben also in den Gleichungen:

$$p(r'q'' - r''q') + p'(qr'' - q''r) + p''(q'r - r'q) = o$$
$$p(r'''q^{IV} - r^{IV}q''') + p'''(qr^{IV} - q^{IV}r) + p^{IV}(q'''r - qr''') = o$$

welche dazu dienen, das Zeichen einer Fläche zu finden, die in zwei Zonen zugleich fällt:

für x	für M'	für y	für l'
$p' = \frac{1}{2}$	$p'' = -1$	$p''' = 1$	$p^{IV} = -1$
$q' = 0$	$q'' = 1$	$q''' = 0$	$q^{IV} = \frac{1}{2}$
$r' = 1$	$r'' = 0$	$r''' = 1$	$r^{IV} = 0$

Diese Werthe in die obigen Gleichungen gesetzt, geben:

$$p - \tfrac{1}{2}r + q = o$$
$$\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}r + q = o.$$

Setzt man $r = 1$, so findet man, durch Combination dieser beiden Gleichungen,

$$p = o$$
$$q = \tfrac{1}{2}$$

mithin

$$n = \boxed{\infty a_s : 3b : c}$$

wie wir schon oben gefunden haben.

Die Fläche r' hat denselben Coefficienten von a_s, wie P', und liegt zugleich in der Zone von y, l'. Also:

$$p = -\tfrac{1}{2};\ \text{und}\ \begin{cases} p' = 1 \mid p'' = -1 \\ q' = 0 \mid q'' = \frac{1}{2} \\ r' = 1 \mid r'' = 0 \end{cases}$$

Diese Werthe in die erste der obigen Gleichungen gesetzt, giebt:

$$-\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}r + q = o.$$

Setzt man hierin $r = 1$, so bekommt man

$$q = \tfrac{1}{2}$$

mithin $$r = \boxed{|2a'_s : 2b : c|}.$$

Die hintere Endkante $o'o'$ wird ebenfalls von P' grade abgestumpft; überdies liegt o' in der Zone der Flächen n, l; also

$$p = -\tfrac{1}{2}; \text{ und } \begin{cases} p' = 0 \\ q' = \tfrac{1}{2} \\ r' = 1 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} p'' = 1 \\ q'' = \tfrac{1}{2} \\ r'' = 0. \end{matrix}$$

Diese Werthe in die erste Gleichung gesetzt, nachdem man $r = 1$ gemacht, geben:

$$q = \tfrac{1}{2}$$

mithin $$o' = \boxed{|2a'_s : 6b : c|}.$$

Die Fläche l' liegt in der Zone der Flächen l', n (s. Fig. 190) und zugleich in der Zone der Fläche P' und des gegenüberliegenden n. Also:

für l'	für n	für P'	für das andere n
$p' = -1$	$p'' = 0$	$p''' = -\tfrac{1}{2}$	$p^{IV} = 0$
$q' = \tfrac{1}{2}$	$q'' = \tfrac{1}{2}$	$q''' = 0$	$q^{IV} = -\tfrac{1}{2}$
$r' = 0$	$r'' = 1$	$r''' = 1$	$r^{IV} = 1.$

Diese Werthe in die beiden obigen Gleichungen gesetzt, nachdem man $r = 1$ gemacht, geben:

$$-\tfrac{1}{2}p - q + \tfrac{1}{2} = o$$
$$-\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2} = o$$

woraus

$$p = -2$$
$$q = 1$$

mithin

$$t' = \overline{|\tfrac{1}{2}a'_s : b : c|}.$$

Auf diese Art kann man nach und nach die Zeichen aller übrigen Flächen finden.

Wir haben bisher die Flächen l, l als Säulenflächen angesehen; aber es ist möglich, dass die Zeichen noch einfacher oder wenigstens symmetrischer werden, wenn man der Axe c eine andere Lage giebt.

Wir wollen zum Beispiel, ohne die Axe b zu verändern, die Axe c der Kante ss und die Axe a der Kante $o'o'$ parallel ziehen.

Es sey (Fig. 195) $BD = ED$ die alte Halbaxe a, AD die alte Halbaxe c, AB die Kante ss und AH die Kante $o'o'$, indem $DH = 2DE$; es sey ferner AL eine andere Endkante, deren grade Abstumpfungsfläche folgendes Zeichen habe:

$$\overline{|\alpha a_s : \infty b : c|}$$

so dass also $LD = \alpha a$. Zieht man nun BF parallel mit AL, so ist offenbar

$$\frac{AF}{AH} = \frac{BL}{HL}.$$

Nun ist aber $BL = LD - BD = a(\alpha - 1)$ und $LH = LD + DH = a(\alpha + 2)$; also:

$$\frac{AF}{AH} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}.$$

Ist nun AB die neue Axe c, und AH die neue Axe a, so ist das Zeichen der Abstumpfungsfläche der Endkante AL, auf diese neue Axe bezogen, folgendes:

$$\overline{\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+2}a_s : \infty b : c\right|}.$$

Substituirt man hier für α seine obigen Werthe 3, 1, $\frac{1}{2}$ etc., so be-

kommt man folgende Coefficienten von a in den Zeichen der bekannten Abstumpfungsflächen der Endkanten, auf die neuen Axen bezogen, welche den Kanten ss und $o'o'$ parallel gehen:

für die Fläche x . . . . . $\frac{3}{2}$
für die Fläche y 0
für die Fläche z . . . . . $-\frac{1}{2}$
für die Fläche P' . . . . . ∞
für die Fläche f 1
für die Fläche g' . . . . . -2
für die Fläche v' . . . . . -1
für die Fläche h' . . . . . $-\frac{3}{2}$
für die Fläche ζ' . . . . . $-\frac{5}{2}$
für die Fläche ϑ . . . . . $\frac{1}{4}$.

Wir können auch im Allgemeinen dem neuen Coefficienten von a folgende Gestalt geben, die keines weiteren Beweises bedarf,

$$\frac{a-r}{a-\eta'}$$

wo η, η' die alten Coefficienten von a in den Zeichen der Abstumpfungsflächen der Endkanten, die als neue Endkanten dienen sollen, bedeuten; also im eben bezeichneten Fall $\eta = 1$, $\eta' = -2$.

Setzt man z. B. $\eta = 1$, $\eta' = -1$, oder zieht man die Axe c der Endkante ss, und die Axe a der Kante $a'a'$ parallel, so bekommt man folgende Coefficienten von a_s:

für P' 3
für x . . . . . $\frac{1}{2}$
für z . . . . . $-\frac{1}{2}$

für f 1

für g' . . . . . ∞

für v' . . . . . -3

für ζ' . . . . . -9

für ϑ . . . . . $\frac{1}{3}$.

Um den Coefficienten von b zu finden, braucht man nur dieselbe Figur 195 anzusehen. Man ziehe durch A eine Linie senkrecht auf die Ebene BAH, so ist diese Linie die neue Halbaxe b. Man bezeichne den Coefficienten der neuen Halbexe b mit β', den Coefficienten der alten durch D gehenden Halbaxe b mit β. Denkt man sich nun durch BF eine Ebene gelegt, die mit der durch AL gehenden Krystallebene parallel ist, so wird:

1) Die alte Halbaxe b, die durch D geht, so von der durch BF gehenden Ebene geschnitten, dass das Stück Axe zwischen dem Durchschnittspunct und dem Mittelpunct D gleich $\beta \cdot \frac{BD}{DL} \cdot b$ ist.

2) Die alte und neue Halbaxe b, so von der durch BF gehenden Ebene geschnitten, dass die gegenseitigen Abschnitte sich verhalten, wie

$$\frac{AD}{DG} = \frac{BL}{BD}.$$

Wir haben also $$\frac{\beta'}{\beta \cdot \frac{BD}{DL}} = \frac{BL}{BD}$$

woraus, da $BD = \eta$, $DL = \alpha$, $BL = \alpha - \eta$:

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha - \eta}{\alpha}.$$

Hiernach haben wir folgendes allgemeine Schema der Verwandlung eines Zeichens in das andere:

altes Zeichen.	neues Zeichen.
$\alpha a_s : \beta b : c$	$\frac{\alpha-\eta}{\alpha-\eta'} a_s : \frac{\alpha-\eta}{\alpha} \beta b : c$

Beim schiefen Rhombenoctaëder, auf welches sich das neue Zeichen bezieht, gehen die Axen c und a denjenigen Endkanten des alten schiefen Rhombenoctaëders parallel, welche von den Flächen $\boxed{\eta a_s : \infty b : c}$ und $\boxed{\eta' a_s : b : c}$ grade abgestumpft werden; die Halbaxe c aber bleibt in ihrer Lage unverändert.

Die Zeichen der bekannten Flächen am Titanit sind nach dieser Supposition folgende (nämlich wenn man $\eta = 1$ und $\eta' = -1$ setzt):

Vordere.		Hintere.	
P'	$\boxed{3a_s : \infty b : c}$	v'	$\boxed{3a'_s : \infty b : c}$
r'	$\boxed{3a_s : 3b : c}$	t'	$\boxed{3a'_s : 3b : c}$
o'	$\boxed{3a_s : 9b : c}$		
n	$\boxed{a_s : : 3b : c}$	l'	$\boxed{a'_s : 3b : c}$
x	$\boxed{\frac{1}{2}a_s : \infty b : c}$	M	$\boxed{a'_s : b : c}$
k	$\boxed{\frac{1}{3}a_s : 3b : c}$	z	$\boxed{\frac{1}{2}a'_s : \infty b : c}$
		i'	$\boxed{9a'_s : 9b : c}$

Säulenflächen:

$$s = \boxed{a_s : b : \infty c}$$

$$y = \boxed{a_s : \infty b : \infty c}$$

Abstumpfungsfläche der Seitenendkante:

$$w' = \boxed{\infty a_s : 3b : c}.$$

Diese Zeichen werden noch einfacher, wenn man alle Coefficienten von b durch 3 dividirt.

Man kann diese Aufgabe auch ganz allgemein behandeln, auf folgende Weise.

Es seyen zwei Krystallebenen gegeben, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz - 1 = o$$
$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z - 1 = o;$$

es seyen ferner drei Linien gegeben, die durch denselben Punct gehen und deren Gleichungen folgende sind:

$$\left.\begin{matrix} c(x' - x) + a(z' - z) = o \\ c(y' - y) + b(z' - z) = o \end{matrix}\right\}$$
$$\left.\begin{matrix} c'(x' - x) + a'(z' - z) = o \\ c'(y' - y) + b'(z' - z) = o \end{matrix}\right\}$$
$$\left.\begin{matrix} c''(x' - x) + a''(z' - z) = o \\ c''(y' - y) + b''(z' - z) = o \end{matrix}\right\}$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\left.\begin{matrix} \frac{q_{(1)} \cdot p}{p_{(1)} \cdot q} = \frac{(Cc' - Bb' - Aa')\,(C_{(1)}c - B_{(1)}b - A_{(1)}a)}{(C_{(1)}c' - B_{(1)}b' - A_{(1)}a')\,(Cc - Bb - Aa)} \\ \frac{r_{(1)} \cdot p}{p_{(1)} \cdot r} = \frac{(Cc'' - Bb'' - Aa'')\,(C_{(1)}c - B_{(1)}b - A_{(1)}a)}{(C_{(1)}c'' - B_{(1)}b'' - A_{(1)}a'')\,(Cc - Bb - Aa)} \end{matrix}\right\} \quad \ldots \text{(I)}$$

Hier bezeichnen p, q, r die Entfernungen der Durchschnittspuncte der drei Linien und der ersten Ebene vom Durchschnittspunct der drei Linien, und $p_{(1)}$, $q_{(1)}$, $r_{(1)}$ dieselben Grössen in Bezug auf die zweite Ebene. Es sey nun

$$\boxed{\alpha a : \beta b : c}$$

das Zeichen der ersten Krystallebene, auf die ursprünglichen Axen bezogen; und

$$\boxed{\alpha' a : \beta' b : c}$$

das Zeichen derselben Ebene auf die drei Linien als Axen bezogen; ferner

$$\boxed{\alpha_{(1)} a : \beta_{(1)} b : c}$$

das Zeichen der zweiten Krystallebene auf die ursprünglichen Axen bezogen; und

$$\overline{|\alpha'_{(1)}a : \beta'_{(1)}b : c|}$$

das Zeichen derselben Ebene auf die drei Linien als Axen bezogen, so ist offenbar nicht nur

$$\begin{array}{l|l} p = c & p_{(1)} = c \\ q = \alpha' a & q_{(1)} = \alpha'_{(1)}a \\ r = \beta' b & r_{(1)} = \beta'_{(1)}b \end{array}$$

sondern auch, nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{array}{ll} A = \frac{1}{\alpha a} & A_{(1)} = \frac{1}{\alpha_{(1)}a} \\ B = \frac{1}{\beta b} & B_{(1)} = \frac{1}{\beta_{(1)}b} \\ C = \frac{1}{c} & C_{(1)} = \frac{1}{c}. \end{array}$$

Ferner, wenn die Zeichen der Krystallebenen, aus deren Durchschnitt die drei Linien entstehen, die wir als neue Axen ansehen wollen, folgende sind:

$\overline{|\eta a : \vartheta b : c|}$, $\overline{|\eta_{(1)}a : \vartheta_{(1)}b : c|}$ } für die erste Linie oder für die neue Axe c.

$\overline{|\eta' a : \vartheta' b : c|}$, $\overline{|\eta'_{(1)}a : \vartheta'_{(1)}b : c|}$ } für die zweite Linie oder für die neue Axe a.

$\overline{|\eta'' a : \vartheta'' b : c|}$, $\overline{|\eta''_{(1)}a : \vartheta''_{(1)}b : c|}$ } für die dritte Linie oder für die neue Axe b.

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$c = \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{\eta_{(1)}\vartheta} - \frac{1}{\eta\vartheta_{(1)}}\right) \qquad c' = \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{\eta'_{(1)}\vartheta'} - \frac{1}{\eta'\vartheta'_{(1)}}\right)$$

$$b = \frac{1}{ac}\left(\frac{1}{\eta_{(1)}} - \frac{1}{\eta}\right) \qquad b' = \frac{1}{ac}\left(\frac{1}{\eta'_{(1)}} - \frac{1}{\eta'}\right)$$

$$a = \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_{(1)}}\right) \text{ *)} \qquad a' = \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{\vartheta'} - \frac{1}{\vartheta'_{(1)}}\right)$$

$$c'' = \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{\eta'_{(1)}\vartheta''} - \frac{1}{\eta''\vartheta''_{(1)}}\right)$$

$$b'' = \frac{1}{ac}\left(\frac{1}{\eta''_{(1)}} - \frac{1}{\eta''}\right)$$

$$a'' = \frac{1}{bc}\left(\frac{1}{\vartheta''} - \frac{1}{\vartheta''_{(1)}}\right).$$

Diese Werthe von p, q etc., A, B, C etc., a, b, c etc. in die Gleichungen (I) gesetzt, geben, nach den gehörigen Reductionen:

$$\frac{a'_{(1)}}{a'} = \frac{[\alpha\beta(\eta'\vartheta'_{(1)} - \eta'_{(1)}\vartheta') - \alpha(\eta' - \eta'_{(1)})\vartheta'\vartheta'_{(1)} - \beta(\vartheta'_{(1)} - \vartheta')\eta'\eta'_{(1)}]}{[\alpha_{(1)}\beta_{(1)}(\eta'\vartheta'_{(1)} - \eta'_{(1)}\vartheta') - \alpha_{(1)}(\eta' - \eta'_{(1)})\vartheta'\vartheta'_{(1)} - \beta_{(1)}(\vartheta'_{(1)} - \vartheta')\eta'\eta'_{(1)}]}$$
$$\times \frac{[\alpha_{(1)}\beta_{(1)}(\eta\vartheta_{(1)} - \eta_{(1)}\vartheta) - \alpha_{(1)}(\eta - \eta_{(1)})\vartheta\vartheta_{(1)} - \beta_{(1)}(\vartheta_{(1)} - \vartheta)\eta\eta_{(1)}]}{[\alpha\beta(\eta\vartheta_{(1)} - \eta_{(1)}\vartheta) - \alpha(\eta - \eta_{(1)})\vartheta\vartheta_{(1)} - \beta(\vartheta_{(1)} - \vartheta)\eta\eta_{(1)}]}$$

$$\frac{\beta'_{(1)}}{\beta'} = \frac{[\alpha\beta(\eta''\vartheta''_{(1)} - \eta''_{(1)}\vartheta'') - \alpha(\eta'' - \eta''_{(1)})\vartheta''\vartheta''_{(1)} - \beta(\vartheta''_{(1)} - \vartheta'')\eta''\eta''_{(1)}]}{[\alpha_{(1)}\beta_{(1)}(\eta''\vartheta''_{(1)} - \eta''_{(1)}\vartheta'') - \alpha_{(1)}(\eta'' - \eta''_{(1)})\vartheta''\vartheta''_{(1)} - \beta_{(1)}(\vartheta''_{(1)} - \vartheta'')\eta''\eta''_{(1)}]}$$
$$\times \frac{[\alpha_{(1)}\beta_{(1)}(\eta\vartheta_{(1)} - \eta_{(1)}\vartheta) - \alpha_{(1)}(\eta - \eta_{(1)})\vartheta\vartheta_{(1)} - \beta_{(1)}(\vartheta_{(1)} - \vartheta)\eta\eta_{(1)}]}{[\alpha\beta(\eta\vartheta_{(1)} - \eta_{(1)}\vartheta) - \alpha(\eta - \eta_{(1)})\vartheta\vartheta_{(1)} - \beta(\vartheta_{(1)} - \vartheta)\eta\eta_{(1)}]}.$$

Diese Formeln werden viel einfacher, wenn man die Ebenen, aus deren Durchschnitt die drei Linien oder die neuen Axen entstehen, schicklich wählt.

Es ist klar, dass beim schiefen Rhombenoctaëder die erste Linie oder die neue Halbaxe c als die Durchschnittslinie zweier Krystallebenen angesehen werden kann, die rechts und links die alten Halbaxen b und b' in demselben Verhältniss schneiden, so dass also

$$\vartheta = -\vartheta_{(1)}.$$

*) Man muss hier wieder nicht die Coefficienten a, b, c mit den in den zweiten Gliedern vorkommenden Halbaxen a, b, c verwechseln. Ich habe die Zeichen nicht geändert, damit man die Beziehungen dieser Formeln auf die schon aus dem Vorhergehenden bekannten leichter finde.

Eben so kann man auch, in Bezug auf die neue Axe a,

$$\vartheta' = -\vartheta'_{(1)}$$

setzen. Da die neuen Axen a, c immer, in Bezug auf die alten, als Endkanten des schiefen Rhombenoctaëders angesehen werden können, so ist auch

$$\eta = \eta_{(1)}$$
$$\eta' = \eta'_{(1)}.$$

Nimmt man auf diese Gleichungen Rücksicht, so verwandelt sich die erste von den obigen Formeln in folgende:

$$\frac{\alpha'_{(1)}}{a'} = \frac{(\alpha_{(1)} - \eta)}{(\alpha_{(1)} - \eta')} \cdot \frac{(a - \eta')}{(a - \eta)}.$$

Da $\alpha'_{(1)}$ offenbar nur von $\alpha_{(1)}$ und α' nur von α abhängen kann, und da überdiess hier nur von Verhältnisszahlen, nicht von absoluten Grössen die Rede ist, so kann man die Factoren von einander trennen und zwei Gleichungen aus der einen machen:

$$\alpha'_{(1)} = \frac{(\alpha_{(1)} - \eta)}{(a_{(1)} - \eta')} \text{ und } \alpha' = \frac{(\alpha - \eta)}{(a - \eta')}$$

welche beide mit der schon oben für diesen Fall geometrisch entwickelten Gleichung identisch sind. Die erste zusammengesetzte Gleichung ist eigentlich nur für den Fall berechnet, wo man die erste Ebene als eine Krystallebene von der Form

$$\boxed{a_s : xb : c}$$

ansehen will, so dass $\alpha' = 1$.

Die Formel für β' wird auch sehr einfach. Man kann offenbar die Axe b ansehen als entstanden aus dem Durchschnitt zweier Ebenen von der Form

$$\boxed{a_s : \infty b : c} \text{ und } \boxed{a'_s : \infty b : c}$$

so dass also $\eta'' = -\eta''_{(1)}$ und $\vartheta'' = \vartheta''_{(1)} = \infty$. Diese Werthe in die zweite Formel gesetzt, giebt

$$\frac{\beta'_{(1)}}{\beta'} = \frac{\beta_{(1)}}{\beta} \cdot \frac{a}{a_{(1)}} \cdot \frac{(a_{(1)} - \eta)}{(a - \eta)}.$$

Man kann hieraus wieder zwei Gleichungen machen

$$\beta'_{(1)} = \beta_{(1)} \cdot \frac{(a_{(1)} - \eta)}{a_{(1)}} \text{ und } \beta' = \beta \cdot \frac{(a - \eta)}{a}$$

welche mit der bereits oben geometrisch entwickelten Gleichung wieder identisch sind.

Auf diese Weise könnte man nun noch die Formen des Epidotes, des Gypses etc. behandeln, die Weiss ebenfalls auf rechtwinklichte Axen bezogen hat. Wir wollen uns indess nur noch mit der Anwendung unserer Formeln auf das ganz unsymmetrische Octaëder beschäftigen.

Wir haben bei der Bearbeitung des Kupfervitriols gesehen, dass die Zeichen der vorzüglichsten Flächen folgende sind:

$i = \overline{\lvert a_s : b_s : c \rvert}$	$x = \overline{\lvert a'_s : 3b'_s : c \rvert}$
$P = \overline{\lvert a_s : b'_s : c \rvert}$	$z = \overline{\lvert a'_s : 3b_s : c \rvert}$
$k = \overline{\lvert a'_s : b'_s : c \rvert}$	$u = \overline{\lvert a'_s : \frac{3}{2}b'_s : c \rvert}$
$s = \overline{\lvert a'_s : b_s : c \rvert}$	$y = \overline{\lvert a_s : \frac{3}{2}b'_s : c \rvert}$
$M = \overline{\lvert a_s : 3b_s : \infty c \rvert}$	$n = \overline{\lvert a_s : \infty b_s : \infty c \rvert}$
$T = \overline{\lvert a_s : 3b'_s : \infty c \rvert}$	$r = \overline{\lvert \infty a_s : b_s : \infty c \rvert}$.

Man sieht aus den Zeichen selbst, dass das Grundoctaëder dasjenige ist, welches von den Flächen i, P, k, r gebildet wird.

Die Coefficienten von b haben in einigen dieser Zeichen nicht die Einfachheit, die man verlangen könnte; wir wollen deshalb ein andres Grundoctaëder versuchen, nämlich dasjenige, in welchem c und a eben so

liegen, wie im früheren, in welchem P ebenfalls als Octaëderfläche auftritt, dessen Basiskante aber von T abgestumpft wird.

Wir wollen erst die Ebene bestimmen, in welcher die neue Halbaxe b liegt; sie geht durch die Kante PT und zugleich durch die Halbaxe a, die unverändert bleibt. Man kann sie als eine Krystallfläche ansehen, welche in der Zone der Flächen P, T liegt, und in deren Zeichen der Coefficient von a_s gleich ∞ ist. Setzt man aber in die Gleichung

$$p(r'q'' - r''q') + p'(qr'' - q''r) + p''(q'r - qr') = o$$

$$\left.\begin{matrix} p = 0 \\ r = 1 \end{matrix}\right\} \text{ und } \begin{matrix} p' = 1 \\ q' = -1 \\ r' = 1 \end{matrix} \left|\begin{matrix} p'' = 1 \\ q'' = -\frac{1}{2} \\ r'' = 0 \end{matrix}\right.$$

so erhält man

$$q = -\tfrac{2}{3};$$

das Zeichen der Ebene, in welcher die neue Halbaxe b liegt, ist also

$$\boxed{\infty a_s : \tfrac{3}{2} b'_s : c}.$$

Nun entsteht offenbar die neue Halbaxe b aus dem Durchschnitt dieser Ebene mit n; die Halbaxe a aus den Durchschnitt derselben Ebene mit r; die Halbaxe c endlich aus den Durchschnitt der Flächen n und r. Wir haben also

$$\begin{matrix} \eta'' = \infty; & \eta''_{(1)} = 0 \\ \vartheta'' = -\frac{3}{2}; & \vartheta''_{(1)} = 1 \end{matrix} \left|\begin{matrix} \eta' = 0; & \eta'_{(1)} = 1 \\ \vartheta' = -\frac{3}{2}; & \vartheta'_{(1)} = 0 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} \eta = 0; & \eta_{(1)} = 1 \\ \vartheta = 1; & \vartheta_{(1)} = 0. \end{matrix}\right.$$

Diese Werthe in die obigen Gleichungen gesetzt, geben

$$\frac{a'_{(1)}}{a'} = \frac{a_{(1)}}{a} \text{ und } \frac{\beta'_{(1)}}{\beta'} = \frac{\beta_{(1)}(\beta + \frac{3}{2})}{\beta(\beta_{(1)} + \frac{3}{2})}.$$

Wir wollen wieder P als eine Octaëderfläche ...igen zu ziehen, die wir bald
form ansehen, so ist ...en Instrumenten zu ma-

$$\alpha' = \alpha = \quad 1$$

$$\beta' = \beta = -1$$ ...nkels z zu machen,

und wir können die Coefficienten $\alpha'_{(1)}$, $\beta'_{(1)}$ in den au... ...en Sorgfalt, so
sich beziehenden Zeichen leicht aus den Coefficienten $\alpha_{(1)}$ ... t seyn wird
alten Zeichen berechnen. Man findet so folgende Zeichen für ... gewisse
Flächen des Kupfervitriols: ...anzen

$$i = |a_s : \tfrac{1}{3}b_s : c| \qquad x = |a'_s : b_s : c|$$

$$P = |a_s : b'_s : c| \qquad z = |a'_s : \tfrac{1}{3}b_s : c|$$

$$k = |a'_s : b'_s : c| \qquad u = |a'_s : \tfrac{1}{3}b'_s : c|$$

$$s = |a'_s : \tfrac{1}{3}b_s : c| \qquad y = |a_s : \tfrac{1}{3}b'_s : c|$$

$$M = |a_s : b_s : \infty c| \qquad n = |a_s : \infty b_s : \infty c|$$

$$T = |a_s : b'_s : \infty c| \qquad r = |\infty a_s : b_s : \infty c|.$$

VIERTES KAPITEL.

Von der Messung der Krystallwinkel.

Wenn man die Winkel der Krystalle mit Genauigkeit erforschen will, so muss man hauptsächlich zwei Dinge beachten: eine gute Wahl der Instrumente und Wegräumung der aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und aus anderen unbestimmbaren Ursachen entspringenden Fehler. Wir wollen uns erst mit den Methoden beschäftigen, welche man anwenden kann, um die Resultate soviel als möglich von den Beobachtungsfehlern zu reinigen, und dann zu den Instrumenten übergehen, die ein eignes Studium verdienen.

Von den Beobachtungsfehlern, die aus der Unvollkommenheit unserer Sinne entspringen, und den Mitteln, sie so viel als möglich aus den Resultaten verschwinden zu machen.

Das Gesetz, welchem die Fehler unserer Sinne unterworfen sind, ist uns unbekannt; aber es ist gewiss, dass es deren positive und negative, grosse und kleine giebt. Man kann also erwarten, dass, wenn man mehrere Beobachtungen macht, ihr mittleres Resultat genauer seyn wird, als die meisten der einzelnen Beobachtungen. Die grössten Mathematiker unserer Zeit haben sich mit diesem Gegenstande beschäftigt, der von einer so grossen Wichtigkeit für die physikalischen Wissenschaften, aber insbesondere für die Astronomie ist. Ich benutze die Arbeiten dieser Männer, insbesondere die von Laplace, um eine Methode zu entwickeln, welche geschickt

ist, die genauesten Resultate aus den Beobachtungen zu ziehen, die wir bald mit den zur Messung der Krystallwinkel bestimmten Instrumenten zu machen lernen werden.

Wenn man sich vornimmt, s Beobachtungen des Winkels x zu machen, mit demselben Instrument, auf dieselbe Art und mit derselben Sorgfalt, so kann man im Allgemeinem annehmen, dass es eben so leicht seyn wird negative Fehler zu machen, als positive, und dass diese Fehler eine gewisse Grösse a nicht übersteigen werden, so dass sie innerhalb der Grenzen $+ a$ und $- a$ bleiben werden.

Wenn man also alle Beobachtungen zusammenaddirt und ihre Summe durch ihre Anzahl s dividirt, so ist klar, dass das Resultat desto genauer ausfallen wird, je grösser die Anzahl s der Beobachtungen ist, weil die Annahme einer gleichen Möglichkeit der positiven und negativen Fehler bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen zulässiger ist, als bei einer kleinen. Wirklich hat Laplace durch eine feine Analyse bewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers u im Resultat gleich ist:

$$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{ks}{k''\pi}} \cdot \int du \cdot e^{-\frac{ku^2s}{4k''.a^2}}.$$

Hier ist $k = 2\int dx\varphi(x)$; $k'' = \int x^2 dx\varphi(x)$; $\varphi(x)$ drückt die Probabilität des Fehlers x aus, und e ist die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist.

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit u, und nimmt das Integral derselben von $u = o$ bis $u = \infty$, so bekommt man den positiven mittleren Fehler, der im Resultat zu fürchten ist, nämlich:

$$a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Der negative mittlere Fehler ist eben so gross, nur mit dem entgegengesetzten Zeichen. Sie sind also desto grösser, je kleiner s ist.

Man sieht hieaus ein, wie gross der Nutzen der Repitionskreise ist, mit denen man leicht einen Winkel, so oft man will, beobachten kann.

Wir wollen annehmen, man habe irgend einen Winkel n Male mit einem Repetitionskreise gemessen; es seyen s_1, s_2, s_3, s_4 .... s_n die Anzahl der Repetitionen, die man bei jeder Messung gemacht hat; es seyen α_1, α_2, α_3, α_4 .... α_n die Werthe des Winkels, die die n Messungen gegeben haben. Macht man $a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}} = b$, so ist der mittlere im Werthe α_1 des Winkels zu fürchtende Fehler gleich $\mp \frac{b}{\sqrt{s_1}}$, der im Werthe α_2 zu fürchtende mittlere Fehler gleich $\pm \frac{b}{\sqrt{s_2}}$ und so fort. Es sey jetzt y der wahre Werth des Winkels, so haben wir folgende Gleichungen, die nur in so fern von der Wahrheit abweichen, als sich nicht immer im Resultat der einzelnen Messungen grade der mittlere zu fürchtende Fehler, einstellen wird:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \mp \frac{b}{\sqrt{s_1}} &= y \\
\alpha_2 \mp \frac{b}{\sqrt{s_2}} &= y \\
\alpha_3 \pm \frac{b}{\sqrt{s_3}} &= y \quad \ldots\ldots (1) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_n \mp \frac{b}{\sqrt{s_n}} &= y.
\end{aligned}$$

Die mittleren zu fürchtenden Fehler sind uns unbekannt, da b uns unbekannt ist; es kommt also darauf an, diese verschiedenen Werthe von y so zu combiniren, dass die Summe der mittleren Fehler gleich Null oder wenigstens sehr klein werde.

Das einfachste Mittel, die mittleren Fehler aus der Summe des gefundenen Werthes von y verschwinden zu machen, ist, sie in allen diesen

Gleichungen gleich zu machen; da wir angenommen haben, es sey eben so leicht einen negativen Fehler zu machen, als einen positiven, so ist es sehr wahrscheinlich, dass die Anzahl der mittleren negativen Fehler der Anzahl der mittleren positiven Fehler gleich seyn werde. Wir wollen also jede Gleichung mit dem Nenner des Bruchs multipliciren, welcher den mittleren Fehler ausdrückt, so wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{s_1} \cdot \alpha_1 \mp b &= \sqrt{s_1} \cdot y \\
\sqrt{s_2} \cdot \alpha_2 \mp b &= \sqrt{s_2} \cdot y \\
\sqrt{s_3} \cdot \alpha_3 \mp b &= \sqrt{s_3} \cdot y \quad \cdots\cdots \quad (2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sqrt{s_n} \cdot \alpha_n \mp b &= \sqrt{s_n} \cdot y.
\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen, indem man die Summe der Fehler gleich Null setzt, so bekommt man:

$$y = \frac{\sqrt{s_1} \cdot \alpha_1 + \sqrt{s_2} \cdot \alpha_2 + \sqrt{s_3} \cdot \alpha_3 + \cdots + \sqrt{s_n} \cdot \alpha_n}{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} + \cdots + \sqrt{s_n}}.$$

Das zweite Glied dieser Gleichung wollen wir so bezeichnen:

$$\frac{S \cdot \sqrt{s_n} \cdot \alpha_n}{S \cdot \sqrt{s_n}}.$$

In diesen Gleichungen haben wir bloss auf die mittleren Fehler Rücksicht genommen, und wir haben sie in den Gleichungen (2) einander gleich gemacht; jetzt wollen wir ganz allgemein annehmen, dass die Fehler in den Gleichungen (2) ε_1, ε_2, ε_3, $\varepsilon_4 \cdots\cdots \varepsilon_n$ seyen, welche Grössen positiv und negativ seyn können, wir wollen zugleich p_1 für $\sqrt{s_1}$, p_2 für $\sqrt{s_2}$, p_3 für $\sqrt{s_3}$ etc. setzen, und wir werden folgende Gleichungen haben:

$$p_1\alpha_1 + \varepsilon_1 = p_1\gamma$$
$$p_2\alpha_2 + \varepsilon_2 = p_2\gamma$$
$$p_3\alpha_3 + \varepsilon_3 = p_3\gamma \cdots\cdots (3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n\alpha_n + \varepsilon_n = p_n\gamma.$$

In allen diesen Gleichungen sind die mittleren zu fürchtenden Fehler einander gleich, das heisst, sie sind alle von gleichem Werthe in Rücksicht auf die Genauigkeit der Beobachtung, ohne dass man jedoch vorausgesetzt hätte, dass sich grade der mittlere zu fürchtende Fehler in den Resultaten einstellen wird. Wir können nicht hoffen, dass die Summe der Fehler gleich Null seyn werde; aber man kann ein System von Factoren m_1, m_2, m_3, m_4 $\cdots\cdots$ m_n annehmen, so dass

$$m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + m_4\varepsilon_4 + \cdots\cdots + m_n\varepsilon_n$$

eine so geringe Grösse ist, dass man sie vernachlässigen kann. Wir wollen also die Gleichungen (3) auf folgende Weise transformiren:

$$m_1p_1\alpha_1 + m_1\varepsilon_1 = m_1p_1\gamma$$
$$m_2p_2\alpha_2 + m_2\varepsilon_2 = m_2p_2\gamma$$
$$m_3p_3\alpha_3 + m_3\varepsilon_3 = m_3p_3\gamma \cdots\cdots (4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_np_n\alpha_n + m_n\varepsilon_n = m_np_n\gamma.$$

Wenn man hierin

$$m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + \cdots\cdots = m_n\varepsilon_n = o$$

macht, so findet man:

$$\gamma = \frac{m_1p_1\alpha_1 + m_2p_2\alpha_2 + m_3p_3\alpha_3 + \cdots\cdots + m_np_n\alpha_n}{m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 + \cdots\cdots m_np_n}.$$

Laplace hat uns gezeigt, dass der mittlere zu fürchtende Fehler in diesem Resultat gleich

$$\mp a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}} \cdot \frac{\sqrt{S \cdot m^2{}_n}}{S \cdot m_n p_n} \text{ *)}$$

sey; und dass dieser Ausdruck zu einem Minimum wird, wenn $m_1 = \mu p_1$, $m_2 = \mu p_2$, $m_3 = \mu p_3$, ..., $m_n = \mu p_n$ wird, wo μ eine constante Grösse ist.

Der genaueste Werth von y ist also:

$$y = \frac{S \cdot p^2{}_n \cdot \gamma_n}{S \cdot p_n}.$$

Der mittlere in diesem Resultat zu fürchtende Fehler ist:

$$a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S \cdot p^2{}_n}}$$

und die Probabilität eines Fehlers u im Resultat

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{\sqrt{S \cdot p^2{}_n}}{\sqrt{k''\pi}} \cdot \int du \cdot e^{-\frac{ku^2}{4k''a^2} \cdot S \cdot p^2{}_n}.$$

Diese Methode, die man die vortheilhafteste nennen kann, kann vorzüglich in dem Fall angewendet werden, wo man den Winkel, den man sucht, nicht unmittelbar gemessen hat, sondern mehrere andere Winkel, welche auf eine bekannte Weise vom gesuchten Winkel abhängen. Wir wollen erst annehmen, dass die beobachteten Grössen lineäre Functionen der gesuchten Grösse z seyen, so dass

---

*) Die Probabilität eines Fehlers u in diesem Resultat ist:

$$\frac{S \cdot m_n p_n}{2a\sqrt{\frac{k'\pi}{k} \cdot S \cdot m^2{}_n}} \cdot \int du \cdot e^{-\frac{ku^2}{4k''a^2} \cdot \frac{(S \cdot m_n p_n)^2}{S \cdot m^2{}_n}}.$$

$$\begin{aligned} p_1 z + a_1 - A_1 &= \varepsilon_1 \\ p_2 z + a_2 - A_2 &= \varepsilon_2 \\ p_3 z + a_3 - A_3 &= \varepsilon_3 \quad \cdots\cdots (5) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ p_n z + a_n - A_n &= \varepsilon_n \end{aligned}$$

worin a_1, a_2, a_3, a_4 .... a_n bekannte constante Grössen sind.

Wir wollen jetzt jede dieser Gleichungen mit sich selbst multipliciren, um die Quadrate der Fehler ε_1, ε_2, ε .... ε_n zu bekommen. Setzen wir das Differential der Summe der Quadrate der Fehler gleich Null, so erhalten wir den Werth von z, die diese Summe zum Minimum macht, nämlich

$$z = \frac{S \cdot p_n \cdot A_n - S \cdot p_n \cdot a_n}{S \cdot p^2_n}.$$

Diesen Werth der gesuchten Grösse hätte uns auch die Anwendung der vorhergehenden Methode gegeben. Man nennt diese Combinationsmethode, deren Erfinder Gauss und Legendre sind, die Methode der kleinsten Quadrate.

Es ist schon lange her, dass man sich einer grossen Anzahl von Beobachtungen bedient, um durch ihre Combination den Werth einer gesnchten Grösse mit grösserer Genauigkeit zu bestimmen. Die gewöhnlichste Combinationsmethode war diejenige, dass man die Werthe der gesuchten Grösse z aus den beobachteten Grössen A_1, A_2, A_3 .... A_n berechnete, diese Werthe zusammenaddirte und ihre Summe durch ihre Anzahl n dividirte. Aber es ist klar, dass ein Fehler in der Beobachtung von A_1 nicht denselben Einfluss auf den Werth von z, den man aus A_1 berechnet,

haben kann, als ein Fehler in der Beobachtung von A_2, und so mit allen übrigen; folglich können die negativen und positiven Fehler nicht gleichmässig in den berechneten Werthen von z vertheilt seyn, welches nothwendig ist, damit es wahrscheinlich werde, dass sie sich gegenseitig aufheben. Man kann diesem Uebelstand auf folgende Weise abhelfen.

Es seyen y_1, y_2, y_3, y_4 etc. die beobachteten Grössen; sie seyen Functionen der gesuchten Grösse z, die wir so bezeichnen wollen, dass

$$\varphi' z = y_1, \quad \varphi'' z = y_2, \quad \varphi''' z = y_3 \text{ etc.}$$

Es seyen z_1, z_2, z_3 etc. die Werthe von z, die man durch Rechnung aus den Beobachtungen von y_1, y_2, y_3 etc. gefunden hat. Wir können die Fehler in den Beobachtungen als Aenderungen von y_1, y_2, y_3 etc. ansehen, die gleichfalls Aenderungen in dem Werthe von z hervorbringen; und da diese Aenderungen sehr klein sind, so kann man sie für Differentiale dieser Grössen nehmen. Es ist leicht zu berechnen, welche Aenderung in dem Werthe von z ein Fehler in den Beobachtungen von y_1, y_2, y_3 etc. hervorbringen wird; man braucht nur die obigen Gleichungen zu differentiiren und die Differentialverhältnisse $\frac{dy_1}{dz}$, $\frac{dy_2}{dz}$, $\frac{dy_3}{dz}$ etc. zu finden; die in den berechneten Werthen von z durch Fehler in den Beobachtungen von y_1, y_2, y_3 etc. hervorgebrachten Fehler werden desto grösser seyn, je kleiner die Differentialverhältnisse sind, und umgekehrt. Um also eine gleichmässige Vertheilung der Fehler in den berechneten Werthen von z zu erhalten, muss man sie mit ihren respectiven Differentialverhältnissen multipliciren; die Summe dieser Producte, durch die Summe der Differentialverhältnisse dividirt, wird den gesuchten Werth von z viel genauer geben, als wenn man diese Operation unterlässt.

Will man diese Methode auf die Gleichungen (5) anwenden, so hat man nur die Gleichungen zusammen zu addiren und ihre Summe durch die Summe der Coefficienten zu dividiren: denn es ist $\frac{dA_1}{dz} = p_1$, $\frac{dA_2}{dz} = p_2$, $\frac{dA_3}{dz} = p_3$ etc.

Man kann indessen, wie wir oben gesehen haben, eine noch grössere Genauigkeit erlangen, wenn man die Gleichungen:

$$\frac{d\varphi' z}{dz} \cdot z_1 = \frac{d\varphi' z}{dz} \cdot z$$
$$\frac{d\varphi'' z}{dz} \cdot z_2 = \frac{d\varphi'' z}{dz} \cdot z$$
$$\frac{d\varphi''' z}{dz} \cdot z_3 = \frac{d\varphi''' z}{dz} \cdot z$$
$$\text{etc.},$$

in welchen, durch die Multiplication der berechneten Werthe von z mit ihren respectiven Differentialverhältnissen, die Fehler eine gleichmässige Vertheilung bekommen haben, nach der Methode der kleinsten Quadrate combinirt, dass heisst, jede Gleichung mit ihrem Coefficienten multiplicirt.

Man bekommt so als den genauesten Werth von z:

$$z = \frac{\left(\frac{d\varphi' z}{dz}\right)^2 \cdot z_1 + \left(\frac{d\varphi'' z}{dz}\right)^2 \cdot z_2 + \left(\frac{d\varphi''' z}{dz}\right)^2 \cdot z_3 + \text{etc.}}{\left(\frac{d\varphi' z}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'' z}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''' z}{dz}\right)^2 + \text{etc.}}$$

Jetzt bleibt uns noch übrig, das Vertrauen zu bestimmen, welches die durch diese Methoden gewonnenen Resultate verdienen.

Wir wollen, wie oben, annehmen, man habe mehrere Grössen A_1, A_2, A_3 .... A_n, welche die gesuchte Grösse z enthalten, beobachtet, so dass wir folgende Gleichungen zu combiniren haben:

$$p_1 z - A_1 + \varepsilon_1 = o$$
$$p_2 z - A_2 + \varepsilon_2 = o$$
$$p_3 z - A_3 + \varepsilon_3 = o$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n z - A_n + \varepsilon_n = o;$$

ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 $\cdots$ ε_n stellen die Beobachtungsfehler vor, wie der Zufall sie hervorgebracht hat, sowohl positive als negative, und nicht die Grösse a übersteigend. Laplace hat bewiesen, dass der wahrscheinlichste Werth der Summe der Quadrate der Fehler folgender ist:

$$2 \cdot \frac{k''}{k} \cdot a^2 \cdot n.$$

Wir wollen die Summe der Quadrate der Fehler mit $S \cdot \varepsilon_n$ bezeichnen; wir haben dann mit der grössten Wahrscheinlichkeit, mit einer Wahrscheinlichkeit, die mit der Anzahl der Beobachtungen steigt:

$$2a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \sqrt{\frac{2S \cdot \varepsilon^2_n}{n}}.$$

Die Probabilität eines Fehlers u im Werthe von z, Werth, welchen man durch die Combination der vorhergehenden Gleichungen gefunden hat, nachdem man sie mit irgend einem System von Factoren, welche die Summe der Fehler sehr klein machen, multiplicirt hat, ist also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{S \cdot m_n \cdot p_n}{\sqrt{\frac{2S \cdot \varepsilon^2_n}{n} \cdot \pi \cdot Sm^2_n}} \cdot \int du \cdot e^{-\frac{u^2 n \cdot (S \cdot m_n \cdot p_n)^2}{2S \cdot \varepsilon^2_n \cdot S \cdot m^2_n}}$$

Wir bekommen die Probabilität eines Fehlers u im Resultat der nach der Methode der kleinsten Quadrate combinirten Gleichungen, wenn wir

$m_1 = p_1$, $m_2 = p_2$, $m_3 = p_3$ etc. machen, welches folgenden Ausdruck giebt:

$$\sqrt{\frac{n \cdot S \cdot p^2{}_n}{2S \cdot \varepsilon^2{}_n}} \cdot \int du \cdot e^{-\frac{u^2 \cdot n}{2S \cdot \varepsilon^2{}_n} \cdot S \cdot p^2{}_n}$$

Man sieht aus dieser Formel, dass das Vertrauen, welches das Resultat verdient, desto grösser ist, je grösser der Factor $\frac{n \cdot S \cdot p^2{}_n}{2S \cdot \varepsilon^2{}_n}$ ist, deshalb nennt man diesen Factor das Gewicht des Resultats; wir wollen ihn mit P bezeichnen. Alsdann ist die Probabilität, dass der Fehler des Resultats innerhalb der Grenzen $+U$ und $-U$ bleiben werde, gleich

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int du \cdot e^{-Pu^2}$$

das Integral von $u = -U$ bis $u = +U$ genommen.

Dieses Integral ist gleich

$$\frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(U - \frac{P \cdot U^3}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{P^2 U^5}{5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{P^3 U^7}{7} + \text{etc.}\right)$$

oder

$$\frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \cdot U \cdot e^{-PU^2} \cdot \left(1 + \frac{2PU^2}{1 \cdot 3} + \frac{(2PU^2)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{(2PU^2)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{etc.}\right).$$

Diese Reihen convergiren immer am Ende, aber in Gliedern, die vom ersten sehr entfernt sind, wenn $2PU^2$ nicht gleich oder kleiner als 4 ist.

Für grössere Werthe von PU^2 kann man von der folgenden Reihe Gebrauch machen, welche das Integral von $u = U$ bis $u = \infty$ giebt:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-PU^2}}{2U\sqrt{P}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2PU^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2PU^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2PU^2)^3} + \text{etc.}\right).$$

Wenn man diese Reihe von $\frac{1}{2}$, dem Werthe des Integrals von $u = o$ bis $U = \infty$, abzieht, so hat man das Integral, von $u = o$ bis $u = U$ genommen, oder die Hälfte des Integrals von $u = -U$ bis $u = +U$.

Diese Reihe ist sehr convergirend, wenn $2PU^2$ gross ist, aber sie divergirt am Ende. Man bedient sich deshalb mit grösserem Vortheil des continuirlichen Bruchs, den Laplace in dem Werke angegeben hat, aus dem wir bisher geschöpft haben, nämlich in seiner Théorie analytique des probabilités pag. 104. Dieser Bruch giebt das vollständige Integral von $u = -U$ bis $u = +U$ genommen oder die Probabilität, dass der Fehler des Resultats die Grenzen $+U$ und $-U$ nicht übersteigen werde, gleich

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{E}{UVP} \cdot \cfrac{-PU^2}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

wobei $q = \frac{1}{2PU^2}$.

Dieser Bruch kann bis ins Unendliche ausgedehnt werden, und nimmt nach einander, wenn man ihn immer weiter und weiter abbricht, folgende Werthe an:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1+q}, \quad \frac{1+2q}{1+3q}, \quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2}, \quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2}, \quad \text{etc.}$$

Der Zähler des i^{ten} Bruchs ist gleich der Summe des Zählers des $(i-1)^{\text{ten}}$ Bruchs, und des mit $(i-1)\,q$ multiplicirten Zählers des $(i-2)^{\text{ten}}$ Bruchs; und so verhält es sich auch mit den Nennern.

Wir haben bis jetzt angenommen, dass die Beobachtungen mit demselben Instrument und mit derselben Sorgfalt gemacht seyen. Aber da diese Bedingungen, besonders die letztere, selten erfüllt werden, so wird es nöthig seyn, ein Verfahren zu finden, wie man diese Ungleichheiten, welche einen bedeutenden Einfluss auf die Genauigkeit des Resultats ausüben müssen, mit in Rechnung bringen könne. Wir wollen mit der grössten All-

gemeinheit den Gang bezeichnen, den in diesem Fall die Rechnung nehmen muss, damit aus einer gewissen Anzahl von Beobachtungen der möglichst genaueste Werth der gesuchten Grösse hervorgehe.

Es sey A ein Winkel, den man mit n Repetitions-Kreisen gemessen hat; die gefundenen Werthe dieses Winkels seyen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n$ und die Zahl der Repetitionen, die man bei jeder Messung gemacht hat, $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots\ldots s_n$. Der im Resultat der ersten Messung zu fürchtende mittlere Fehler ist nach dem Vorhergehenden

$$\mp \sqrt{\frac{E_1}{2s_1\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s_1}} = \frac{1}{s_1}\sqrt{\frac{E_1}{2\pi}};$$

der im Resultat der zweiten Messung zu fürchtende Fehler ist

$$\mp \frac{1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{E_2}{2\pi}}$$

und so fort: $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_n$ bedeuten die Summe der Quadrate der Fehler der einzelnen Beobachtungen; man berechnet diese Grössen, indem man das mittlere Resultat jeder Messung von jeder einzelnen Beobachtung abzieht, diese Differenzen ins Quadrat erhebt, und zusammenaddirt. Wir haben also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \mp \frac{1}{s_1}\sqrt{\frac{E_1}{2\pi}} &= A \\
\alpha_2 \mp \frac{1}{s_2}\sqrt{\frac{E_2}{2\pi}} &= A \\
\alpha_3 \mp \frac{1}{s_2}\sqrt{\frac{E_3}{2\pi}} &= A \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_n \mp \frac{1}{s_n}\sqrt{\frac{E_n}{2\pi}} &= A
\end{aligned}$$

Um auf diese Gleichungen die vortheilhafteste Methode mit Nutzen anwenden zu können, muss man eine gleichmässige Vertheilung der Fehler

hervorzubringen suchen. Zu diesem Ende wollen wir jede Gleichung mit ihrem mittleren Fehler dividiren:

$$\begin{aligned}
s_1 \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_1}} \cdot \alpha_1 \mp 1 &= s_1 \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_1}} \cdot A \\
s_2 \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_2}} \cdot \alpha_2 \mp 1 &= s_2 \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_2}} \cdot A \\
s_3 \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_3}} \cdot \alpha_3 \mp 1 &= s_3 \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_3}} \cdot A \ldots\ldots (D) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_n}} \cdot \alpha_n \mp 1 &= s_n \cdot \sqrt{\tfrac{2\pi}{E_n}} \cdot A
\end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate combinirt, so erhält man folgenden Werth von A, als den genauesten, den man aus den Beobachtungen ziehen kann:

$$A_1 = \frac{\frac{s_1^2}{E_1} \cdot \alpha_1 + \frac{s_2^2}{E_2} \cdot \alpha_2 + \frac{s_3^2}{E_3} \cdot \alpha_3 + \ldots + \frac{s_n^2}{E_n} \alpha_n}{S \cdot \frac{s_n^2}{E_n}}$$

Aber wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass $\frac{s_1^2}{E_1}$, $\frac{s_2^2}{E_2}$, $\frac{s_3^2}{E_3}$ etc. die Gewichte der Werthe von A sind, welche wir mit P_1, P_2, P_3 . . . . . P_n bezeichnen wollen. Also:

$$A_1 = \frac{P_1 \alpha_1 + P_2 \cdot \alpha_2 + P_3 \cdot \alpha_3 + \ldots + P_n \cdot \alpha_n}{S \cdot P_n}$$

Man findet auf dieselbe Weise den genauesten Werth B_1 eines Winkels B, welchen man mit p Repetitionskreisen gemessen hat, welche nacheinander für diesen Winkel die Werthe β_1, β_2, β_3, ... β_p gegeben haben. Bezeichnet man mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ... Q_p die respectiven Gewichte der p Messungen, so ist

$$B_1 = \frac{Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2 + Q_3 \beta_3 + \ldots + Q_p \beta_p}{S \cdot Q_p}$$

Man kann eben so die Gewichte der Werthe A_1 und B_1 bestimmen,

wie man die Gewichte der Werthe α_1, α_2, α_3 .... α_n und β_1, β_2 β_3 .... β_p der Winkel A und B bestimmt hat. Um das Gewicht von A_1 zu bekommen, verfährt man auf folgende Weise: Wenn man in den Gleichungen (D) nachdem man π, welches in allen Gliedern vorkommt, weggestrichen, P_1, P_2, P_3, P_4 .... P_n für $\frac{s_1^2}{2E_1}$, $\frac{s_2^2}{2E_2}$, $\frac{s_3^2}{2E_3}$ ..... $\frac{s_n^2}{2E_n}$, und ε_1, ε_2, ε_3 .... ε_n für $\mp$ 1 setzt, aus den schon oben angeführten Gründen, so bekommen sie folgende Gestalt:

$$\sqrt{P_1} \cdot \alpha_1 - \sqrt{P_1} \cdot A = \varepsilon_1$$
$$\sqrt{P_2} \cdot \alpha_2 - \sqrt{P_2} \cdot A = \varepsilon_2$$
$$\sqrt{P_3} \cdot \alpha_3 - \sqrt{P_3} \cdot A = \varepsilon_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt{P_n} \cdot \alpha_n - \sqrt{P_n} \cdot A = \varepsilon_n$$

Nun ist aber das Gewicht eines Resultats, gleich der Summe der Quadrate der Coefficienten der gesuchten Grösse in den Gleichungen, aus deren Combination das Resultat hervorgegangen ist, multiplicirt mit der Anzahl der Gleichungen, dividirt durch die doppelte Summe der Quadrate der Fehler, das heisst durch 2 $(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots . \varepsilon_n^2)$. Bezeichnet man also das Gewicht des Resultats aus diesen Gleichungen, oder das Gewicht von A_1, mit P', so ist

$$P' = \frac{n\,(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots P_n)}{2\,[P_1\,(\alpha_1 - A_1)^2 + P_2\,(\alpha_2 - A_1)^2 + \ldots\ldots + P_n\,(\alpha_n - A_1)^2]}$$

Man findet auf eine ähnliche Weise das Gewicht des Resultats B_1

$$Q' = \frac{p\,(Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots . + Qp)}{2\,[Q_1\,(\beta_1 - B_1)^2 + Q_2\,(\beta_2 - B_1)^2 + \ldots . + Q_p\,(\beta_p - B_1)^2]}$$

Es sey jetzt A eine bekannte Function von B; es sey A_2 der Werth

von A, den man aus dem genauesten Werthe von B berechnet hat: dann wird die Combination der beiden Gleichungen

$$A = A_1$$
$$A = A_2$$

einen genauern Werth von A geben, als jede für sich.

Wenn $P' = Q'$ wäre, so brauchte man nur diese Gleichungen mit ihren respectiven Differentialverhältnissen zu multipliciren, um eine gleichmässige Vertheilung der Fehler hervorzubringen. Aber wenn dies nicht der Fall ist, so muss man noch jede der Gleichungen mit einer Grösse multipliciren, die sich umgekehrt verhält, als der mittlere in A_1 und B_1 zu fürchtende Fehler. Diese Grösse ist $\sqrt{P'}$ für die erste, und $\sqrt{Q'}$ für die zweite Gleichung. Wir werden also haben:

$$1 \cdot \sqrt{P'} \cdot A = 1 \sqrt{P'} \cdot A_1$$
$$\frac{dB}{dA} \cdot \sqrt{Q'} \cdot A = \frac{dB}{dA} \cdot \sqrt{Q'} \cdot A_2$$

Combinirt man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so bekommt als den genauesten Werth des Winkels A

$$A_1 = \frac{1 \cdot P' A_1 + \left(\frac{dB}{dA}\right)^2 Q' \cdot A_2}{1 \cdot P' + \left(\frac{dB}{dA}\right)^2 \cdot Q'}$$

Dieses Verfahren ist leicht auf mehrere Winkel anwendbar. Man habe auf verschiedene Art m Winkel A, B, C, D etc. gemessen; es seyen A_1, B_1, C_1, D_1 etc. ihre aus den Beobachtungen hervorgehenden Werthe; es seyen P', Q', R', S' etc. die Gewichte dieser Werthe; es seyen ferner A_2, A_3, A_4 etc. die Werthe von A, die man aus den Winkeln B_1, C_1, D_1 etc. berechnet hat; man findet dann als den genauesten Werth von A

$$A_x = \frac{1 \cdot P' \cdot A_1 + \left(\frac{dB}{dA}\right)^2 Q' \cdot A_2 + \left(\frac{dC}{dA}\right)^2 R' \cdot A_3 + \left(\frac{dD}{dA}\right)^2 S' \cdot A_4 + \text{etc.}}{1 \cdot P' + \left(\frac{dB}{dA}\right)^2 Q' \cdot + \left(\frac{dC}{dA}\right)^2 R' + \left(\frac{dD}{dA}\right)^2 S' + \text{etc.}}$$

Man findet eben so leicht das Gewicht P'' dieses Werthes von A

$$P'' = \frac{m\left[1 \cdot P' + \left(\frac{dB}{dA}\right)^2 Q' + \left(\frac{dC}{dA}\right)_2 R' + \left(\frac{dD}{dA}\right)^2 \cdot S' + \text{etc.}\right]}{2\left[1 \cdot P'(A_1 - A_x)^2 + \left(\frac{dB}{dA}\right)^2 \cdot Q'(A_2 - A_x)^2 + \left(\frac{dC}{dA}\right)^2 R'(A_3 - A_x)^2 + \text{etc.}\right]}$$

Wir haben schon oben gesehen, wie man aus P'' die Probalität berechnet, dass der Fehler von A_x die Grenzen $\mp U$ nicht übersteigen werde.

Um das eben Entwickelte durch ein Beispiel deutlich zu machen, wollen wir einige Messungen von drei verschiedenen Winkeln an einem Quarzkrystall combiniren. Von den Neigungswinkeln der Flächen an den Endkanten der sechsseitigen Pyramide wurden vier gemessen. Der erste wurde fünf Mal gemessen; jede Messung bestand aus 39 Repetitionen; das Gewicht jeder Messung wurde gefunden, indem man das mittlere Resultat derselben von jeder einzelnen Beobachtung (von der Differenz zweier aufeinanderfolgender Ablesungen) abzog, diese Differenzen ins Quadrat erhob, und ihre doppelte Summe in das Quadrat der Anzahl der Repetitionen, d. h. in das Quadrat von 39, dividirte. Die mittleren Resultate dieser fünf Messungen und ihre auf die eben angezeigte Art berechneten Gewichte waren folgende:

46°	— 15′,4	dessen Gewicht	2,786
46	— 15,0	— —	3,503
46	— 15,1	— —	3,833
46	— 15,0	— —	3,920
46	— 15,2	— —	2,670

Um das genaueste Resultat aus diesen fünf Beobachtungen zu ziehen, multiplicirt man jeden einzelnen Werth mit seinem Gewicht, und dividirt die Summe dieser Producte durch die Summe der Gewichte. Man bekommt auf diese Art folgenden Winkel:

$$46° — 15',12$$

Das Gewicht dieses Resultats wird gefunden, indem man den eben gefundenen Winkel von jedem der obigen fünf abzieht, die Differenzen ins Quadrat erhebt, ihre doppelte Summe nimmt, und diese Grösse in die mit 5 multiplicirte Summe der Gewichte dividirt. Man findet auf diese Art das Gewicht des Resultats gleich

$$123,61$$

Der zweite Winkel an der Endkante der sechsseitigen Pyramide wurde auch fünf Mal gemessen, jede Messung zu 39 Repetitionen, und man erhielt folgende Resultate:

46°	— 17′,0	dessen Gewicht	3,410
46	— 16,4	— —	4,619
46	— 17,0	— —	3,030
46	— 16,0	— —	2,050
46	— 16,0	— —	12,675

Das genaueste Resultat aus diesen fünf Messungen ist

$$46° — 16',32 \text{ dessen Gewicht } 13,481$$

Die beiden letzten Winkel an den Endkanten der sechsseitigen Pyramide sind nur ein Mal gemessen worden, jede Messung wieder zu 39 Repetitionen. Man fand

46° — 16′,3 dessen Gewicht 6,494
46 — 17,3 — — 9,613

Von den Neigungswinkeln der abwechselnden Pyramidenflächen wurden ebenfalls vier gemessen. Der erste Winkel wurde vier Mal gemessen, jede Messung zu 42 Repetitionen. Man fand folgende vier Werthe des Winkels:

85° — 45′,0 dessen Gewicht 4,388
85 — 44,9 — — 5,599
85 — 45,2 — — 3,215
85 — 44,4 — — 6,567

Diese geben, nach der obigen Art combinirt, folgenden genauesten Werth des Winkels:

85° — 44′,80 dessen Gewicht 39,201

Die drei andern Winkel wurden jeder nur einmal gemessen, jede Messung wieder zu 42 Repetitionen. Die mittleren Resultate aus diesen drei Messungen waren

85° — 45′,4 dessen Gewicht 1,845
85 — 45,8 — — 5,049
85 — 45,8 — — 6,397

Jetzt wurden noch zwei von den Neigungswinkeln zweier gegenüberliegenden Pyramidenflächen gemessen: dieser Winkel ist doppelt so gross, als die Neigung der Pyramidenfläche gegen die Axe. Die erste von diesen Winkeln wurde zwei Mal gemessen: die mittleren Resultate von 42 Repetitionen bei der ersten, und 21 bei der zweiten Messung waren:

103° — 35′,0 dessen Gewicht 4,028

103 — 34,6 — — 3,116

Die Combination dieser beiden Werthe giebt als den genauesten Werth des Winkels

103° — 34′,82 dessen Gewicht 25,396

Der zweite Winkel wurde, durch eine Messung von 42 Repetitionen, gefunden:

103° — 35′,6 dessen Gewicht 6,313

Um nun ein Endresultat aus allen diesen Beobachtungen zu ziehen, combinirt man erst die Werthe aller gemessenen Winkel derselben Art. Wir haben für den Neigungswinkel zweier benachbarten Pyramidenflächen folgende Werthe gefunden:

46° — 15′,12 dessen Gewicht 123,611

46 — 16,32 — — 13,482

46 — 16,35 — — 6,494

46 — 17,35 — — 9,613

Diese Werthe geben, nach der bisher befolgten Methode combinirt:

46° — 15′,41 dessen Gewicht 4,827.

Das Gewicht dieses Resultats ist geringer, als das Gewicht jeder einzelnen Messung: dies kommt daher, weil der wahre Werth des Winkels sich von einer Endkante zur andern etwas ändern kann, da hingegen der wahre Werth des Winkels an derselben Kante immer derselbe bleibt. Die Genauigkeit, welche man durch Vervielfältigung der Messungen bei demselben Winkel erlangen kann, ist ohne Grenzen: da man sich hingegen auf das Mittel aus mehreren gemessenen Winkeln derselben Art, an demselben oder

an mehreren Krystallen, nur dann verlassen kann, wenn die wahren Werthe der Winkel nur wenig von einander abweichen, oder wenn der Krystall von der Natur so gebaut ist, dass die Winkel derselben Art, die der Theorie nach einander gleich seyn sollten, einander wirklich sehr nahe gleich sind.

Die Neigung zweier abwechselnden Pyramidenflächen wurde so gefunden:

85° — 44′,8 dessen Gewicht 39,201
85 — 45,4 — — 1,845
85 — 45,8 — — 5,049
85 — 45,8 — — 6,397

Der genaueste aus diesen vier Werthen durch Combination hervorgehende Werth ist

85° — 45′,04 dessen Gewicht 11,500

Zwei gegenüberliegende Flächen neigen sich nach dem Vorhergehenden unter:

103° — 34′,82 dessen Gewicht 25,396
103 — 35,60 — — 6,313

Diese Werthe geben mit einander combinirt

103° — 34′,97 dessen Gewicht 10,306.

Man muss nicht vergessen, dass die angegebenen Winkel die Complemente der gesuchten zu 180° sind. Wenn wir also mit A den Neigungswinkel zweier benachbarten Flächen, mit A' den Winkel zweier abwechselnden Flächen, und mit I den Winkel zweier gegenüberliegenden Flächen der sechsseitigen Quarzpyramide bezeichnen, so ist

$$A' = 133° - 44',59$$
$$A = 94 - 14,96$$
$$I = 76 - 25,03$$

Nun ist aber

$$\cos. \tfrac{1}{2} A' = \sqrt{3} \cos. \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos. \tfrac{1}{2} I = 2 \cos. \tfrac{1}{2} A$$

Berechnet man nach diesen Formeln den Werth von A aus den Werthen von A' und I, so findet man

$$A = 133° - 44',30 \text{ und } A = 133° - 44',02.$$

Man hat also drei Werthe von A

$$A = 133° - 44,59 = 8024',59$$
$$A = 133 - 44,30 = 8024,30$$
$$A = 133 - 44,02 = 8024,02$$

aus deren Combination man einen noch genaueren Werth dieses Winkels ziehen kann. Zu dem Ende berechnet man erst die Werthe von $\frac{dA'}{dA}$ und $\frac{dI}{dA}$ vermöge der Formeln:

$$\frac{dA'}{dA} = \frac{\sqrt{3} \sin. \frac{1}{2} A}{\sin. \frac{1}{2} A'}$$
$$\frac{dI}{dA} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A}{\sin. \frac{1}{2} I};$$

welche aus den obigen Formeln fliessen. Man findet

$$\frac{dA'}{dA} = 2,1739$$
$$\frac{dI}{dA} = 2,9735$$

Jetzt construirt man folgende drei Gleichungen aus den gefundenen Werthen von A, von $\frac{dA}{dA}$, $\frac{dA'}{dA}$ und $\frac{dI}{dA}$, und von den zuletzt berechneten Gewichten der Winkel A, A' und I:

$$1 \cdot 4{,}827 \cdot 8024{,}59 = 1 \cdot 4{,}827 \cdot A$$
$$(2{,}1739)^2 \cdot 11{,}500 \cdot 8024{,}30 = (2{,}1739)^2 \cdot 11{,}500 \cdot A$$
$$(2{,}9735)^2 \cdot 10{,}306 \cdot 8024{,}02 = (2{,}9735)^2 \cdot 10{,}306 \cdot A$$

Wenn man diese drei Gleichungen zusammenaddirt, und den Werth von A eliminirt, so findet man

$$A = 133^\circ - 44',14$$

als den genauesten Werth dieses Winkels, der sich aus den vorhandenen Beobachtungen ziehen lässt.

Um das Gewicht dieses Werthes zu finden, zieht man ihn erst von jedem einzelnen der in den obigen Gleichungen enthaltenen Werthe von A ab; diese Differenzen erhebt man ins Quadrat, multiplicirt sie mit den Coefficienten von A in den obigen Gleichungen, das heisst, mit den respectiven Gewichten und Differentialquotienten, und addirt diese Producte zusammen. Diese mit 2 multiplicirte Summe dividirt man in die mit der Anzahl der Gleichungen, d. h. mit 3, multiplicirte Summe derselben Coefficienten von A in den obigen Gleichungen. Man findet auf diese Weise das Gewicht des zuletzt gefundenen Werthes von A gleich

61,246.

Am Ende dieses Werkes befindet sich eine Tafel, in welcher für gewisse Werthe von P die Probabilität, dass der Fehler des Resultats die Grenzen + 1 und — 1, oder die Grenzen + 0,5 und — 0,5 nicht übersteigen werde, berechnet ist. Der oben angegebene continuirliche Bruch, der diese Probabilität in einer Function von PU^2 giebt, ist den Rechnungen zum Grunde gelegt worden. Das Argument der Tafel ist das Gewicht irgend eines Resultats; mit diesem Argument geht man in die Spalte I

ein, wenn man die Probabilität wissen will, dass der Fehler des Resultats in den Grenzen $\mp$ 1 enthalten sey; man geht in die Spalte II ein, wenn man wissen will, wie gross die Probabilität sey, dass der Fehler des Resultats in den Grenzen $\mp$ 0,5 eingeschlossen sey. Die Spalte III giebt die zugehörige Probabilität, als einen Bruch der Einheit, indem man die Gewissheit $=$ 1 gesetzt hat; die Spalte IV giebt diese Probabilität in einer Zahl an, welche man gegen 1 wetten kann, dass dem so sey; man findet sie, indem man den Bruch in der Spalte III durch die Differenz dieses Bruches und der Einheit dividirt.

Die Zahlen in der Spalte II sind gerade 4 mal so gross als die Zahlen in der Spalte I; man kann noch eine Spalte hinzufügen, in welcher die Zahlen 4 mal so gross sind, als in der Spalte II; geht man mit dem Argument P in diese neue Spalte ein, so giebt die correspondirende Zahl in der Spalte III die Probabilität, dass der Fehler des Resultats in den Grenzen $\mp$ 0,25 enthalten sey. Es ist nämlich klar, dass $PU^2 = q$ seinen Werth nicht ändert, wenn man zugleich U durch 2 dividirt und P mit 4 multiplicirt. Wenn man also ein P hat, das die Zahlen in der Spalte II übersteigt, so braucht man dieses P nur durch 4 zu dividiren, und mit diesem neuen Werth von P in dieselbe Spalte eingehen; die correspondirende Zahl in den Spalten III und IV wird alsdann die Probabilität geben, dass der Fehler des Resultats in den Grenzen $\mp$ 0,25 enthalten sey.

Man ersieht aus dieser Tafel, dass man beinahe 200 gegen 1 wetten kann, dass der zuletzt gefundene Werth des Winkels A, nicht mehr als um $0'',25$ falsch ist: man kann aber mehr als 100000 gegen 1 wetten,

dass der Fehler dieses Resultats in den Grenzen $\mp$ o′,5 eingeschlossen sey.

Wir wollen uns jetzt noch mit dem Fall beschäftigen, wo die Kenntniss zweier Winkel nothwendig ist, um alle übrigen desselben Krystalls zu berechnen; dieser Fall tritt bei denjenigen Krystallformen ein, deren Grundform ein Octaëder mit rhombischer Basis ist. Es seyen an einem solchen Octaëder die Neigungswinkel B, C der Flächen an den Endkanten, die Neigungen r, r' der Endkanten gegen die Axe, die doppelte Neigung I der Flächen gegen die Axe, und der ebene Winkel a an der Spitze des Octaëders gemessen. Diese Stücke hängen durch folgende Gleichungen untereinander zusammen:

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} I = \sin.^2 \tfrac{1}{2} B - \cos.^2 \tfrac{1}{2} C = -\cos. \tfrac{1}{2}(B+C) \cos. \tfrac{1}{2}(B-C)$$

$$\cos. a = \cot. \tfrac{1}{2} B \cot. \tfrac{1}{2} C$$

$$\cot.^2 r' = \frac{\cos.^2 \frac{1}{2} B}{\sin.^2 \frac{1}{2} B - \cos.^2 \frac{1}{2} C} = -\frac{\cos.^2 \frac{1}{2} B}{\cos. \frac{1}{2}(B+C) \cos. \frac{1}{2}(B-C)}$$

$$\cot.^2 r = \frac{\cos.^2 \frac{1}{2} C}{\sin.^2 \frac{1}{2} B - \cos.^2 \frac{1}{2} C} = -\frac{\cos.^2 \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2}(B+C) \cos. \frac{1}{2}(B-C)}.$$

Man findet hieraus:

$$dI = \frac{\sin. B}{\sin. I} dB + \frac{\sin. C}{\sin. I} \cdot dC$$

$$da = \frac{\cot. \frac{1}{2} C}{2 \sin.^2 \frac{1}{2} B} dB + \frac{\cot. \frac{1}{2} B}{2 \sin.^2 \frac{1}{2} C} \cdot dC$$

$$dr = -\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} C \sin. B \sin.^3 r'}{4 \cos. r' \cdot \cos. \frac{1}{2}(B+C) \cos. \frac{1}{2}(B-C)} \cdot dB - \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} B \sin. C \sin.^3 r'}{4 \cos. r' \cdot \cos. \frac{1}{2}(B+C) \cos. \frac{1}{2}(B-C)} \cdot dC$$

$$dr = -\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} C \sin. B \sin.^3 r}{4 \cos. r \cdot \cos. \frac{1}{2}(B+C) \cos. \frac{1}{2}(B-C)} \cdot dB - \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} B \sin. C \sin.^3 r}{4 \cos. r \cdot \cos. \frac{1}{2}(B+C) \cos. \frac{1}{2}(B-C)} \cdot dC$$

Wir nehmen jetzt, wie im Vorhergehenden, an, dass dB, dC die Fehler der beobachteten Werthe von B und C seyen. Es gilt also, diese Fehler aus den übrigen Beobachtungen zu bestimmen. Zu dem Ende berechnet man die Werthe der Winkel I, a, r und r' aus den beobachteten

Werthen von B und C, zieht diese berechneten Werthe von den beobachteten Werthen I, a, r und r' ab, und substituirt diese Differenzen für die Differenziale dI, da, dr und dr' in den vorhergehenden Gleichungen. Es seyen I_1, a_1, r_1 und r'_1 die aus den beobachteten Werthen von B und C berechneten Werthe von I, a r und r'; es seyen P, Q, R, S die Gewichte der beobachteten Winkel I, a, r, r'; wir wollen ferner die Coefficienten von dB in den obigen Gleichungen mit p_1, p_2, p_3, p_4 und die Coefficienten von dC mit q_1, q_2, q_3, q_4 bezeichnen. So können wir folgende Gleichungen entwerfen:

$$\sqrt{P} \cdot (I_1 - I) = \sqrt{P} \cdot p_1 \cdot dB + \sqrt{P} \cdot q_1 \cdot dC$$
$$\sqrt{Q} \cdot (a_1 - a) = \sqrt{Q} \cdot p_2 \cdot dB + \sqrt{Q} \cdot q_2 \cdot dC$$
$$\sqrt{R} \cdot (r_1 - r) = \sqrt{R} \cdot p_3 \cdot dB + \sqrt{R} \cdot q_3 \cdot dC$$
$$\sqrt{S} \cdot (r'_1 - r') = \sqrt{S} \cdot p_4 \cdot dB + \sqrt{S} \cdot q_4 \cdot dC.$$

In diesen Gleichungen sind die Fehler gleichmässig vertheilt, nach den Principien, die wir im Vorhergehenden entwickelt haben. Man kann sie also, so wie sie sind, nach der Methode der kleinsten Quadrate combiniren. Man multiplicirt zu dem Ende erst alle vier Gleichungen, jede mit dem in ihr enthaltenen Coeficienten von dB, und addirt die daraus entstandenen Gleichungen zusammen; dann multiplicirt man jede der obigen Gleichungen mit dem in derselben enthaltenen Coefficienten von dC, und addirt die vier daraus entstandenen neuen Gleichungen wieder znsammen. So erhält man folgende zwei Endgleichungen:

1) $$Pp_1(I_1 - I) + Qp_2(a_1 - a) + Rp_3(r_1 - r) + Sp_4(r'_1 - r')$$
$$= \left(Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2\right) dB + \left(Pq_1p_1 + Qq_2p_2 + Rq_3p_3 + Sq_4p_4\right) dC.$$

2) $P q_1 (I_1 - I) + Q q_2 (a_1 - a) + R q_3 (r_1 - r) + S q_4 (r'_1 - r')$
$= \left(P q_1 p_1 + Q q_2 p_2 + R q_3 p_3 + S q_4 p_4\right) dB + \left(P q_1^2 + Q q_2^2 + R q_3^2 + S q_4^2\right) dC.$

Es ist nicht schwer, aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von dB und dC zu eliminiren; diese Grössen sind aber die Correctionen, welche an den beobachteten Werthen von B und C anzubringen sind, wenn man die genauesten Werthe dieser Grössen haben will; das heisst $B + dB$, $C + dC$ sind die genauesten Werthe von B und C, welche aus der Combination aller Beobachtungen zusammen genommen hervorgehen.

Um das Gewicht der gefundenen Werthe von dB und dC zu finden, verfährt man ungefähr eben so, wie oben. Es sey P_1 das Gewicht des gefundenen Werthes von dB, und P_2 das Gewicht des gefundenen Werthes von dC, so ist:

$$P_1 = \frac{4}{2E} \cdot \frac{(Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2)(Pq_1^2 + Qq_2^2 + Rq_3^2 + Sq_4^2) - (Pp_1q_1 + Qp_2q_2 + Rp_3q_3 + Sp_4q_4)^2}{Pq_1^2 + Qq_2^2 + Rq_3^2 + Sq_4^2}$$

$$P_2 = \frac{4}{2E} \cdot \frac{(Pq_1^2 + Qq_2^2 + Rq_3^2 + Sq_4^2)(Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2) - (Pp_1q_1 + Qp_2q_2 + Rp_3q_3 + Sp_4q_4)^2}{Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2}$$

E bedeutet hier wieder die Summe der Quadrate der Fehler; diese Fehler aber sind die Differenzen der beobachteten Werthe von I, a, r und r', und der durch Rechnung gefundenen Werthe derselben Winkel; dieser Rechnung müssen die genauesten als Resultate der Combination hervorgehenden Werthe von B und C zum Grunde gelegt werden.

Ich überhebe mich hier der Mühe, diese Formeln ordentlich zu entwickeln, weil sie von geringem Gebrauch sind. Man kann überdies diesen Gegenstand in seiner grössten Allgemeinheit aufgefasst finden in Laplace's Theorie der Probabilitäten, und besonders in den Supplementen zu diesem Werke.

Von den Instrumenten, welche dazu dienen, die Neigungswinkel der Krystallflächen zu messen.

Es giebt zwei Methoden, die Neigungswinkel der Krystalle zu messen. Die erste und die einfachste, die aber am wenigsten Genauigkeit zulässt, besteht darin, dass man zwei Lineale an die Flächen legt, deren Winkel man messen will, und den Winkel zwischen den beiden Linealen vermittelst eines in Grade eingetheilten Kreises misst, dessen Mittelpunct mit dem Durchschnittspunct der Lineale zusammenfällt. Nach diesem Princip ist das Carangeausche Goniometer construirt.

Die zweite Methode bedient sich entfernter, von den Krystallflächen als kleine Spiegel reflectirter Gegenstände, um erst der einen Fläche eine bestimmte Lage zu geben; man bringt dann die andere Fläche in dieselbe Lage, und misst den Winkel, um den man den Krystall hat drehen müssen, um dies hervorzubringen. Dieser Winkel ist unter gewissen Bedingungen, die man leicht erfüllen kann, dem Complement des Winkels der beiden Ebenen zu 180° gleich. Die zweite Methode zerfällt in zwei Unterabtheilungen, je nachdem man sich zweier Gegenstände und des blossen Auges, oder eines einzigen Gegenstandes und eines Fernrohrs mit einem Fadenkreuz bedient. Die Instrumente, die für diese Methode construirt sind, heissen Reflexionsgoniometer.

Carangeau's Goniometer.

Das Carangeau'sche Goniometer ist Fig. 196 abgebildet. Es besteht aus einem Halbkreis *MTN*, der in Grade eingetheilt ist. Zwei Alidaden *FG* und *AB*, durchkreuzen sich im Mittelpunct des Kreises: die eine von

ihnen, *FG*, behält immer dieselbe Richtung, kann aber hin und her geschoben werden, und ist zu diesem Zweck der ganzen Länge nach, mit Ausnahme eines kleinen Stücks bei *K*, in der Mitte ausgenommen; sie ist vermittelst der Schraube *R* an den Halbkreis, und vermittelst der Schraube *c* an einem Arme desselben, der, die Richtung eines Radius folgend, bis zum Mittelpunct des Halbkreises geht, befestigt, doch so, dass man sie hin hin und her schieben kann. Die Alidade *AB* ist auch der halben Länge nach, von *c* bis *x*, in der Mitte ausgenommen, damit man sie hin und her schieben könne; etwas über *c*, das heisst etwas über den Mittelpunkt des Halbkreises hinaus, wird sie schmäler, und endigt in ein Lineal, dessen verlängerte Schärfe *zs* grade durch den Mittelpunct des getheilten Kreises geht. Die Alidade *FG* muss mit dem Diameter des Halbkreises, der durch die beiden Puncte geht, wo die Eintheilung 0° und 180° zählt, parallel seyn.

Der getheilte Halbkreis *MTN* ist bei 90° gebrochen, so dass der Arm *TM* vermittelst eines hinten angebrachten Scharniers zurückgelegt werden kann. Um diesem Arm in seiner gewöhnlichen Lage die gehörige Festigkeit zu geben, geht vom Mittelpunct des Halbkreises nach diesem Arm ein stählerner Stab *cO*, der bei *O* hinten vermittelst einer Schraube an den beweglichen Arm des Halbkreises befestigt werden kann; dieser Stab lässt sich um den Mittelpunct *c* drehen und so zurückschlagen, wenn man den Arm zurücklegen will. Die Alidade *AB* ist um den Mittelpunkt des Halbkreises beweglich, die Alidade *FG* dagegen behält immer dieselbe Stellung. Wenn man also einen Krystallwinkel messen will, so legt man erst die eine Fläche an die fixe Alidade *FG*, so dass die Durchschnittslinie der

beiden Krystallebenen ungefähr senkrecht auf die Ebene des getheilten Halbkreises ist. Dann nähert man die zweite Ebene, indem man den Krystall längst der ersten Alidade fortschiebt, der beweglichen Alidade *AB*, bis diese in ihrer ganzen Länge an die Ebene anliegt. Der Winkel, der alsdann von der beweglichen Alidade, nämlich von ihrer Schärfe *zs*, angezeigt wird, ist der Neigungswinkel der Krystallebenen.

Wenn man Winkel von Krystallen messen will, die ansitzen, so dass man nicht gut mit dem Instrument ankommen kann, so verkürzt man die Alidaden, indem man sie längst *uc*, *xc* zurückzieht, und schlägt den Arm *MT* des getheilten Halbkreises zurück; man misst den Winkel, fixirt die bewegliche Alidade vermittelst der Schraube *c*, und bringt nun den zurückgeschlagenen Arm *MT* des eingetheilten Halbkreises wieder in seine gewöhnliche Lage, um den Winkel, der von der Alidade angezeigt wird, ablesen zu können.

Dieses Goniometer ist in allen den Fällen zu gebrauchen, wo keine grosse Genauigkeit nöthig ist, und wo die Krystallflächen nicht spiegelnd genug sind, um die Reflexionsgoniometer anwenden zu können. Wenn man die Winkel der Grundform schon genau kennt, und nur die secundären Formen bestimmen will, so kann es von grossem Nutzen seyn, weil man sehr schnell damit misst.

In Poggendorf's Annalen Bd. 2, St. 1 (oder Jahrgang 1824, St. 9) ist ein Goniometer beschrieben, von Herrn Adelmann erfunden, und vom Grafen v. Bournon beschrieben, das ganz wie das Carangeau'sche Goniometer

eingerichtet ist, mit dem Unterschiede, dass der halbe Kreis von zwei Säulen so getragen wird, dass er nur eine horizontale Bewegung hat, und dass der Krystall auf einem Träger fixirt wird, mit welchem man ihn an die Alidade andrücken, und hierauf in derselben Lage erhalten kann, um die Alidade nun auf die andere Fläche anzulegen;*) alsdann giebt der von ihr durchlaufene Kreis den gesuchten Winkel. Damit die Krystallkante einen rechten Winkel mit der Ebene des Halbkreises mache, ist an der Seite eine horizontale Diopter angebracht, mit welcher die Kante zusammenfallen muss. Uebrigens ist der Halbkreis grösser, die Eintheilung desselben feiner, und ein Nonius erlaubt selbst bis auf Minuten abzulesen: eine, glaube ich, zu weit getriebene Genauigkeit, da die übrigen Beobachtungsfehler leicht bis zu 15′ steigen können, und man deshalb doch nie, selbst bei mehrmaliger Wiederholung und vieler Uebung, der einzelnen Minuten gewiss seyn kann.

Wollaston's Reflexionsgoniometer.

Dieses Instrument ist Fig. 197 abgebildet. Auf einer horizontalen Scheibe *g h*, welche durch die Schrauben *a*, *b*, *c* in die gehörige Lage gebracht werden kann, erheben sich zwei messingene Stäbe *n m*, *l m*, die sich oben aneinander legen und durch ein horizontales Stück *m* mit einander verbunden sind. Das horizontale Stück ist vermittelst zweier Schrauben an die beiden Stäbe befestigt. Dieser Träger ist da, wo das horizontale Stück an die beiden Stäbe grenzt, durchbohrt; ein Cylinder *A*, der den eingetheilten Kreis trägt, geht hier durch, und lässt sich vermittelst der schei-

*) Nachdem man den getheilten Halbkreis, um soviel als nöthig ist, horizontal fortgeschoben hat.

benförmigen Handhabe *p* frei um seine Axe drehen: diese Bewegung kann jedoch durch Anpressen des horizontalen Stücks *m* an die beiden Stäbe, vermöge der beiden Schrauben, nach Willkühr erschwert werden. Der Cylinder ist der Länge nach durchbohrt, so dass ein zweiter dünnerer Cylinder innerhalb desselben umgedreht werden kann, ohne dass der erste Cylinder, und mithin der getheilte Kreis, mitgeführt wird. Der innere Cylinder tritt bei *i* und *k* aus dem ersten heraus; bei *k* hat er eine Handhabe *s*, von kleinerem Durchmesser als die Handhabe *p*, vermöge deren er leicht umgedreht werden kann, ohne dass der erste Cylinder sich mitdreht; indem man dreht, übt diese Handhabe *s* gegen die Handhabe *p* bei *k* eine geringe Reibung aus; indem man diese durch Anpressen vermöge der Schraube *t* vergrössert oder verringert, erschwert oder erleichtert man die Bewegung nach Willkühr: schraubt man zu fest, so kann der erste Cylinder sich mitdrehen, was nicht geschehen darf; schraubt man zu lose, so kann der innere Cylinder sich von selbst drehen, was auch nicht geschehen darf. Bei *i* endet der innere Cylinder in das Gestelle, auf das man den Krystall klebt, dessen Winkel man messen will. Dieses Gestelle besteht aus zwei Armen *fd* und *ol*, welche durch die Schraube *od* mit einander verbunden sind, so dass der Arm *ol* um diese Schraube gedreht werden kann. Der Arm *ol* ist bei *l* durchbohrt, und der dünne Cylinder *ep*, der hier durchgeht, und sich vermöge der Handhabe *u* frei herumdrehen lässt, trägt bei *p* den Krystall, den man unmittelbar mit Wachs aufkleben, oder an eine kleine viereckigte Platte *c* befestigen kann. Wenn man die scheibenförmige Handhabe *s* dreht, so dreht sich das Gestelle mit dem Krystall; dreht man die Handhabe *p*, so dreht sich der eingetheilte

Kreis mit dem Gestelle zusammen. Um den Winkel zu messen, um welchen sich der eingetheilte Kreis dreht, dient die fixe Alidade *q*, welche an den Träger *mn* befestigt ist; sie hat bei *q* einen Nonius, der die Grade in kleinere Theile theilt.

Die Handbücher geben folgende Anweisung, dieses Instrument zu gebrauchen: Man wählt erst zwei horizontale Linien, die sich in einiger Entfernung befinden, zum Beispiel die horizontalen Stäbe eines gegenüberliegenden Fensters. Man stellt jetzt das Instrument so viel als möglich vertical, führt den Nullpunct des getheilten Kreises auf den Nullpunct des Nonius, und klebt den Krystall auf das Gestelle, so dass die Durchschnittslinie der Flächen, deren Neigungswinkel man messen will, ungefähr senkrecht auf die Ebene des getheilten Kreises ist. Der Beobachter nähert sein Auge dem Krystall so viel möglich, und dreht denselben vermöge der Handhabe *s* so lange, bis er das von der Krystallfläche reflectirte Bild der obern Horizontallinie sieht. Nun giebt man der Krystallfläche eine solche Lage, dass das reflectirte Bild der obern Horizontallinie mit der direct gesehenen untern Horizontallinie zusammenfällt: diess wird immer möglich seyn, da man der Krystallfläche vermöge des beweglichen Gestelles und der Drehung der Handhabe *s* alle möglichen Lagen geben kann. Wenn diese Coincidenz der Bilder auf beiden Krystallflächen nach einander statt findet, so ist der Krystall in der gehörigen Lage; es gehören allerdings viele Versuche dazu, um es dahin zu bringen: man muss oft hin und her drehen, und am Gestelle hin und her rücken: aber bei einiger Uebung bringt man es bald zu einer gewissen Fertigkeit darin. Nach diesen Vorbereitungen kann die eigentliche Messung angehen;

man lässt erst die Bilder auf der einen Krystallfläche zusammenfallen, indem man die Handhabe *s* dreht: dann dreht man den getheilten Kreis mit sammt dem Krystall, vermöge der Handhabe *p*, bis die Coincidenz der Bilder auch auf der anderen Fläche statt findet; der Winkel, den der Nonius auf dem getheilten Kreise anzeigt, ist das Complement des gesuchten Neigungswinkels der beiden Krystallflächen zu 180°.

Theorie des Wollaston'schen Reflexionsgoniometers.

Man stelle sich drei Coordinatenebenen vor, die sich unter rechten Winkeln schneiden, und deren erste, d. h. die der xz, mit der Ebene des getheilten Kreises zusammenfällt: Der Anfangspunct der Coordinaten sey im Mittelpunct des getheilten Kreises. Es seyen X', Y', Z' und X'', Y'', Z'' die Coordinaten der beiden Gegenstände, die wir als Puncte annehmen; die Coordinaten desjenigen Punctes auf der Krystallebene, wo das Bild des ersten Gegenstandes reflectirt wird, seyen x', y', z'. Wir wollen uns vorstellen, dass die Ebene der Kupfertafel, auf welcher die Fig. 198 gezeichnet ist, durch diese drei Puncte gelegt sey; es sey *A* der erste Gegenstand, *B* der zweite, *C* das Bild des ersten Gegenstandes auf der Krystallfläche; das Auge des Beobachters muss sich nothwendig auf der Verlängerung der Linie *BC* befinden, zum Beispiel in *D*, um die Puncte *C* und *B* zusammenfallen zu sehen. Die Krystallebene, deren Durchschnittslinie mit der Ebene *ABC*, *EF* sey, ist nothwendig senkrecht auf diese Ebene, und hat eine solche Lage, dass der Winkel, den sie mit der Linie *AC* macht, dem Winkel, den sie mit *CD* oder *BC* macht, gleich ist.

Es seyen jetzt

$$\left.\begin{aligned} x &= a'z + \alpha' \\ y &= b'z + \beta' \end{aligned}\right\} \text{ die Gleichungen der Linie } AC$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a''z + \alpha'' \\ y &= b''z + \beta'' \end{aligned}\right\} \text{ die Gleichungen der Linie } BC.$$

Da AC durch den Punct A geht, dessen Coordinaten X', Y', Z' sind, und zugleich durch den Punct c, dessen Coordinaten x', y', x sind, so ist offenbar, da diese Coordinaten der ersten Gleichung genügen müssen:

$$a' = \frac{X' - x'}{Z' - z'}$$
$$b' = \frac{Y' - y'}{Z' - z'},$$

und da die Linie BC durch denselben Punct C, und durch den Punct B geht, dessen Coordinaten X'', Y'', Z'' sind.

$$a'' = \frac{X'' - x'}{Z' - z'}$$
$$b'' = \frac{Y' - y'}{Z'' - z'}$$

Um die Gleichung der Ebene zu finden, die senkrecht auf die Ebene ABC ist, und die zugleich durch die Linie EF geht, welche den Winkel ABC in zwei gleiche Theile theilt, so wollen wir uns eine Linie vorstellen, die durch den Punct C geht, und deren allgemeine Gleichungen folgende Gestalt haben werden:

$$\left.\begin{aligned} (x - x') &= a\,(z - z') \\ (y - y') &= b\,(z - z') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Linie mache gleiche Winkel mit den Linien AC und BC, welches noch eine Bedingungsgleichung giebt, nämlich:

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a'a' + b'b')}} = \frac{1 + aa'' + bb''}{\sqrt{(1 + a''a'' + b''b'')}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Es ist klar, dass es eine unendliche Menge von Linien giebt, die denselben Winkel mit AC und BC machen; sie werden aber alle in der Ebene liegen, deren Gleichung wir suchen. Die Gleichung (2) wird also, wenn wir in derselben für a und b ihre aus den Gleichungen (1) eliminirten Werthe substituiren, eine Gleichung dieser Ebene abgeben. Setzt man überdies noch für a', b', a'', c'' ihre so eben gefundenen Werthe, und macht

$$V\left((Z' - z')^2 + (Y' - y')^2 + (X' - x')^2\right) = D'$$
$$V\left((Z'' - z')^2 + (Y'' - y')^2 + (X'' - x')^2\right) = D''$$

so findet man folgende Gleichung:

$$\left(D''(X' - x') - D'(X'' - x')\right)x + \left(D''(Y' - y') - D'(Y'' - y')\right)y + \left(D''(Z' - z') - D'(Z' - z')\right)z$$
$$- \left[\begin{array}{r}\left(D''(X' - x') - D'(X'' - x')\right)x' + \left(D''(Y' - y') - D'(Y'' - y')\right)y' \\ + \left(D''(Z' - z') - D'(Z'' - z')\right)z'\end{array}\right] = o \quad \ldots\ldots (3)$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass es nur eine Ebene giebt, welche jene Bedingungen erfüllt, vorausgesetzt, dass die beiden Gegenstände und der Punct auf der Krystallebene, welcher den ersten Gegenstand reflectirt, unverändert bleiben. Indess sind die Coordination x', y', z' nicht ganz unveränderlich, wegen der Ausdehnung der Krystallebene. Es geschieht oft, dass die vollkommenste Coincidenz des reflectirten Bildes des ersten Gegenstandes mit dem direct gesehenen zweiten Bilde durch eine kleine Bewegung des Auges des Beobachters gestört wird; und man ist gezwungen, den Krystall noch etwas zu drehen, um diese Coincidenz wieder herzustellen; eine kleine Bewegung des Auges stört sie wieder, und so fort; so dass man nie fertig wird.

Um diesem Uebelstand auszuweichen, muss man die Coordination x', y', z' soviel als möglich constant machen, indem man einen sehr kleinen Krystall wählt, oder man nimmt sehr entfernte Gegenstände, damit die Coordinaten X', Y', Z' so gross werden, dass man die Coordinaten x', y', z' als gegen sie verschwindend ansehen kann.

Man kann diesem auch auf eine andere Art abhelfen. Es ist klar, dass die Lage, welche die Ebene annehmen muss, damit die Coincidenz der Bilder statt finde, durch die Coefficienten der Veränderlichen x, y, z in der Gleichung (3) gegeben ist, welche den Coefficienten A, B, C in der allgemeinen Gleichung der Ebene correspondiren. Diese kann man aber von x', y', z' unabhängig machen, indem man $D' = D''$ macht. Alsdann findet die Coincidenz der Bilder auf allen Puncten der Krystallebene statt: denn, da die Gleichung (3) jetzt folgende Form annimmt:

$$(X'-X'')\,x+(Y'-Y'')\,y+(Z'-Z'')\,z-\left[(X'-X'')\,x'+(Y'-Y'')\,y'+(Z'-Z'')\,z'\right]=0$$

so bleibt die Lage der Ebene immer dieselbe, vorausgesetzt dass die Puncte, deren Coordinaten x', y', z' sind, immer in derselben Ebene bleiben, welche Bedingung das letzte Glied der obigen Gleichung constant macht. D', D'' sind aber die Entfernungen der beiden Gegenstände von dem Puncte, dessen Coordinaten x', y', z' sind.

Wir wollen jetzt die Ebene, deren Gleichung wir eben aus der Coincidenz der Bilder bestimmt haben, um die Axe der y drehen, bis die andere Krystallebene genau in dieselbe Lage kommt. Es sey α der Winkel, um welchen die Axe des Instruments gedreht worden ist: die Kenntniss dieses Winkels reicht hin, die Gleichung der ersten Ebene in ihrer neuen

$$D' = D''$$

$$Y' = Y'''.$$

zu gleicher Zeit erfüllt werden. Wenn y gleich Y'' und gleich Y''' seyn soll, so müssen die beiden Gegenstände und der Krystall sich in einer Ebene befinden, die der Ebene des getheilten Kreises parallel ist. Die beiden letzten Bedingungsgleichungen werden erfüllt, wenn man die beiden Gegenstände gleich weit entfernt von dem Krystall nimmt, und sie so wählt, dass eine Linie, die man durch sie legt, mit der Ebene des getheilten Kreises parallel ist. Die gleiche Entfernung der Gegenstände vom Krystall wurde schon oben gefordert, wenn die Krystallebenen einige Ausdehnung haben: die auf die beiden letzten Bedingungsgleichungen beruhende Wahl der Gegenstände wird also allerdings die beste seyn.

Wenn wir die aus unserer Analyse geschöpfte beste Methode in Ausführung bringen, so wählen wir erst zwei gleich entfernte Gegenstände, und bringen dann die Ebene des getheilten Kreises in eine mit der durch die beiden Gegenstände gehenden Linie parallele Lage; denn das ist bei weitem leichter, als das Instrument erst festzustellen, und dann die Gegenstände so lange zu verrücken, bis der verlangte Parallelismus statt findet. Wenn man aber $B = B' = o$ macht, so sind die Krystallebenen mit der Axe der y parallel, oder auf die Ebene xz senkrecht. Man kann also die Bedingung, unter welcher der von der fixen Alidade am getheilten Kreise zurückgelegte Bogen das Maass des Complements des Neigungswinkels der Krystallebenen zu 180° wird, auch so ausdrücken: Man muss dem getheilten Kreise eine solche Lage geben, dass die Krystallebenen, wenn die

Coincidenz der Bilder statt findet, senkrecht auf die Ebene des getheilten Kreises sind. Das ist die Hauptbedingung einer richtigen Messung.

Ich brauche kaum zu erinnern, dass, wenn man $B = B' = o$ macht, V auch nur dann gleich α wird, wenn sich x', y', z' von einer Ebene zur andern nicht ändern. Um diess zu bewerkstelligen, muss man entweder die Krystallflächen dem Mittelpunct des getheilten Kreises so nahe als möglich bringen, oder noch besser die Entfernungen der Gegenstände so gross nehmen, dass die Dimensionen des Gestelles, auf welches der Krystall geklebt ist, gänzlich gegen sie verschwinden.

Man muss also folgende Maassregeln bei dem Gebrauch des Wollastonschen Goniometers berücksichtigen:

I. Die Gegenstände müssen beide sehr weit entfernt seyn. Sie müssen, so viel möglich, eine gleiche Entfernung vom Krystall haben; da diess aber selten in voller Strenge zu bewerkstelligen ist, so muss man dem Instrument eine solche Lage geben, dass die Ebene, in welcher Krystall und beide Gegenstände liegen, soviel möglich mit der Ebene des getheilten Kreises parallel ist. Wenn es thunlich wäre, diesen Parallelismus mit voller Schärfe hervorzubringen, so brauchten die Gegenstände nicht gleich weit entfernt zu seyn.

II. Das Instrument muss eine solche Lage haben, dass eine Linie, durch die beiden Gegenstände gezogen, parallel mit der Ebene des getheilten Kreises sey. Diese Bedingung, mit der Bedingung, dass die Entfernungen der Gegenstände gleich seyen, zusammengenommen, wird hervorbringen, dass die Krystallebenen, wenn die Coincidenz der Bilder statt fin-

det, senkrecht auf die Ebene des getheilten Kreises seyn werden; welches die Hauptbedingung einer richtigen Messung ist.

Es ist aber nicht leicht, die Lage des Instruments mit einiger Strenge in diese Beziehung zu der Lage der gewählten Gegenstände zu bringen. Man muss deshalb auf eine Methode sinnen, diese Rechtwinklichkeit der Krystallebene mit der Ebene des getheilten Kreises unabhängig von der Lage der Gegenstände hervorzubringen, und das kann auf folgende Weise geschehen:

Um die Krystallebene in eine auf die Ebene des getheilten Kreises senkrechte Stellung zu bringen, klebt man ein kleines viereckigtes Stück schwarzes Glas mit zwei völlig parallelen polirten Oberflächen auf das Gestelle, wo man sonst den Krystall klebt. Man bewirkt die Coincidenz der Bilder erst auf der einen Oberfläche; dann dreht man um 180°, und findet die Coincidenz der Bilder auf der andern Oberfläche nicht statt, so dreht man an der Schraube am Fusse des Instruments so lange, bis die Entfernung der beiden Bilder ungefähr um die Hälfte verringert ist: man bewirkt dann die völlige Coincidenz der Bilder durch eine kleine Rückung des viereckigten Glases. Dreht man jetzt wieder zurück, so werden die Bilder auch auf der ersten Fläche nahe coincidiren; man stellt so lange und dreht so lange hin und her, bis die Coincidenz auf beiden Oberflächen des Glases nach einander statt findet. Alsdann ist offenbar der Winkel, den die eine Oberfläche des Glases mit der Ebene des getheilten Kreises macht, dem Winkel, den die andere Oberfläche mit derselben Ebene macht, gleich; jeder derselben ist also ein rechter, da die beiden Oberflächen einander parallel sind. Setzt man jetzt eine Krystallebene an die

Stelle des viereckigten Glases, so macht, wenn die Bilder coincidiren, auch diese einen rechten Winkel mit der Ebene des getheilten Kreises.

III. Man muss den Krystall soviel als möglich der Axe des getheilten Kreises nahe bringen.

IV. Die Krystalle müssen klein seyn.

Der Punct III verdient noch eine Erläuterung. Man weiss aus dem Vorhergehenden, dass die Ebene des Krystalls den Winkel *ACB* in zwei Hälften theilt. Man kann sich also die Durchschnittslinie der Krystallebene mit der Ebene der beiden Gegenstände und des Krystalls als die Tangente einer Hyperbel vorstellen, in deren beiden Brennpuncten die Gegenstände *A* und *B* liegen, und deren grosse Axe mit der Linie *AB* zusammenfällt. Es giebt eine unendliche Menge solcher Hyperbeln; in allen ihren Puncten werden die beiden Bilder coincidiren, wenn man die Krystallebene mit der Tangente der Hyperbel zusammenfallen lässt, vorausgesetzt, dass die Krystallebene senkrecht sey auf die Ebene der beiden Gegenstände und des Krystalls. Man sieht leicht ein, dass diese Hyperbeln sehr wenig Krümmung haben, wenn die beiden Gegenstände sehr weit entfernt sind; die Krümmung der Hyperbel nimmt nicht nur im Verhältniss der Entfernung der Gegenstände ab, sondern sie ist auch desto geringer, je näher sich der Krystall einer Linie befindet, welche senkrecht auf *AB* ist, und welche durch ihre Mitte, das heisst durch den Mittelpunct der Hyperbel geht. Der Krystall, der auf das Gestelle geklebt ist, hat eine kreisförmige Bewegung: je weniger Krümmung also die Hyperbel hat, desto schneller wird der Kreisbogen, in dem der Krystall gedreht wird,

sich von dem Hyperbelbogen entfernen, den er bei der Coincidenz der Bilder berührt, desto schwerer wird er also seyn, sich über den Punct, wo die vollkommene Coincidenz der Bilder statt findet, zu täuschen, und desto enger wird die Grenze der hier möglichen Fehler seyn. Diese Grenze wird, bei unveränderter Lage des Instruments, noch mehr dadurch verengert werden, dass man die Krümmung des Kreisbogens, in dem die Krystallebene herumgeführt wird, vergrössert, oder den Radius dieses Kreises verkleinert.

Der Einfluss der Krümmung des Kreises, in welchem der Krystall herumgeführt wird, auf die Genauigkeit der Messung, verschwindet, wenn die Entfernungen der Gegenstände gross sind, wie sie immer seyn müssten; er wird aber bedeutender bei kleinen Entfernungen, wie man aus nachstehenden Beobachtungen ersehen kann, die ich in der Absicht gemacht habe, um diesen Einfluss ungefähr zu bestimmen. Ich habe erst zwei sehr nahe Gegenstände gewählt, die jede ungefähr sechs Fuss vom Krystall entfernt waren. Ich maass die Neigung zweier benachbarten Pyramidenflächen an einem kleinen Quarzkrystall. Die Tabelle *A* enthält die Beobachtungen, bei denen der Krystall in einer bedeutenden Entfernung vom Mittelpunct des getheilten Kreises auf dem Gestelle befestigt war; die Tabelle *B* enthält diejenigen, wo die Durchschnittslinie der beiden Krystallebenen sich in sehr geringer Entfernung von der Axe des getheilten Kreises befand. Die Columne I giebt die Nummern der Beobachtungen, und die Columne II die beobachteten Grade und Minuten, dass heisst die Differenzen der Winkel, welche die auf einanderfolgen Repetitionen gaben.

A.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 17′	13	46° — 15′	25	46° — 16′	37	46° — 22′
2	— — 11	14	— — 17	26	— — 26	38	— — 20
3	— — 15	15	— — 21	27	— — 16	39	— — 24
4	— — 23	16	— — 25	28	— — 23	40	— — 23
5	— — 17	17	— — 22	29	— — 27	41	— — 19
6	— — 17	18	— — 20	30	— — 17	42	— — 20
7	— — 20	19	— — 26	31	— — 10	43	— — 23
8	— — 29	20	— — 21	32	— — 27	44	— — 17
9	— — 17	21	— — 23	33	— — 18	45	— — 15
10	— — 20	22	— — 20	34	— — 27	46	— — 24
11	— — 21	23	— — 22	35	— — 24	47	— — 23
12	— — 11	24	— — 25	36	— — 23		

B.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 13′	13	46° — 12′	25	46° — 17′	37	46° — 15′
2	— — 13	14	— — 13	26	— — 20	38	— — 17
3	— — 11	15	— — 13	27	— — 13	39	— — 13
4	— — 12	16	— — 16	28	— — 15	40	— — 21
5	— — 12	17	— — 13	29	— — 19	41	— — 14
6	— — 9	18	— — 16	30	— — 13	42	— — 18
7	— — 16	19	— — 19	31	— — 11	43	— — 17
8	— — 14	20	— — 15	32	— — 14	44	— — 12
9	— — 9	21	— — 10	33	— — 6	45	— — 12
10	— — 19	22	— — 16	34	— — 17	46	— — 14
11	— — 10	23	— — 13	35	— — 12	47	— — 16
12	— — 10	24	— — 19	36	— — 12		

Die Summe der beobachteten Winkel durch ihre Anzahl dividirt, giebt 46° — 20″,4 für die Tafel *A* und 46° — 14′,0 für die Tafel *B*.

Die Summe der Quadrate der Differenzen dieses Resultats und jeder einzelnen Beobachtung ist:

in der Tafel *A* 905,54
in der Tafel *B* 477,00

Man findet hieraus das Gewicht des Resultats der Tafel *A* gleich

1,22

und das Gewicht des Resultats der Tafel *B* gleich

2,31.

Man sieht, dass das Resultat der Tafel *B* bei weitem mehr Vertrauen verdient, als das Resultat der Tafel *A*.

Indessen, wenn die beiden Gegenstände sehr weit entfernt sind, so ändert sich das Gewicht des Resultats der Beobachtungen nicht merklich mit der grösseren oder geringeren Entfernung der Krystallebene von der Axe des getheilten Kreises. Diess geht auch aus den nachstehenden Tabellen hervor, von welchen *A* wieder diejenigen Beobachtungen enthält, bei denen der Krystall vom Mittelpunct der Drehung entfernt, und *B* diejenigen, wo diese Entfernung sehr gering war. Es wurde die Neigung zweier abwechselnden Flächen derselben Quarzpyramide gemessen.

A.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 49′	11	85° — 48′	21	85° — 49′	31	85° — 47′
2	— — 48	12	— — 46	22	— — 48	32	— — 45
3	— — 43	13	— — 52	23	— — 49	33	— — 48
4	— — 47	14	— — 50	24	— — 45	34	— — 50
5	— — 50	15	— — 43	25	— — 48	35	— — 48
6	— — 48	16	— — 42	26	— — 51	36	— — 44
7	— — 42	17	— — 46	27	— — 46	37	— — 48
8	— — 45	18	— — 49	28	— — 43	38	— — 46
9	— — 53	19	— — 47	29	— — 46	39	— — 45
10	— — 47	20	— — 43	30	— — 47	40	— — 45
						41	— — 41
						42	— — 51

B.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 46′	12	85° — 42′	23	85° — 48′	34	85° — 45′
2	— — 44	13	— — 44	24	— — 42	35	— — 49
3	— — 44	14	— — 46	25	— — 45	36	— — 43
4	— — 46	15	— — 40	26	— — 49	37	— — 44
5	— — 45	16	— — 41	27	— — 48	38	— — 49
6	— — 49	17	— — 48	28	— — 41	39	— — 46
7	— — 44	18	— — 49	29	— — 47	40	— — 44
8	— — 44	19	— — 41	30	— — 50	41	— — 45
9	— — 48	20	— — 42	31	— — 47	42	— — 49
10	— — 46	21	— — 44	32	— — 44		
11	— — 42	22	— — 47	33	— — 44		

Das mittlere Resultat der Tafel *A* ist 85° — 46′,8; das Resultat der Tafel *B* 85° — 45′,2. Die Summe der Quadrate der Fehler ist

für die Tafel *A* 258,16

für die Tafel *B* 274,28.

Hieraus findet man das Gewicht des Resultats der Tafel *A* gleich

3,416

und das Gewicht des Resultats der Tafel *B* gleich

3,215.

Der Unterschied dieser beiden Zahlen ist zu gering, als dass man ihn etwas anderm, als dem Zufall, zuschreiben könnte. Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass, obgleich es für die Richtigkeit der Messung gleichgültig ist, welche Lage die beiden Gegenstände haben, vorausgesetzt dass man die Stellung des Instruments erst durch das viereckigte schwarze Glas berichtigt hat, man doch genauere Resultate bekommen muss, wenn die Entfernungen der Gegenstände einander gleich sind, zumal wenn diese Entfernungen nicht sehr gross sind. Es gilt überhaupt für jede Art von Beobachtung, dass man der Bedingungen nie zu viele erfüllen kann, weil man doch keine einzige mit voller Strenge zu erfüllen im Stande ist.

Was die erste Regel, die beim Gebrauch des Wollaston'schen Goniometers zu beobachten ist, betrifft, so kann man den Parallelismus der Ebene des getheilten Kreises mit der Ebene des Krystalls und der beiden Gegenstände, wenn diese entfernt sind, leicht mit ziemlicher Schärfe hervorbringen, indem man die beiden entgegengesetzten Ränder des getheilten Kreises und die beiden Gegenstände sich decken lässt.

Wenn man keine sehr entfernte Gegenstände hat, zum Beispiel im Winter, wo man bei unserem Klima die Fenster nicht öffnen kann, so stellt man in einem grossen Saal das Instrument einem Fenster gegenüber, so weit vom Fenster, als möglich, an einer Stelle, wo es etwas dunkel ist, damit das zu heftig auffallende Tageslicht nicht die Deutlichkeit des re-

flectirten Bildes vermindere: wenn die Dunkelheit zu gross ist, um die gemessenen Grade und Minuten ablesen zu können, so stellt man eine Lampe in die Nähe des Instruments, so dass die Eintheilung, aber nicht der Krystall beschienen wird.

Jetzt bezeichnet man am gegenüberliegenden Fenster die Höhe des Instruments über dem Fussboden, und klebt auf der Verticallinie, die durch diesen Punct geht, in gleichen Entfernungen von diesem Puncte unterhalb und oberhalb desselben zwei kreisförmige Stückchen schwarzes Papier, von etwa einem halben Zoll Durchmesser. Es ist gut, das obere schwarze Scheibchen mitten auf eine Raute zu kleben, das untere aber auf die Wand, nicht weit vom Fussboden, damit das Auge, das hier die Coincidenz der Bilder beobachtet, nicht geblendet werde. Man kann auch statt der untern Scheibe ein grosses schwarzangestrichenes Brett gebrauchen, welches in der Mitte ein Loch hat, von demselben Durchmesser, als das obere Scheibchen, und welches man vor die unterste Fensterraute stellt. Man bringt nun die Ebene des getheilten Kreises soviel möglich in die Ebene, die durch das Auge des Beobachters und die beiden Puncte geht; man bringt das Instrument in die rechte Lage, vermittelst des viereckigten schwarzen Glases, dessen Gebrauch oben beschrieben worden ist — und alles ist zu einer guten Messung vorbereitet.

Es ist schwer, in grosser Entfernung zwei Gegenstände zu finden, die gleich entfernt vom Instrument sind, und die schickliche Puncte haben, welche man coincidiren lassen kann. Deshalb ist es oft wünschenswerth, eine Methode zu haben, die nur einen Gegenstand erfordert; und das ist bei der folgenden der Fall. Man wählt erst einen erhabenen entfernten

Gegenstand, der einen mit dem Auge leicht zu fassenden Punct besitzt, z. B. die Spitze eines Thurms mit einem Kreuz. Diesen Gegenstand läst man von einem schwarzen ebenen Spiegel reflectiren, indem man den Spiegel so stellt, dass der Beobachter das von der Krystallfläche reflectirte Bild des Gegenstandes mit dem von dem Spiegel reflectirten Bilde desselben Gegenstandes coincidiren lassen kann. Das vom Spiegel reflectirte Bild dient als zweiter Gegenstand: wenn die Entfernung des ersten Gegenstandes sehr gross ist, so ist die Entfernung der Stelle, die das Bild im Spiegel einzunehmen scheint, vom Krystall, der Entfernung des Gegenstandes vom Krystall sehr nahe gleich: die Stelle nämlich, die das reflectirte Bild des Gegenstandes im Spiegel einzunehmen scheint, liegt auf einer Linie, die senkrecht auf die Ebene des Spiegels durch den Gegenstand geht, eben so weit unterhalb der Ebene des Spiegels, als der Gegenstand über derselben liegt. Man stellt den Spiegel, der vollkommen eben seyn muss, ungefähr horizontal, und giebt dann dem Instrument vermöge des schwarzen viereckigten Glases die gehörige Lage. Man thut gut, einen nicht sehr über dem Horizont erhabenen Gegenstand zu wählen, wenn die Entfernung desselben nicht ausserordentlich gross ist: denn wenn man die Entfernung des Gegenstandes vom Krystall mit D, seine senkrechte Höhe über der Ebene des Spiegels mit H', die senkrechte Höhe des Krystalls über der Ebene des Spiegels mit H bezeichnet; so ist der Unterschied zwischen der Entfernung der Stelle, wo das vom Spiegel reflectirte Bild des Gegenstandes zu stehen scheint, vom Krystall, und der Entfernung des Gegenstandes selbst vom Krystall gleich $\sqrt{(D^2 + 4HH')} - D$, Grösse, die desto kleiner ist, je kleiner HH' ist. H' ist übrigens immer grösser als H, weil nur unter

dieser Bedingung die Reflexion des Gegenstandes auf der Krystallfläche, welche, wenn die Coincidenz der Bilder erreicht ist, eine mit dem Spiegel parallele Lage hat, statt finden kann.

Bei dieser Methode kann man ausserordentlich entfernte Gegenstände, z. B. die Sonne, gebrauchen. Man beobachtet dann mit einem schwarzen Glase, und nimmt einen Spiegel von grosser Breite, weil sonst das Bild, wegen der Bewegung der Sonne, bald aus dem Felde des Spiegels herausgeht.

Ich habe die Fehler, welche entstehen, dass der Mittelpunct des getheilten Kreises nicht mit der Axe der Drehung desselben zusammenfällt, mit Stillschweigen übergangen, weil sie durch Repetition der Winkel, den ganzen Kreis herum, verschwinden.

Fallen die Winkel in einem Quadranten des getheilten Kreises zu gross aus, so werden sie im entgegengesetzten Quadranten zu klein. Man kann diesem Uebel auch durch Verdoppelung der Alidaden abhelfen; die Hälfte der Summe der Winkel, die man an beiden Alidaden abgelesen hat, ist dem Winkel am Mittelpunct der Drehung gleich.

Wenn man im Allgemeinen wissen will, ob ein Instrument schlecht centrirt ist (so benennt man den Fehler des Instruments, wenn der Mittelpunct der Eintheilung nicht mit dem Mittelpunct der Drehung zusammenfällt) und wo der Mittelpunct der Eintheilung sich ungefähr befindet, so braucht man nur eine grosse Anzahl von Beobachtungen in vier Abtheilungen zu bringen, je nachdem sie in den ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten des getheilten Kreises fallen. Die mittleren Werthe der beobachteten Winkel werden verschieden ausfallen, je nachdem man

das Resultat der einen oder der andern Abtheilung nimmt, wenn das Instrument nicht genau centrirt ist. Der Drehungspunkt des getheilten Kreises befindet sich in demjenigen Quadranten desselben Kreises, der das kleinste Resultat gegeben hat.

Die Methode, das Wallaston'sche Reflexionsgoniometer zu gebrauchen, die wir eben theoretisch abgeleitet haben, weicht von der gewöhnlichen, die wir bei der Beschreibung des Instruments mit angeführt haben, ein wenig ab. Bei dieser wählt man zwei parallele horizontale Linien als Gegenstände, die man coincidiren lässt, und bedient sich des viereckigten schwarzen Glases gar nicht. Es ist klar, dass die Coincidenz der Bilder nur dann statt finden kann, wenn die Krystallflächen eine mit diesen Linien parallele Lage angenommen haben. Findet die Coincidenz auf beiden Flächen statt, so machen beide Flächen denselben Winkel mit der Ebene des getheilten Kreises: dieser Winkel ist nur dann nothwendig ein rechter, wenn die beiden Flächen einander parallel sind, was nie der Fall ist, denn man wird nie den Neigungswinkel zweier parallelen Flächen messen wollen; je stumpfer der Neigungswinkel der Krystallflächen ist, desto mehr kann der Winkel der Flächen mit der Ebene des getheilten Kreises von einem rechten verschieden seyn. Die Hauptbedingung einer richtigen Messung ist also nicht erfüllt, wenn man nicht der Ebene des getheilten Kreises eine solche Lage giebt, dass ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der beiden Linien rechte Winkel mit diesen Linien macht. Man muss deshalb dafür Sorge tragen, dass, wenn die beiden Linien horizontal sind, die Ebene des getheilten Kreises vertical sey; und da diess bei einem so kleinen Instrument schwer mit einiger Schärfe zu bewerkstelligen ist, so wird

auch hier der Gebrauch des viereckigten schwarzen Glases von grossem Nutzen seyn. Aus der Nichtbeachtung dieses Umstandes lässt sich vielleicht zum Theil die Verschiedenheit der Angaben desselben Winkels von verschiedenen Beobachtern erklären.

Sind nun gar die beiden Linien entweder nicht genau parallel, oder sind sie beide nicht horizontal, so kann, auch wenn man den getheilten Kreis mit Sorgfalt vertical gestellt hat, doch der hieraus entspringende Fehler der Messung bedeutend werden.

Wenn man mehrere parallele Linien hat, so kann man das viereckigte schwarze Glas entbehren, indem man das Instrument so lange stellt, bis mehrere von diesen Linien nach einander auf beiden Flächen des Krystalls coincidiren. Es ist klar, dass diess nur dann möglich ist, wenn eine Linie auf der Krystallfläche sich immer parallel bleibt, man mag den Kreis drehen, um welchen Winkel man wolle, und eine solche Linie ist nur dann möglich, wenn die Krystallebene parallel mit der Drehungsaxe ist.

Das Reflexionsgoniometer mit einem Fernrohr.

Das Wollaston'sche Goniometer giebt noch genauere Resultate, wenn man es mit einem Fernrohr verbindet, wie die Fig. 199 anzeigt. *ABC* ist ein dreieckigtes Brett: in der Ecke *A* desselben erhebt sich eine messingene Säule, welche das Fernrohr *L* trägt: dieses Fernrohr lässt sich um eine verticale, und, vermöge des Stücks *o* um eine horizontale Axe drehen: man kann demselben also alle möglichen Richtungen geben. Auf dem dreieckigten Brett steht ein Wollaston'sches Goniometer, mit seinen drei Schrauben

am Fuss, *) vermöge welcher es in die gehörige Lage gebracht werden kann; sein getheilter Kreis ist mit der Linie des Fernrohrs so genau, als es mit blossem Augenmaas geschehen kann, parallel gestellt, und das Fernrohr ist niederwärts so gerichtet, dass die Fläche eines auf das Gestelle *N* des Goniometers geklebten Krystalls das Bild eines entfernten Gegenstandes in das Fernrohr hinein reflectirt.

Um jetzt dem Goniometer die rechte Lage zu geben, klebt man auf das Gestelle *N* das schwarze Glas *p*, von dem schon beim Gebrauch des Wollaston'schen Goniometers die Rede war; man giebt ihm eine solche Lage, dass das von demselben reflectirte Bild des entfernten Gegenstandes in das Fadenkreuz des Fernrohrs fällt. Man dreht das Gestelle, auf welchem das Glas befestigt ist, um 180°, damit derselbe Gegenstand von der andern Oberfläche des Glases reflectirt werde; fällt nun derselbe Punct des entfernten Gegenstandes, der das erste Mal ins Fadenkreuz fiel, auch jetzt in dasselbe, so hat das Goniometer die richtige Lage: wo nicht, so stellt man so lange abwechselnd an der Schraube *m* am Fusse des Goniometers und am Glase, bis die Coincidenz auf beiden Seiten des schwarzen Glases nacheinander erfolgt. Wenn man glaubt, sich nicht auf den Parallelismus der beiden Flächen eines solchen Glases verlassen zu können, so kann man statt desselben ein Prisma anwenden, bei welchem es immer dieselbe Seite ist, die bald von der äussern, bald von der innern Fläche reflectirt.

Ist das Instrument endlich in der rechten Lage, so nimmt man das kleine schwarze Glas fort, und klebt an dessen Stelle den Krystall, dem

*) Es bedarf eigentlich nur einer Schraube in *m*; die andern beiden kann man durch unbewegliche spitze Füsse ersetzen.

man eine solche Lage giebt, dass er mit beiden Flächen, deren Winkel gemessen werden soll, das Bild des entfernten Gegenstandes ins Fadenkreuz reflectirt; ist man so weit, so ist offenbar der Winkel, um den man den Krystall drehen muss, damit erst das von der einen, dann das von der andern Fläche reflectirte Bild ins Fadenkreuz fällt, das Complement des gesuchten Neigungswinkels der beiden Krystallflächen.

Mitscherlich hat bei seinen trefflichen Untersuchungen über die Aenderung, welche die Winkel einiger Krystalle durch die Wärme erleiden, ein Goniometer gebraucht, welches nach demselben Princip gebaut ist; nur ist alles daran vollkommner gearbeitet; der getheilte Kreis hat einen bedeutenderen Durchmesser, und die Ablesung geschieht mit vier Noniussen; es ist eine Vorrichtung da, um ihn senkrecht und die Gesichtslinie des Fernrohrs ihm parallel zu stellen; man kann auch die Kante des Krystalls genau in die Verlängerung der Drehungsaxe des getheilten Kreises bringen, was übrigens eigentlich unnütz ist, wenn der Gegenstand sehr weit entfernt ist. Dieses Instrument leistet natürlich mehr, als irgend ein anderes; es ist aber nur da anwendbar, wo die Krystallflächen sehr glänzend sind, und deshalb ein sehr deutliches Bild geben.

ERSTE TAFEL.

Trigonometrische Functionen.

$$\sin.(A+B) = \sin. A \cdot \cos. B + \cos. A \cdot \sin. B$$

$$\sin.(A-B) = \sin. A \cdot \cos. B - \cos. A \cdot \sin. B$$

$$\cos.(A+B) = \cos. A \cdot \cos. B - \sin. A \cdot \sin. B$$

$$\cos.(A-B) = \cos. A \cdot \cos. B + \sin. A \cdot \sin. B.$$

$$tg\,(A+B) = \frac{tg\,A+tg\,B}{1-tg\,A\cdot tg\,B}$$

$$tg\,(A-B) = \frac{tg\,A-tg\,B}{1+tg\,A\cdot tg\,B}$$

$$\cot.(A+B) = \frac{\cot. A\cdot\cot. B-1}{\cot. A+\cot. B}$$

$$\cot.(A-B) = \frac{\cot. A\cdot\cot. B+1}{\cot. B-\cot. A}$$

$$\sin. A = 2 \sin. \tfrac{1}{2} A \cdot \cos. \tfrac{1}{2} A$$

$$\cos. A = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A - 1 = 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\sin. A = \sqrt{\frac{1-\cos. 2A}{2}}$$

$$\cos. A = \sqrt{\frac{1+\cos. 2A}{2}}$$

$$tg\ A = \sqrt{\frac{1-\cos. 2A}{1+\cos. 2A}}$$

$$tg\ 2A = \frac{2\,tg\,A}{1-tg^2 A}$$

$$\cot. 2A = \frac{\cot.^2 A-1}{2\cot. A}$$

$$\sin. A \cdot \sin. B = \tfrac{1}{2} \cos. (A - B) - \tfrac{1}{2} \cos. (A + B)$$

$$\cos. A \cdot \cos. B = \tfrac{1}{2} \cos. (A - B) + \tfrac{1}{2} \cos. (A + B)$$

$$\sin. A \cdot \cos. B = \tfrac{1}{2} \sin. (A + B) + \tfrac{1}{2} \sin. (A - B)$$

$$\sin. A + \sin. B = 2 \sin. \tfrac{1}{2} (A + B) \cos. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

$$\sin. A - \sin. B = 2 \cos. \tfrac{1}{2} (A + B) \sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

$$\cos. A + \cos. B = 2 \cos. \tfrac{1}{2} (A + B) \cos. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

$$\cos. A - \cos. B = 2 \sin. \tfrac{1}{2} (A + B) \sin. \tfrac{1}{2} (B - A)$$

$$tg\ A + tg\ B = \frac{\sin. (A+B)}{\cos. A \cos. B}$$

$$tg\ A - tg\ B = \frac{\sin. (A-B)}{\cos. A \cdot \cos. B}$$

$$\cot. A + \cot. B = \frac{\sin. (A+B)}{\sin. A \sin. B}$$

$$\cot. A - \cot. B = \frac{\sin. (B-A)}{\sin. A \sin. B}$$

$$\cot. A + \mathrm{tg}\ B = \frac{\cos. (A-B)}{\sin. A \cos. B}$$

$$\cot. A - tg\ B = \frac{\cos. (A+B)}{\sin. A \cos. B}$$

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. A - \sin. B} = \frac{tg \frac{1}{2} (A+B)}{tg \frac{1}{2} (A-B)}$$

$$\frac{\cos. A + \cos. B}{\cos. A - \cos. B} = \frac{\cot. \frac{1}{2} (A+B)}{tg \frac{1}{2} (B-A)}$$

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\cos. A + \cos. B} = \frac{\cos. A - \cos. B}{\sin. B - \sin. A} = tg \tfrac{1}{2} (A + B)$$

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\cos. A \quad \cos. B} = \frac{\cos. B + \cos. A}{\sin. B - \sin. A} = \cot. \tfrac{1}{2} (B - A)$$

$$\frac{tg\ A + tg\ B}{tg\ A - tg\ B} = \frac{\cot. A + \cot. B}{\cot. B - \cot. A} = \frac{\sin. (A+B)}{\sin. (A-B)}$$

$$\frac{tg\ A + tg\ B}{\cot. A + \cot. B} = \frac{tg\ A - tg\ B}{\cot. B - \cot. A} = tg\ A \cdot tg\ B$$

$$\frac{tg\ A + \cot. B}{\cot. A + tg\ B} = \frac{\cot. B - tg\ A}{\cot. A - tg\ B} = tg\ A \cot. B$$

$$\frac{tg\ A + tg\ B}{\cot. A - tg B} = tg\ A \cdot tg\ (A + B)$$

$$\frac{\cot. A+\cot. B}{\cot. A-tg\, B} = \cot. B \cdot tg\,(A+B)$$

$$\frac{tg\, A-tg\, B}{\cot. A+tg\, B} = tg\, A \cdot tg\,(A-B)$$

$$\frac{\cot. B-\cot. A}{tg\, B+\cot. A} = \cot. B \cdot tg\,(A-B)$$

$$\frac{\cot. B-\cot. A}{tg\, B+\cot. A} = \cot. B\ tg\,(A-B)$$

$$1 + tg\, A\ tg\, B = \frac{\cos.(A+B)}{\cos. A \cos. B}$$

$$1 - tg\, A\ tg\, B = \frac{\cos.(A+B)}{\cos. A \cos. B}$$

$$tg\, A \cot. B - 1 = \frac{\sin.(A-B)}{\cos. A \sin. B}$$

$$tg\, A\ \cot. B + 1 = \frac{\sin.(A+B)}{\cos. A \sin. B}$$

$$\sin.^2 A - \sin.^2 B = \sin.(A+B)\sin.(A-B) = \tfrac{1}{2}\cos. 2B - \tfrac{1}{2}\cos. 2A$$

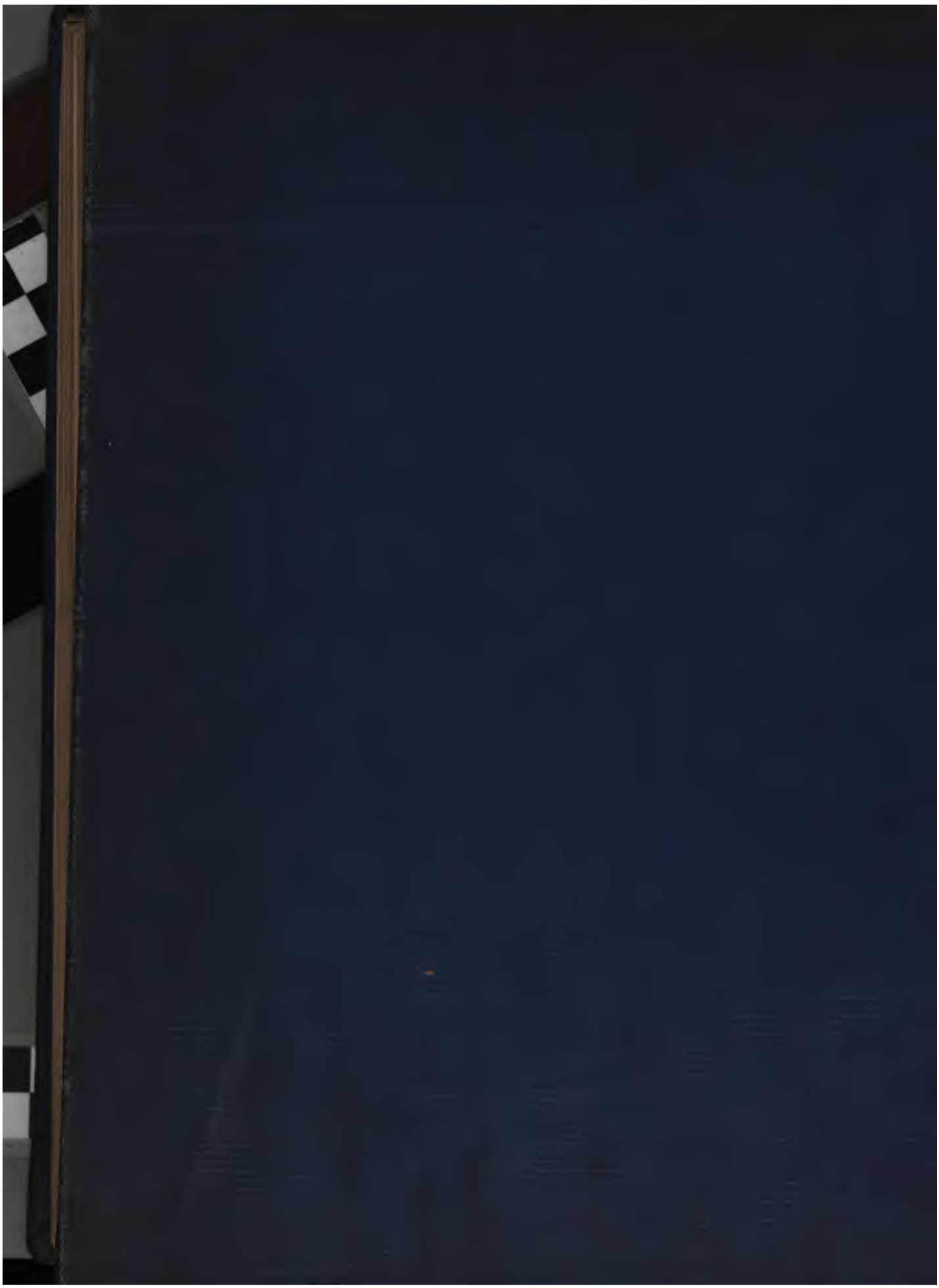
$$\cos.^2 A - \sin.^2 B = \cos.(A+B)\cos.(A-B) = \tfrac{1}{2}\cos. 2B + \tfrac{1}{2}\cos. 2A.$$

ZWEITE TAFEL,

welche für ein gewisses Gewicht, als Argument, die zu gehörige Probabilität eines gewissen Fehlers angiebt (siehe S. 556).

I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
0,0	0,0	0,00000	0	4,5	18,0	0,99730	370
0,5	2,0	0,68430	2	5,0	20,0	0,99843	636
1,0	4,0	0,84270	5½	5,5	22,0	0,99909	1,098
1,5	6,0	0,91664	11	6,0	24,0	0,99947	1,886
2,0	8,0	0,95447	21	7,0	28,0	0,99982	5,554
2,5	10,0	0,97462	39	8,0	32,0	0,99994	16,666
3,0	12,0	0,98568	70	9,0	36,0	0,99998	50,000
3,5	14,0	0,99184	122	10,0	40,0	0,99999	160,000
4,0	16,0	0,99532	212				

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

Form 419